Modern Fizika

Kulcsszó-jegyzet, :JA:

2017. február 18 – April 22, 2017

1 Bevezetés

- Cél: megérteni az újsághíreket, legalább kvalitetíve. Azért vagyunk együtt, hogy a megértést növeljük. Nem túl sok matematika (legfeljebb differenciálás, 1D integrálás), inkább fizikai képek. Beleszólni szabad! Számonkérés: teszt, javításért szóbeli felelet.
- Könyv: Kenneth S. Krane: Modern Physics
- "Hagyományos" (klasszikus) fizika: a jelenségek szem előtt voltak, a fogalmak magától értetődőek, vagy legalábbis könnyen megérthetőek voltak (sebesség, erő, áramlás, alakváltozás, hőmérséklet, stb.). Ez a XIX. században kezdett árnyalódni (hőtan, entrópia, elektrodinamika, elektromos és mágneses mezők), de még mindig köznapi ésszel felfogható volt. Modern fizika: fogalmak definiálása (tömeg, töltés, tér és idő, hely és impulzus)
- Mik a "tények"? Mik írják le a jelenségeket? Például figyeljünk egy egy vonalban guruló golyót. Látás: rengeteg információ!? Ütköztessünk egy tesztgolyónuk, amelynek tömege egy egységnyi tömeg egész számszorosa, és kezdetben áll. Az ütközés után a tesztgolyó elkezd gurulni, és leesik az asztalról. Mérjük: az ütközés után mennyi idő alatt esik le az asztalról. Számolás: a mi golyónk m tömegű és v sebességgel megy, a tesztgolyó $M = nM_0$ tömegű, 0 sebességű kezdetben; a végén a tesztgolyó sebessége V, a mi golyónk sebessége v'. Az asztal peremétől számolt távolság s legyen. A leesési idő tehát $t = s/V$. Az ütközés során tegyük fel, hogy az energia és az impulzus megmarad:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}vv'^2 + \frac{1}{2}MV^2, \qquad mv = mv' + MV. \tag{1}$$

  Ebből:

$$V = \frac{2m}{m+M}v, \qquad v' = \frac{M-m}{m+M}v, \qquad t = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right)\frac{s}{v}. \tag{2}$$

  Innen az n-szeres tömegű tesztgolyó leesési idejeire, t_n-re végtelen sok számot kapunk. Kísérlet: csak ezt a végtelen sok számot látja. De felfedezhetjük, hogy n függvényében az eredmény egy egyenesre esik!

$$t_n = A + Bn \quad \Rightarrow \quad A = \frac{s}{2v},\ B = \frac{s}{2vm}. \tag{3}$$

  Tehát a guruló golyó nem végtelen sok adattal jellemezhető! Elég csak kettő: ez lehet A és B, de lehet v és m vagy éppen az energia és az impulzus.

  A modern fizika így működik: először meg kell találnunk azokat a "releváns fogalmakat", amelyek a megfigyelt rendszert leírják: ezek sokszor nem maguktól értetődnek, és akár intuíció-ellenesek is lehetnek. De el kell fogadnunk, hogy ilyen a természet.

2 Relativitáselmélet

- Michelson-Morley kísérlet (1887) $\Rightarrow$ fény minden koordinátarendszerben c
- meglepő klasszikusan egy V sebességű autó egy v sebességű vonatból $V - v$ sebességűnek látszik – ha az autó fény, a vonatból is c sebességűnek látszik!?

- Mi következik ebből? Gondolatkísérletek sorozata (Einstein, 1905) – kivételes helyzet, mikor gondolatkísérletek elegendőek! Általában egy v sebességű vonaton utazó és a földön álló megfigyelőt hasonlítjuk össze. A vonat által mért mennyiségeket mindig vesszővel jelöljük. Tehát Michelson-Morley szerint $c' = c$

- **Határsebesség**: fényképezés a vonatok $\Rightarrow$ fény határsebesség

- **Merőleges távolságok**: vonat belefér az alagútba $\Rightarrow$ a merőleges távolságok nem változnak: $h' = h$.

- **Idő**: mérjük az időt fényórával, és tegyük az órát a vonatra. Ha h az óra merőleges hossza, a periódusidő

$$t'_{per} = \frac{2h}{c}. \tag{4}$$

A földön álló megfigyelő szerint:

$$t_{per} = \frac{2}{c}\sqrt{h^2 + (\frac{vt_{per}}{2})^2} \quad \Rightarrow \quad t_{per} = \frac{2h}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > t'_{per}! \tag{5}$$

A földi megfigyelő úgy látja, hogy amíg a fény egyet pattan, az több időbe telik, mint ahogy a vonaton ülő megfigyelő látja. Más szavakkal: mikor a fény oda-vissza pattan, a földi megfigyelő órája t_{per} időt mutat, a vonaton ülő órája $t'_{per} < t_{per}$ időt $\Rightarrow$ *a vonaton ülő órája lassabban jár.* Általában ha a földi órája t-t mutat, akkor a vonaton ülő órája

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{6}$$

korábbi időpontot mutat.

Érdekesség: a vonaton ülő pontosan ugyanezzel a gondolatmenettel a földi megfigyelő óráját látja lassabbnak! Később visszatérünk erre.

- Átírás: ha kis időket nézünk $t \to dt$, $t' \to d\tau$ (így szokták jelölni annak a rendszernek az idejét, ahol áll az óra – *sajátidő*) , és használjuk fel, hogy $v = dx/dt$; ezzel

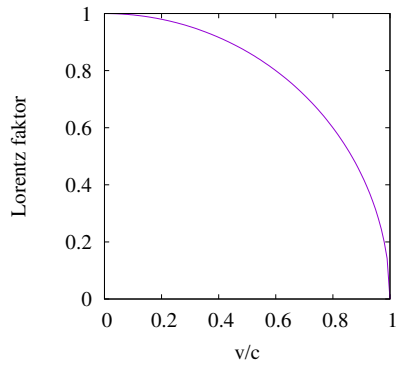
$$dt' = dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2. \tag{7}$$

Mivel a sajátidő pontosan definiált, ha más, nem földi megfigyelő szemével nézzük, akkor is ugyanaz lesz a bal oldal. Emiatt a

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \tag{8}$$

állandó, bármilyen rendszerből is nézzük.

- Általában megjelenik ez a $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (Lorentz-)faktor, hogyan is néz ki?



Valóban

$$y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},\ x = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = 1, \tag{9}$$

egy egységnyi sugaró kör! Példák:

v/c	y	1/y
0.1	0.995	1.005
0.5	0.866	1.155
0.9	0.436	2.294
0.99	0.14	7.089
0.999	0.044	22.366

- **Párhuzamos távolságok:** vonaton elhelyezünk egy ℓ' hosszú, menetirányú rudat, és egy fényjelet oda-vissza pattintunk. Ennek ideje

$$t'_{per} = \frac{2\ell'}{c}, \tag{10}$$

Ez a földi megfigyelő óráján

$$t_{per} = \frac{t_{per}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2\ell'}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{11}$$

hosszúnak látszik. Ugyanakkor közvetlenül a fényjelet figyelve a földi megfigyelő által mért periódusidő:

$$t_{per} = \frac{\ell}{c+v} + \frac{\ell}{c-v} = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{12}$$

A két képlet csak akkor van összhangban, ha

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \ell'. \tag{13}$$

Vagyis az álló megfigyelő rövidebbnek látja a vonaton levő rúd hosszát!

- Erre lehetett volna másik gondolatmenetet is alkalmazni: elindítunk egy jelet a rúd egyik végéről, és ugyanakkor a másik végén elindítunk egy stoppert, a fényjel beérkezésekor az eltelt idő a vonaton

$$t'_{be} = \frac{\ell'}{c}. \tag{14}$$

Ugyanezt a földön álló megfigyelő

$$t_{be} = \frac{\ell}{c-v} \tag{15}$$

idő alatt látja bekövetkezni. Ez láthatólag nem a fele a (12) kifejezésnek $\Rightarrow$ más hosszeltolódást kapunk!!

Mi az oka, hogy most más eredményt kaptunk? Hol a hiba $\Rightarrow$ *"ugyanakkor"!*

Mit jelent ez a szó, hogy két helyen ugyanakkor történnek az események? Nem magától értetődő, ezt is definiálnunk kell pontosan!!

- **Megfigyelők szinronizálása**: megfigyelőket ültetünk a tér minden pontjára, kezükben óra (Smith ügynökök, vagy megannyi Elrond úr). Ezeket az órákat *szinkronizálják*, hogy mind tudja, mikor is van egy adott időpont, amikor mondjuk a fényjelet indítania kell.

Hogyan csináljuk a szinkronizálást? Van egy központi megfigyelő, a főnök, aki az origóban ül. Nézzük a tőle ℓ távolságra ülő testvérét. Megállapodnak, hogy a főnök, amikor elindítja a saját óráját, rögtön egy jelet is indít a másik felé. A másik, amikor beérkezik hozzá a fényjel, tudja, hogy a főnök óráján ℓ/c az idő, így ő is onnan indítja az óráját. Vagyis ő beállítja az óráját ℓ/c időre, és vár, hogy beérkezzen

a fényjel, és mikor bejön, elindítja az órát. Emiatt minden Smith ügynök órája pontosan ugyanazt az időt fogja mutatni!

(Megjegyzés: nem is kell túl messze menni, a számítógépek memóriájának "lassúsága" azért van, mert a CPU-tól kb. 10cm-re vannak!)

Biztos ez? A földi Smith ügynökök elvégzik a szinkronizálást, és kíváncsian figyelik a vonaton ülő Smith ügynökök tevékenységét. Mit látnak? A vonaton ülő főnök elindítja a fényjelet, és az elmegy a társához. A társa ℓ távolságra van, a fényjel a vonathoz képest $c - v$ sebességgel megy, azaz

$$t_{be} = \frac{\ell}{c-v} = \frac{\ell'}{c-v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{16}$$

ha a vonatbeli távolsággal akarjuk kifejezni, ami az általunk mértnél hosszabb. A főnök órája ekkor

$$t'_{fonok} = t_{be}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\ell'}{c-v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{\ell'}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right) \tag{17}$$

időt mutat, hiszen a vonaton lassabban járnak az órák. Ugyanakkor a beosztott az óráját

$$t'_{beosztott} = \frac{\ell'}{c} \tag{18}$$

időpontról indítja a megbeszélés szerint! Ezek szerint a beosztott órája késik a főnök órájához viszonyítva, éppen

$$t'_{fonok} - t'_{beosztott} = \frac{\ell' v}{c^2} = \frac{\frac{\ell v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{19}$$

Ez azt jelenti, hogy az órák szinkronizálását elrontották!!

Ez a hiba megmarad: ha a mi óránk t időpontot mutat, vagyis a főnök órája

$$t'_{fonok} = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{20}$$

időpontot mutat, akkor a tőle ℓ távolságra ülő társa óráján

$$t' = t'_{fonok} - \frac{\frac{\ell v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{21}$$

az idő. Ezt átalakítva

$$t' = \frac{t\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{\ell v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{(\ell + vt)v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{22}$$

Észrevehetjük, hogy $x = \ell + vt$ pontosan a bosztott helye t idő múlva, hiszen a vonat v sebességgel halad. Ezért az x helyen levő beosztott óráján t idő múlva

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{23}$$

időpont lesz.

Ehhez még vegyük hozzá azt a már látott összefüggést, hogy az x helyen levő beosztott távolságát a főnök milyen messzinek látja:

$$x' = \frac{\ell}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{24}$$

Tehát az történik, hogy a vonaton ülő megfigyelők a teret és az időt is másként értelmezik: ami szerintünk x helyen történik t idő múlva, azt az ő rendszerük

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t-\frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{25}$$

helyen és időben levőnek látja!! Az első a távolságok elmérése, a második az időpontok elmérése mellett az órák rossz szinkronizálásának következménye! Ezt a kifejezést hívjuk *Lorentz-transzformációnak*.

- Igenám, de a vonaton ülő megfigyelő fordítva érvel! Számára mi mozgunk, $-v$ sebességgel. Például azt mondja, hogy szerinte mi mozgunk csigalassúsággal, és ezt bizonyítja is: a mi origónk előtt éppen elhúzó beosztott az órájára mutogat, és az órája tényleg gyorsabban jár, hiszen $x = 0$-t beírva

$$t'(x=0) = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{26}$$

De ez őrület, hiszen ez csak azért van (szerintünk), mert a vonaton ülők rosszul szinkronizálták az óráikat, és hiába mozognak csigalassúsággal, a rosszul szinkronizált órák egyszerűen többet mutatnak, mint kellene. Mert ugyanis az ő origójukról készült felvételeken (amiket a mi ügynökeink vettek fel akkor, amikor az ő origójuk elhaladt előttük) a főnök órája t idő múlva

$$t'(x=vt) = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{27}$$

időpontot mutat, azaz tényleg lassabban jár!

Az őrjítő az, hogy nem lehet eldönteni, kinek van igaza. Ha ugyanis kifejezzük t, x-et a t', x' segítségével a (25) képletből, ugyanolyan kifejezést kapunk

$$x = \frac{x'+vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{t'-\frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{28}$$

Sajnos el kell ismernünk, hogy ő ugyanolyan joggal tartja magát álló megfigyelőnek, mint mi, hiszen az ő rendszeréből a mi rendszerünk éppúgy torzult, mint a mi rendszerünkből az ő rendszere.

- **Sebességösszeadás**: most tekintsünk egy mozgó autót, amely a földön V sebességgel halad. Milyen gyorsnak látja ezt a vonaton ülő társaság?

Ennek az autónak a helye $x = Vt$, ezt beírva a (25) képletbe:

$$x' = \frac{(V-v)t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t\left(1-\frac{Vv}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{29}$$

azaz ő is egyenletes sebességűnek látja a mozgást, amelynek sebessége azonban

$$V' = \frac{x'}{t'} = \frac{V-v}{1-\frac{Vv}{c^2}}. \tag{30}$$

Ha például az autó fénysebességgel halad, azaz $V = c$, akkor a fenti képlet azt adja, hogy $V' = c$! Tehát tényleg konzisztens a leírás, a fénysebesség minden rendszerben fénysebességűnek látszik.

A fordított kifejezés ugyanilyen alakú, csak $v \to -v$, azaz

$$V = \frac{V' + v}{1 + \frac{V'v}{c^2}}. \tag{31}$$

Ez ismét a konzisztenciát mutatja.

Játsszunk el ezzel a képlettel: ha $V' = \varepsilon \ll v$, azaz a vonaton valaki nagyon lassan elkezd mozogni, akkor mi a sebességét első rendben

$$V = \frac{v + \varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon v}{c^2}} \approx v + \varepsilon \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{32}$$

nagyságúnak látjuk.

Ebből gyorsulást is kaphatunk: ha a vonat a saját rendszerében egy kis t' idő alatt ε-nal növelte a sebességét, akkor az általa mért gyorsulás

$$a' = \frac{\varepsilon}{t'} = \frac{V - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{a}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \tag{33}$$

ahol $a = (V - v)/t$ az általunk mért gyorsulás.

Például, ha a vonat gyorsulása állandó $a' = g$ a saját rendszerében (pl. egy állandó teljesítményű rakétát üzemeltet), akkor a mi rendszerünkben a sebességének növekedése

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}. \tag{34}$$

Ennek megoldása, ha $v(0) = 0$

$$gt = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}. \tag{35}$$

Vagyis kezdetben gt szerint nő a sebesség, de később lelassul a növekedés, és végül c-hez tart a sebesség.

Kifejezhetjük a megtett utat is

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right]. \tag{36}$$

Ez nem tananyag, de kifejezhetjük a sajátidőt is. Mivel

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = dx^2\left(\frac{c^2}{v^2} - 1\right) = \frac{c^2 dx^2}{g^2 t^2}, \tag{37}$$

azaz

$$d\tau = \frac{dx}{gt} = \frac{dx}{c\sqrt{\left(\frac{gx}{c^2} + 1\right)^2 - 1}}. \tag{38}$$

Vagyis a földi megfigyelő szerinti 0-tól L-ig terjedő út megtételéhez szükséges idő az utazó szempontjából

$$\tau = \int_0^L \frac{dx}{c\sqrt{\left(\frac{gx}{c^2} + 1\right)^2 - 1}}. \tag{39}$$

Új változó

$$\cosh u = \frac{gx}{c^2} + 1, \qquad du \sinh u = \frac{g}{c^2} dx. \tag{40}$$

Innen

$$\tau = \int_0^{\bar{u}} du = \frac{c}{g} \mathrm{arcosh}\left(1 + \frac{gL}{c^2}\right) = \frac{c}{g} \ln \left[1 + \frac{gL}{c^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{gL}{c^2}\right)^2 - 1}\right]. \tag{41}$$

Kis és nagy L-ekre ez

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{2gL}, & \text{ha } L \text{ kicsi} \\ \frac{c}{g} \ln \frac{2gL}{c^2}, & \text{ha } L \text{ nagy.} \end{cases} \tag{42}$$

Kis távolságok esetén a klasszikus kifejezést kapjuk, nagy távolságokra azonban csak logaritmikusan nő a sajátidő!

- **Dinamika**: gyorsítsunk egy testet a vonaton! Az erőmérő kitér, és mutat mondjuk 1N-t: ezt leolvashatjuk mi is! Tehát az erő nem függ a megfigyelő sebességétől.

  Ekkor a vonaton:

$$m_0 a' = F \tag{43}$$

  Newton egyenlet lesz igaz. Ezt a földi megfigyelő minek látja? A korábbiak szerint

$$m_0 \frac{a}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = F. \tag{44}$$

  Ezt teljes deriválttá alakíthatjuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F. \tag{45}$$

  Mivel az erő impulzusváltozást okoz, ezért a gyorsulásból azt a következtetést vonjuk le, hogy a test impulzusa

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{46}$$

  Mivel a test sebessége a gyorsulás pillanatában v (a vonat sebessége), ezért mi azt látjuk, hogy a test tömege:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > m_0. \tag{47}$$

  Tehát a földi megfigyelő mérése szerint a vonaton levő test tömege nagyobb, mint a vonaton levő megfigyelő szerint. A földi megfigyelő szerint emiatt nem tud a test c-re gyorsulni.

  Kiszámíthatjuk az energiaváltozást is. A teljesítmény (időegység alatti energiaváltozás) Fv, azaz

$$\frac{dE}{dt} = Fv = \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{48}$$

  Ez azt jelenti, hogy a test energiája

$$E = mc^2. \tag{49}$$

  Ez Einstein híres képlete!

  Megjegyezzük, hogy

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4 - m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4, \tag{50}$$

azaz

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}. \tag{51}$$

Nulla impulzus esetén

$$E(p = 0) = m_0c^2, \tag{52}$$

ez a test nyugalmi energiája – a tömeg megsemmisítésével ekkora energia szabadítható fel! Kis impulzusra

$$E \approx m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}, \tag{53}$$

a növekmény a klasszikus kinetikus (mozgási) energiája.

3 A gravitáció fizikája: az általános relativitáselmélet

A fénysebesség különböző koordinőtarendszerbeli állandóságának meglepő eredménye átformálta a Newtoni mechanika, és az amögött levő (Galilei-féle) téridő elképzelést. A különböző megfigyelők nem csak a teret, hanem az időt is másképpen koordinátázzák, a megfigyelők órái nemcsak másképp járnak, hanem még szinkronizálva sincsenek. Emiatt nincs abszolút idő, és nem beszélhetünk egyidejűségről: mindez csak egy adott megfigyelő számára jelentkezik.

Volt a XIX. század végefelé egy hasonlóan meglepő mérési eredmény, bár első pillantásra nem tűnt ellentmondásban levőnek a korábbi tapasztalatokkal. Ez *súlyos és tehetetlen tömeg* azonossága. Ha egy testre F erővel hatunk, annak gyorsulását a Newton-törvény alapján

$$F = ma \tag{54}$$

határozza meg. Az arányossági tényező a *tehetetlen tömeg.* A különböző erőhatások közül a gravitációs erő arányos a test "méretével", amely a tapasztalatok szerint szintén egy tömeg jellegű mennyiségből, a *súlyos tömegből* származik:

$$F_{grav} = \bar{m}g \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{m}MG}{4\pi r^2} \tag{55}$$

ahol g helyi gravitációs tér jellemzője, illetve G a Newton-állandó. Elvileg $\bar{m}$ és m nem kell, hogy azonos legyen, az arányossági tényező függhet a körülményektől, például az anyagi minőségtől.

A két tömeg ekvivalenciájához ellenőrizni kell az arányossági tényező anyagi minőség függetlenségét. Ehhez azt használhatjuk, hogy a Földön mérhető gravitációs erő valójában két erő eredője: a Föld tömegvonzása mellett a forgó Föld centrifugális ereje ($F_{cf} = m\omega^2 r$) is hat. A centrifugális erő valójában a forgó rendszer gyorsulása, ezért a centrifugális erő a tehetetlen tömeggel arányos, míg a Föld tömegvonzása a súlyos tömeggel. Ha az arányossági tényező anyagfüggő, akkor a Föld különböző erővel vonzza a különböző anyagi minőségű testeket, az erőkülönbség kimutatható. Az Eötvös Loránd által 1880-tól fejlesztett inga, amivel a föld felszíni gravitációs teret lehetett pontosan felmérni, alkalmas volt a két tömeg ekvivalenciájának meghatározására is (1908, kb. $\frac{m-\bar{m}}{m} < 10^{-9}$). Az egyik legpontosabb mai mérés a Satellite Test of the Equivalence Principle (STEP) űrben keringő különböző minőségű testek pályájának azonosságából $< 10^{-17}$.

Ha a két tömeg ennyire pontosan egyezik, akkor ez erősen arra utal, hogy a két effektus, azaz a gyorsulásból származó erő (inerciális erő) és a gravitációs erő ugyanolyan gyökerű (ekvivalencia-elv). Vagyis a gravitáció tulajdonképpen geometriai eredetű.

Például forgó test inerciális ereje, gyorsuló lift inerciális ereje. Kívül egyenes vonalú mozgás, belülről parabolának tűnik.

Két dimenziós példa: tekintsünk egy görbült felületet, és azon mozogjon egy test külső erőhatástól függetlenül. Milyen lesz a mozgása felülről nézve? Helyezzünk síkba valahol bele egy gömbsüveget. Gömbön az egyenes pályák a gömb főköreinek mentén mennek, ez oldalról nézve ellipszis: vagyis felülről nézve a síkon egyenes pályán megyünk, a gömbhöz érve egy ellipszis-szeletre váltunk, majd ismét egyenesen megyünk. A pálya tehát görbült, annak ellenére, hogy nem hatott külső erő. Magyarázat: a felületen tartás kényszererejének van síkbeli vetülete, azaz a pálya elgörbül.

Minél görbültebb a felület, annál jobban görbül a pálya is. Ezt 4D-s téridőre alkalmazva Einstein azt javasolta, hogy a téridő görbülete határozza meg a gravitációt, maga a téridő görbület pedig a tömegből (energiából) származik. Ez az Einstein-egyenlet (1915)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{56}$$

ahol R a görbületre jellemző mennyiség, g a geometris másik jellemzője (metrikus tenzor), T az anyag energia és impulzus nagyságát és áramlását leíró mennyiség (energia-impulzus tenzor). A görbület definíciója: zárt görbén körbeviszünk egy vektort, mennyit térül el – kapcsolatban van a háromszög szögeinek összegével. Az Einstein-egyenletek valójában a $g_{\mu\nu}$ helyi geometriai mutatóra vonatkoznak. Mi ennek a jelentése?

3.1 A tér és idő koordinátázása, ívhossz

Minden megfigyelő, aki a világot szemléli, valójában úgy működik, hogy szétküldi megfigyelőit a tér minden pontjába, akik kezükben órával a lokális környezetüket figyelik. Ezzel a fizika tér minden pontját az ügynök koordinátájával jellemezhetjük, míg az esemény időpontjáról az ügynök óráján látható időpont ad információt. Ilyen módon a teret és időt *koordinátázzuk*, a fizikai tér eseményeit $(t, \mathbf{x})$ adatokkal jellemezzük. Habár megpróbáljuk természetesen ezeket az ügynököket összehangolni, értelmes módon definiálva a távolságukat és értelmes módon szinkronizálva az óráikat, de, ahogy láttuk, ami az egyik rendszerben tökéletesen magától értetődő, a másik rendszerből nézve elrontott szinkronnak tűnhet.

Az inerciális megfigyelőket az jelöli ki, hogy számukra a fénysebesség állandó. Ennek következménye volt, ahogy láttuk, hogy egy vonatban utazó óra által mutatott $d\tau$ időtartam a külső rendszerben mért dt időnél kisebb lesz:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{57}$$

Ez alatt a kis idő alatt az megfigyelt óra helyzete megváltozott $dx = vdt$-vel. Innen a sebességet kiküszöbölve kapjuk

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2. \tag{58}$$

Azonban a vonaton utazó órát bármilyen sebességű másik rendszerből nézhetjük, ahol dt' az eltelt idő és v' a relatív sebesség; mivel ott is $v' = dx'/dt'$, ugyanezt a fenti összefüggést kapjuk. Tehát

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = \text{konstans}, \tag{59}$$

bármely rendszerből figyeljük is: azt szokták *ívhossznak* hívni. Speciálisan fényjelre $v = c$, azaz $ds = 0$, ez igaz bármely inerciális megfigyelő esetén.

Az elnevezést az indokolja, hogy egy koordinátarendszerben egy dx és dy szakaszok különbsége $dr^2 = dx^2 + dy^2$ hosszúságú szakaszt eredményez. Különböző koordinátarendszerekben dx és dy változhat, azonban a hossz ugyanaz marad. Speciálisan $dy = 0$ esetben $dx = dr$, de minden más koordinátarendszerben az x-vetület kisebb ennél.

Mit kapunk, ha a vonatban mozgó testet figyeljük? Ha a vonatban x' a koordináta, akkor az álló megfigyelő szerinti helyzete

$$x = x' + vt \quad \Rightarrow \quad dx = dx' + vdt \tag{60}$$

lesz a térben és időben közeli események térbeli távolsága. Ezt visszaírva kapjuk:

$$ds^2 = (1 - \frac{v^2}{c^2})c^2 dt^2 - 2\frac{v}{c}\, cdt\, dx' - dx'^2. \tag{61}$$

Ha ilyen furcsa koordinátázást választunk (azaz mi állunk, de a helyzetet a vonathoz képest mérjük), akkor a ds^2 kifejezése elbonyolódik, általános esetben

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + 2 g_{01} cdt\, dx + g_{11} dx^2. \tag{62}$$

Álló megfigyelő saját koordinátarendszerében tehát

$$g_{00} = 1, \qquad g_{01} = 0, \qquad g_{11} = -1, \tag{63}$$

míg ha a távolságokat egy mozgó rendszerből nézzük, akkor

$$g_{00} = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \qquad g_{01} = \frac{v}{c}, \qquad g_{11} = -1. \tag{64}$$

A g komponensek tehát a koordinátázástól függenek.

Mi ezeknek az együtthatóknak a jelentése? Ha a koordinátáinkban álló objektumot nézünk, azaz $dx = 0$, akkor két esemény közötti ívhossz:

$$ds^2 = g_{00} dt^2. \tag{65}$$

az eltelt idő. A bal oldal koordinátarendszer-független, ezért a különböző koordinátarendszerekben megfigyelt ugyanazon események különbségére

$$dt\sqrt{g_{00}} = ds = konstans. \tag{66}$$

Legyen most az A rendszer az, ahol áll a megfigyelt objektum, azaz $g_{00}^{(A)} = 1$, a B rendszer legyen az a koordinátarendszer, ahol az objektum v sebességgel mozog. Erre

$$dt_A = dt_B\sqrt{g_{00}} \;\rightarrow\; dt_B\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{67}$$

a speciális relativitáselméletv példáján. Abból a koordinátarendszerből nézve tehát, ahol az objektum mozog, az időtartamok hosszabbnak tűnnek, onnan nézve tehát a mozgó objektum órái lelassulnak. Vagyis g_{00} írja le az órák lelassulását.

A tér méréséhez ugyanúgy járunk el, mint korábban mondtuk. Fényjelet bocsátunk egy pontból a közeli, koordinátákban dx-szel beljebb levő helyre, onnan visszatükrözzük a jelet az eredeti pontba. Fényjel terjedése esetén $ds = 0$, ezt megoldhatjuk dt-re:

$$0 = g_{00}c^2dt^2 + 2g_{01}cdt\,dx + g_{11}dx^2. \tag{68}$$

Ez egy másodfokú egyenlet, a gyökei azt az időkülönbséget jelzik, amikor a fényjel a dx-szel beljebb levő pontba megérkezik: ez a különbség persze lehet pozitív vagy negatív is, annak megfelelően, hogy a fényjel oda megy, vagy onnan jön:

$$dt_\pm = \frac{dx}{c}\,\frac{-g_{01} \pm \sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{g_{00}}. \tag{69}$$

A 0-ból elindulás és oda visszaéerkezés között eltelt idő tehát

$$\delta t = dt_+ - dt_- = \frac{2dx}{c}\,\frac{\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{g_{00}}. \tag{70}$$

Hogy a különböző koordinátarendszereket össze tudjuk hasonlítani, fejezzük ezt ki az álló koordinátarendszerben mért δt_A időkülönbséggel. A (67) képlet alapján

$$\delta t_A = \frac{2dx}{c}\,\frac{\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{71}$$

A különböző koordinátarendszerek által ugyanazon rúd dx hosszára tehát a következő összefüggés igaz:

$$dx\sqrt{-g_{11} + \frac{g_{01}^2}{g_{00}}} = \frac{c\delta t_A}{2} = konstans. \tag{72}$$

Mivel a referencia álló rendszerünkben az együttható 1, ezért

$$dx_A = dx_B\sqrt{-g_{11} + \frac{g_{01}^2}{g_{00}}}, \tag{73}$$

vagyis ez a mennyiség írja le a távolságmérések arányát. Például ha álló rendszerből mérünk, ahol a bal oldal egyszerűen dx_A, és ha a rúd mozgó vonaton van, akkor

$$dx_A = \frac{dx_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{74}$$

Az órák szinkronizálása ugyanezzel a logikával megy. A dx távolság nulla időpontját a beérkező és visszapattanó jelek idejének közepe adja meg álló rendszerben. Ha $g_{01} \neq 0$, akkor a kibocsátó pont és a dx távolsággal beljebb levő pontok órája nem szinkronizált, az időkülönbség

$$\Delta t = \frac{dt_+ + dt_-}{2} = -\frac{dx}{c}\frac{g_{01}}{g_{00}}. \tag{75}$$

Az időkülönbséget abban a rendszerben kifejezve, ahol az óra áll:

$$\Delta t_A = -\frac{dx}{c}\frac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{76}$$

Az órák szinkronizálásának természetes eljárása tehát nem vezet szinkronizált rendszerhez, amennyiben $g_{01} \neq 0$ – ezt láttuk korábban is.

Ezzel tehát fényt derítettünk a g komponenseinek fizikai jelentésére: g_{00} felelős az idő lelassulásáért, g_{01} az órák szinkronizálásáért, g_{11} kombinálva a többiekkel a távolságok torzulásáért. Ha ezek a komponsnek állandók, mint a speciális relativitáselmélet esetén, akkor a teljes térben ugyanúgy történnek a transzformációk. Ha azonban g komponensei helyről helyre változnak, akkor mindenhol más az órák járása, mások a különböző távolságok; ha például a lokális rendszerből nézve azt gondoljuk, hogy egyenes vonalban haladunk, a külső megfigyelő (mivel a merőleges és párhuzamos távolságok másképp transzformálódnak), már görbe pályát lát!

3.2 Geometria a téridőben

Az Einstein-egyenletek megoldása szolgáltatja g komponenseit. A megoldással nem fogunk foglalkozni, az rendkívül bonyolult. Néhány speciális megoldás:

- **gyenge gravitációs tér**: ha kicsik a tömegek, akkor az álló megfigyelő metrikus tenzora közel van $(1, -1, -1, -1)$-hez. A módosulás

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, \tag{77}$$

  a gravitációs potenciál $U = m\varphi$. Nagyon heurisztikusan ez úgy érthető, hogy a klasszikus teljes energia

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + m\varphi = \text{konstans}, \tag{78}$$

  vagyis $v^2/2$ változása φ változását jelenti. Mozgó rendszerre áttérésnél v^2/c^2 kerül g_{00}-ba, ha ezt átkonvertáljuk konstans energiánál potenciális energiára, akkor ehelyett $-2\varphi/c^2$ írandó. A gravitációs potenciál értéke mindig negatív, ezért $g_{00} < 1$.

- **Schwarzschild megoldás** (1916): gömbszimmetrikus esetben azt találjuk, hogy

$$ds^2 = (1 - \frac{r_G}{r})c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G}{r}} - r^2 d\Omega. \tag{79}$$

  Az utolsó tag egyszerűen a sugárra merőleges geometria változatlanságát mutatja. A képletben szereplő r_G a Schwarzschild sugár

$$r_G = \frac{2MG}{c^2}. \tag{80}$$

  Ennek számértéke elég kicsi, mert c nagy, például a Föld tömege esetén kb 9 mm, a Nap esetén is csak mintegy 3 km. Érdekes, hogy a teljes Univerzum Schwarzschild sugara 13.7 milliárd fényév, megegyezik a korával években.

- **Kerr-Newman metrika:** forgó, elektromosan töltött gömszimmetrikus megoldás (Kerr 1963, Kerr-Newman 1965).

- nagyon sok egzotikus megoldás, lökéshullám (shock wave), leszakadó Univerzumok, féreglyukak, szingularitások (kozmikus cenzor), fehér lyukak...

Milyen jelenségeket figyelhetünk meg? Csináljuk Schwarzschild metrikában!

- g_{00} írja le az órák lassulását, ahogy láttuk. Emiatt egy r távolságban levő óra által mutatott dt_A időtartam és a végtelen távoli megfigyelő által mért dt időtartam viszonya:

$$dt_A = dt\sqrt{1 - \frac{r_G}{r}} < dt, \tag{81}$$

azaz a gravitációs térbe helyezett órák lassabban járnak. Átfogalmazva: ha egy óra elindul a gravitáció központja felé, állandó $dt_A = 1$ mp közönként ugrik, akkor messziről figyelve az ugrások közötti időkülönbség

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_G}{r}}} \text{ mp}. \tag{82}$$

Frekvenciákra átváltva: egy rezgés periódusideje t_{per}, akkor a körfrekvenciája $\omega = 2\pi/t_{per}$. Az r távolságban elhelyezett rezgés alapfrekvenciája $\omega_A = 2\pi/dt_A$, végtelen távolról figyelve

$$\omega = \omega_A\sqrt{1 - \frac{r_G}{r}} \tag{83}$$

frekvenciájúnak látszik, azaz $\omega < \omega_A$. A fény kisebb frekvenciájúnak, vörösebbnek látszik: ez a gravitációs vöröseltolódás jelensége.

Ez összhangban van azzal, hogy ha a foton elindul egy gravitáló test felszínéről, energiát veszít. Mivel azonban nem tudja a sebességét csökkenteni, energiáját csakis a frekvenciája csökkentésével csökkentheti ($E = \hbar\omega$, majd látjuk).

Ki is lehet mérni, mert atomi átmenetek nagyon érzékenyek a pontos frekvenciára: már két emelet magasságban is eltolódnak, ezt Mössbauer spektroszkópiával lehet kimutatni (Pound-Rebka, 1959, Harvard épületében).

- távolságok korrekciója: mivel most $g_{01} = 0$, az órák szinkronizálhatók, és a távolságmérések korrekcióját $\sqrt{-g_{11}}$ adja meg:

$$d\ell_A = \frac{d\ell}{\sqrt{1 - \frac{r_G}{r}}} > d\ell. \tag{84}$$

A radiális távolságok messziről nézve tehát kisebbnek tűnnek.

Egy egyenes vonalban haladó test tehát sugárirányban haladva a központhoz közelebbinek látszik $\Rightarrow$ görbült pálya, a csillag vonzza a testet. Mivel ez geometriai effektus, a fényt ugyanúgy "vonzza" mint az anyagi testeket $\Rightarrow$ fényelhajlás, Einstein kereszt.

- eseményhorizont: a Schwarzschild megoldásnak van egy furcsa tulajdonsága, $r = r_G$-nél nullává válik g_{00} és végtelenné g_{11}. Ezt a sugarat *eseményhorizontnak* hívjuk. Itt:
  - az órák megállni látszanak, az állandó frenkvenciájú fényforrás jele nullává válik $\Rightarrow$ semmilyen jel nem érkezik vissza $r = r_G$-ből $\Rightarrow$ fekete lyuk.
  - mennyi idő alatt jutunk el az eseményhorizontig? Tegyük fel, hogy $ds^2 = c^2d\tau^2$ jelölés esetén dr-et folyamatosan csökkentjük $dr = -vd\tau$ módon, ekkor

$$c^2d\tau^2 = (1 - \frac{r_G}{r})c^2dt^2 - \frac{v^2d\tau^2}{1 - \frac{r_G}{r}} \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{\sqrt{1 - \frac{r_G}{r} + \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{r_G}{r}}\frac{dr}{v}, \tag{85}$$

ami szinguláris integrálhoz vezet, ha $r = r_G$. Ugyanakkor az együttmozgó megfigyelő szerint $v = 0$, és csak egy integrálható, gyökös szingularitást kapunk.

Vagyis a végtelen messze ülő megfigyelő szerint végtelen idő alatt ér a test az eseményhorizontig, de a test szerint véges idő alatt átmegy rajta.

– A végtelen távoli megfigyelő számára tehát csak az eseményhorizontig terjed a világ, odáig megfordíthatók a mozgások $\Rightarrow$ az eseményhorzint belsejéből nem érkezhet információ!

  Emiatt a fekete lyukba bármi is esett be, nem változtathat a fekete lyuk fizikai tulajdonságain (no hair theorem).

– Egy M tömegű bolygó R sugarú feszínéről a szökési sebesség

$$\frac{1}{2}mv_{sz}^2 = \frac{mMG}{R}. \tag{86}$$

  Ha a szökési sebesség c, nem lehet elszökni a bolygó felszínéről, az ehhez tartozó méret

$$R = \frac{2MG}{c^2} \tag{87}$$

  a Schwarzschild sugár.

– Mi történik a fekete lyuk belsejében? g_{00} és g_{11} is negatívvá válik. Azonban az időirány a ds^2 pozitív együtthatós tagja $\Rightarrow$ tér és idő szerepet cserél – mi a tér és mi az idő?

  $r = 0$-ban valódi szingularitás van, minden megfigyelő szerint: "világ vége".

- Hol vannak fekete lyukak? Csillagfejlődés, galaxismagok, mini fekete lyukak, Hawking sugárzás.

4 Kvantummechanika

A XX. század elején több megmagyarázhatatlan jelenség:

- fekete test sugárzás
- vonalas színkép, emisszió és abszorpció
- fotoeffektus
- röntgen sugárzás spektruma

illetve később az ezekhez hasonló, tervezett kísérletek:

- Compton-szórás
- párkeltés
- kis intenzitású interferencia

Mik ezek a kísérletek? Egy részük a fénnyel kapcsolatos, úgyhogy röviden a fény elektromágneses természetéről néhány szó.

4.1 A fény mint elektromágneses hullám

Elektromágnesség $\Rightarrow$ Maxwell-egyenletek (Maxwell, Faraday, Hertz).

A legfontosabb, hogy mezőkkel dolgozik, azaz $\boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ függvényekkel, a tér és idő minden pontjához hozzárendel egy vektort. Az elektromos jelenségekért az elektromos tér $\boldsymbol{E}(t, \mathbf{x})$, a mágneses jelenségekért a mágneses indukció mező $\boldsymbol{B}(t, \mathbf{x})$ felelős. Ezek képesek erőhatást kifejteni: a Lorentz-erő

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \tag{88}$$

ahol q a test töltése, $\boldsymbol{v}$ pedig a sebessége. A mágneses erőhatás merőleges a sebességre, ezért nincs járuléka a teljesítményhez ($P = \boldsymbol{v}\boldsymbol{F}$).

Az elektromos és mágneses terek forrásai az töltések, és azok mozgása. A Maxwell-egyenletek adják meg azt, hogy a töltések és az áramok hogyan vezetnek az elektromos és mágneses terekhez, a Maxwell-egyenletek megoldásával foglalkozik az elektrodinamika. A mi számunkra, csakúgy, mint az Einstein-egyenleteknél, nem fontos a megoldások pontos menete, csak az, hogy létezik megfelelő egyenlet.

A Maxwell-egyenletek sajátossága, hogy létezik olyan megoldás, amely a forrásoktól függetlenül is életképes: ezek az elektromágneses hullámok. Az elektromágneses hullámok létezése a Maxwell-egyenletek következménye, kísérleti kimutatásuk Hertz nevéhez fűződik. Ő azt is kiderítette, hogy a fény valójában elektromágneses sugárzás. (az Einstein-egyenletekenek is van ilyen megoldásuk: ezek a gravitációs hullámok $\Rightarrow$ gravitációs hullámok felfedezése). Elektromágneses hullámokat kelteni is lehet, a gyorsuló töltés az elektromos hullámok forrása.

Az elektromágneses sugárzások szuperponálhatók, azaz két sugárzás nem hat egymásra (a gravitációs hullámoknál nem ez a helyzet!). Ezért minden sugárzás felépíthető elemi sugárzások összegeként. Az elemi sugárzás a monokromatikus síkhullám megoldás:

$$\boldsymbol{E}(t,x) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{B}(t,x) = \boldsymbol{B}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}). \tag{89}$$

Az ilyen megoldásokban $\boldsymbol{E}$ ugyanazt az értéket veszi fel, ha

$$\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{k}_\perp + \hat{\boldsymbol{k}}\frac{2\pi n}{k}, \tag{90}$$

ahol $\boldsymbol{k}_\perp \perp \boldsymbol{k}$, c tetszőleges szám, $\hat{\boldsymbol{k}}$ a $\boldsymbol{k}$ irányú egységvektor, $n \in \boldsymbol{N}$. Ezek egymással párhuzamos síkok seregét írják le, amelyek merőlegesek $\boldsymbol{k}$-ra, és távolságuk

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{91}$$

Nézzük azt a síkot, amely $t = 0$-ban $\boldsymbol{x} = 0$-n megy át. Ezen az $\boldsymbol{E}$ nagysága $\boldsymbol{E}_0$. Ha t idő múlva nézem, akkor az a sík, ahol $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0$ eltolódik $\boldsymbol{k}$ irányában:

$$\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = c\boldsymbol{k}_\perp + \hat{\boldsymbol{k}}\frac{\omega}{k}t. \tag{92}$$

A sík eltolódásának sebessége tehát

$$c = \frac{\omega}{k}, \tag{93}$$

ez a fénysebesség.

A Maxwell-egyenletek meghatározzák a $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ és $\boldsymbol{k}$ vektook viszonyát. Eszerint

$$\boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{B}_0 = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}_0. \tag{94}$$

Az elektromágneses hullám által szállított energia sűrűsége, illetve az energia áramlás sűrűsége

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2, \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c\mu_0}\hat{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{E}^2. \tag{95}$$

Ezek fluktuáló mennyiségek, de átlagolhatjuk egy periódusra

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}_0^2, \qquad \boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{k}}cw. \tag{96}$$

Az elektromágneses hullámoknak impulzusa is van, az impulzussűrűség egy periódusra vett átlaga

$$\boldsymbol{p} = \hat{\boldsymbol{k}}\frac{w}{c}. \tag{97}$$

Több elektromágneses hullám összegeként leírhatók a gömbhullámok, amelyek egy pontszerű forrás által kibocsátott sugárzást írják le:

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}_0 \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}, \qquad \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}_0 \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}. \tag{98}$$

Ezekben a hullámokban az azonos fázisú pontok gömböket alkotnak, amelyek c sebességgel távolodnak a középponttól. $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ és $\hat{\boldsymbol{r}}$ (az r irányú egységvektor) viszonya:

$$\boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{B}_0 = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{E}_0. \tag{99}$$

A gömbhullám energiasűrűsége $1/r^2$-esen csökken, azaz minden gömbfelületen ugyanakkora energia megy át.

A síkhullámok illetve gömbhullámok végtelen nagy objektumok. Praktikusan a hullámok hullámcsomagba rendeződnek, ezek többféle frekvencia keverékét tartalmazzák.

Ha egy síkhullám útjába pontszerű lyukakat vagy vékony réseket tartalmazó ernyőt teszünk, akkor interferenciát figyelhetünk meg. Távoli ernyőn az elektromos tér nagysága

$$E_{tot} = E_0(\cos(\omega t - k\ell) + \cos(\omega t - k(\ell + d\sin\theta))), \tag{100}$$

ahol θ a megfigyelési szög. Olyan helyeken, ahol $kd\sin\theta = 2n\pi$, ott a két elektromos tér erősíti egymást, $E_{tot} = 2E$ az energiasűrűség tehát *négyszeres* lesz $w_{tot} = 4w$. Olyan helyeken, ahol $kd\sin\theta = (2n+1)\pi$, ott $E_{tot} = 0$, a két hullám kioltja egymást. A vártnál nagyobb erősítés, és a kioltás, amely periodikusan követi egymást tipikus interferenciajelenségek.

Ha egy síkhullám útjába elektromosan aktív (polarizálható) anyag kerül, akkor annak elektronjait a hullám megmozgatja, a gyorsuló töltések pedig sugároznak, gömbhullámot bocsátanak ki: ez az elektromos hullámok *szórása*. A szórt elektromos hullám frekvenciája megegyezik a rezgő elektronok frekvenciájájával, amely pedig megegyezik a beeső hullám frekvenciájával: a szórt hullám tehát ugyanolyan színű, mint a beeső hullám. A különböző hullámok szórásának erőssége frekvenciafüggő lehet, tipikusan $\sim \omega^4$ (mert az elektromos tér a gyorsulással arányos, az energiasűrűség pedig $\sim E^2$). Emiatt a kék fény jobban szóródik $\Rightarrow$ égi jelenségek.

Ha egy dobozba bezárunk elektromágneses hullámokat (üregrezonátor, mikrohullámú sütő), akkor olyan hullámok valósulhatnak meg, amelyekre a térerősség a határon 0. Ezek állóhullámok, amelyek elektromos tere egy adott irányban

$$E \sim \cos\omega t \sin k_x x. \tag{101}$$

Ha $E(x=0) = E(x=a) = 0$, azaz a határon nincs térerősség, akkor

$$k_x = \frac{n\pi}{a}. \tag{102}$$

A k_x és $k_x + dk_x$ intervallumban levő állapotok száma

$$dn_x = \frac{a}{\pi}dk_x = \frac{a}{\pi}d\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2a}{\lambda^2}d\lambda. \tag{103}$$

Ha x, y és z irányban is megszorítjuk a hullámokat, akkor a megfelelő tartományban levő állapotok száma (itt csak egész hullámokat engedünk megvalósulni)

$$dn = \frac{a}{2\pi}dk_x\,\frac{b}{2\pi}dk_y\,\frac{c}{2\pi}dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3}d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3}4\pi k^2 dk = \frac{V}{(2\pi)^3}4\pi\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda = \frac{4\pi V}{\lambda^4}d\lambda. \tag{104}$$

Mivel kétfajta polarizációnk van, az ebben a tartományban levő állapotok száma

$$dn = \frac{8\pi V}{\lambda^4}d\lambda. \tag{105}$$

Ha a dobozon kis lyukat fúrunk, kijön a sugárzás. Az adott felületen időegységenként kiáramló energia cw-vel arányos, de figyelembe kell vennünk, hogy a fele sugárzás befelé irányul, a kifelé menő sugárzásnál pedig mindenféle szögben jönnek a hullámok, azaz az adott irányú vetületre

$$\langle\cos\theta\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\cos\theta = \frac{1}{2} \tag{106}$$

jut. Összesen tehát a kiáramló energia λ és $\lambda + d\lambda$ tartományban

$$dE_{ki} = A\frac{c}{4}dw = A\frac{c}{4}\frac{1}{V}\langle E\rangle\, dn, \tag{107}$$

ahol A a lyuk nagysága. Klasszikusan minden szabdsági fokra részecskék esetén $k_BT/2$ energia jut, fény esetén ez az érték k_BT, azaz a kijutó fényintenzitás:

$$\frac{dE_{ki}}{A} = I(\lambda) = k_BT\frac{2\pi c}{\lambda^4}d\lambda. \tag{108}$$

Sajnos a teljes kisugárzott energia, amely a fenti formula összege (integrálja) minden λ-ra, végtelen eredményt ad!

4.1.1 A fény nem-hullám tulajdonságaira utaló kísérletek

A fekete test sugárzásának mérése: nem egyezik a klasszikus elvárásokkal!

Ráadásul: ha minden szabadsági fokra k_BT energia jut, akkor n szabadsági fok esetén a teljes energia nk_BT, vagyis a fajhő nk_B $\Rightarrow$ végtelen szabadsági fok esetén a fajhő végtelen, nem lehet a test hőmérsékletét megváltoztatni (Rayleigh-Jeans instabilitás, ultraibolya katasztrófa).

Max Planck 1900: tegyük fel, hogy az elektromágneses sugárzás kibocsátása nem folytonos, hanem egységekben (kvantumokban) történik (Nobel díj 1918). Panck még azt gondolta, hogy az elektromágneses mező és az etomok kölcsönhatása történik ilyen adagokban, később kiderült (Einstein, fotoeffektus, 1921 Nobel díj, l. később).

A statisztikus fizika szerint egy E energiájú állapot elérése $\sim e^{-E/k_BT}$ valószínűséggel történik meg: l. barometrikus magasságformula $\varrho(h) = \varrho_0 e^{-mgh/k_BT}$. Ha egy kvantumnak E_0 energiája van, akkor n kvantumnak nE_0 az energiája, ennek megvalósulási valószínűsége $\sim e^{-nE_0/k_BT}$. Az arányossági tényező onnan következik, hogy a teljes valószínűség 1:

$$P_n = \frac{1}{Z}e^{-nE_0/k_BT} \quad \Rightarrow \quad 1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nE_0/k_BT} \quad \Rightarrow \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nE_0/k_BT}. \tag{109}$$

Mivel egy geometriai sor összegéről van szó, az összegzést el tudjuk végezni:

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-E_0/k_BT}}. \tag{110}$$

Az átlagenergia tehát

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (nE_0)P_n = -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}Z, \tag{111}$$

ha $\beta = 1/k_BT$. Tehát

$$\langle E \rangle = -(1 - e^{-E_0/k_BT})\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{1 - e^{-E_0/k_BT}} = \frac{E_0}{1 - e^{-E_0/k_BT}}. \tag{112}$$

Nagy hőmérsékleten $\langle E \rangle = k_BT$, ahogy klasszikusan várjuk, kis hőmérsékleten azonban megváltozik az átlagenergia. Ennek következtében a fekete test sugárzási törvény formája

$$I(\lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4}\frac{E_0}{e^{E_0/k_BT} - 1}d\lambda. \tag{113}$$

A mérési eredményekkel összehasonlítva kifogástalan egyezést találunk, ha a fénykvantum nagysága

$$E_0 = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega, \tag{114}$$

ahol $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js, vagy $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Js a Planck-konstans. Felhasználva, hogy $\nu = c/\lambda$, kapjuk

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT} - 1}\,d\lambda. \tag{115}$$

A teljes kibocsátott intenzitáshoz fel kell összegeznünk (integrálnunk kell) minden λ-ra. Ez az integrál véges marad

$$I = \sigma T^4, \qquad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3}, \tag{116}$$

egyezésben a kísérletekkel (Stefan-Boltzmann törtvény) – tulajdonképpen innen lehet h értékét meghatározni.

A Planck-formula nagyon pontos – háttérsugárzás ($\sim$ 3 K), Nap felszíni hőmérséklete $\sim$ 5778 K $\Rightarrow$ spektrum definiál egy hőmérsékletet, pl. izzók "hőmérséklete".

4.1.2 A fotoeffektus

Vákuumcső: nem vezet, de ha elég nagy feszültséget kacsolunk rá, megindul az áram. Ez a feszültség fémeknél általában $\Phi = 2 - 6$ V (kilépési munka vagy kilépési potenciál). Elektron felfedezése ebből az eszközből származik.

Másik kísérlet: fénnyel megvilágított fémfelületről elektronok lépnek ki (fotoeffektus, Hertz 1887). Árammérővel lehet az elektronokat megmérni, ellenfeszültséggel le lehet lassítani, amíg nincs áram. Az elektronok töltése $e = 1.609 \cdot 10^{-19}$ C, így ha az ellenfeszültség V, akkor az eletronok míg átérnek a feszültségen, eV energiát veszítenek – mértékegység: egy elektron energiamegváltozása, ha 1V-on halad keresztül 1 eV = $1.609 \cdot 10^{-19}$ J. A maximális mozgási energia tehát azzal a feszültséggel mérhető, ahol megszűnik az áram

$$K_{max} = eV. \tag{117}$$

A fényt klasszikus hullámnak gondolva: az elektronok a fémben egy energiagáttal vannak kötve. A fény beérkezésekor az elektromos tér gyorsítja ez elektronokat, amíg ki nem lépnek a fémből. A maximális energiának a fény intenzitásának növelésével növekedni kell. Ugyanakkor a fény frekvenciája nem befolyásolhatja jelentősen a kibocsátott elektronok energiáját. Az elektronoknak a kilépéshez össze kell gyűjteniük a kilépéshez szükséges energiát, ez eltart egy ideig (kiszámítható a fény intenzitásából, a fény eresztmetszetéből, és a kilépési munkából, tipikusan néhány másodperc).

A kísérletek tanúsága szerint ugyanakkor a maximális energia csak a fény frekvenciájától függ, az intenzitással csak az áram nagysága változik. Kis frekvencián egyáltalán nincs fotoeffektus (levágási frekvencia). Az áram ugyanakkor azonnal megindul, nincs időkésés.

Einstein 1905: a jelenség megmagyrázható, ha a fény kizárólag $h\nu$ kvantumokban képes terjedni! Ekkor egy elektront egy fotonnal hat kölcsön, amely átadja neki az energiáját, és ezzel kilép a fémből. A küszöbfrekvencia az $e\Phi = h\nu$ képletből számítható, ahol h a Planck állandó – jól egyezik a mérésekkel.

A kísérlet jelentősége: Einstein bebizonyította, hogy a kvantumos természet nem egy atom és a fény kölcsönhatásának sajátossága, hanem a fénynek magának. A fénynek van legkisebb egysége, a *foton*, amely $h\nu$ energiát szállít c sebességgel, azaz a teljesítményáram $S = ch\nu$, az impulzusa $p = h\nu/c = h/\lambda$. Ha az intenzitás kisebb, mint S, akkor csak időnként jönnek kvantumok – pl. halvány csillagok megfigyelésénél. Ha nagy az intenzitás, sok foton van jelen – állapota? l. később.

4.1.3 Compton effektus

Ha ez igaz, akkor a fény szóródásánál, amikor változik a szórt fény energiája, valójában a fény frekvenciája kell megváltozzon!

A fény részecske E energiával és p impulzussal, álló részecskének ütközik, amelynek m tömege van, a végállapotban a részecske E_1 energiájú, p_1 impulzusú, φ szögben távozik, a foton E' energiájú, p' impulzusú és θ szögben távozik. Energia és az impulzus függőleges és vízszintes vetületének megmaradása:

$$\begin{aligned} E + mc^2 &= E' + E_1 \\ p_1 \sin\varphi &= p' \sin\theta \\ p &= p_1 \cos\varphi + p' \cos\theta. \end{aligned} \tag{118}$$

Ehhez hozzá kell venni, hogy $p = E/c$, $p' = E'/c$, valamint $E_1^2 = p_1^2c^2 + m^2c^4$. Emiatt a fentiek átírhatók:

$$\begin{aligned} E + mc^2 &= E' + \sqrt{m^2c^4 + p_1^2c^2} \\ p_1 c \sin\varphi &= E' \sin\theta \\ E &= p_1 c \cos\varphi + E' \cos\theta. \end{aligned} \tag{119}$$

A második kifejezést felhasználva

$$p_1^2c^2\cos^2\varphi = p_1^2c^2(1 - \sin^2\varphi) = p_1^2c^2(1 - \frac{E'^2}{p_1^2c^2}\sin^2\theta) = p_1^2c^2 - E'^2 + E'^2\cos^2\theta. \tag{120}$$

Ugyanez a harmadik egyenletből

$$p_1^2c^2\cos^2\varphi = (E - E'\cos\theta)^2 = E^2 - 2EE'\cos\theta + E'^2\cos^2\theta. \tag{121}$$

Ezért

$$p_1^2c^2 = E^2 + E'^2 - 2EE'\cos\theta. \tag{122}$$

Ezt összevetjük az első egyenletből származó kifejezéssel:

$$m^2c^4 + p_1^2c^2 = (E + mc^2 - E')^2 = (E - E')^2 + 2(E - E')mc^2 + m^2c^4 \quad \Rightarrow \quad p_1^2c^2 = (E - E')^2 + 2(E - E')mc^2. \tag{123}$$

Végül azt kapjuk:

$$-2EE' + 2(E - E')mc^2 = -2EE'\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{mc^2}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \quad \Rightarrow \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta). \tag{124}$$

Innen tehát azt várjuk, hogy a szórt fény hullámhossza, ezzel együtt a frekvenciája megváltozzon, ellentétben a klasszikus jóslattal. A kvantumosságra jellemző hullámhossz $\lambda_C = h/(mc)$ a Compton-hullámhossz.

Compton 1923-ban elvégezte a kísérletet, és valóban a fenti összefüggést találta, ebből is meghatározható h értéke. 1927-ben Nobel-díjat kapott.

4.1.4 Egy fotonos interferencia

Akkor a fény részecskékből áll? Nem teljesen: egy foton is tud interferenciajelenségeket mutatni. Nyalábosztóval két részre bontva a fénysugarat, az optikai úthosszakkal játszva elérhető, hogy a nyalábokat újra egyesítve interferáljanak.

Az intenzitást csökkentve csak egy foton tartózkodik a rendszerben, de meg lehet nézni, hol vannak a beütések. A beütések helye továbbra is interferenciát mutat, pedig egy részecske vagy az egyik, vagy a másik úton kellene, hogy menjen.

Még érdekesebb: ha megmérjük, hogy a fény az egyik pályán haladt-e el, akkor megszűnik az interferencia, még akkor is, ha a foton a másik útvonalat választotta! Ha tehát tudjuk, merre ment a foton, akkor valóban úgy viselkedik, mint aki részecske, ha nem tudjuk (nem mérjük meg), akkor hullámként viselkedik.

Ez a mérés a kvantummechanika nagy paradoxonára mutat rá: a méréssel a hullám-természet interferenciáját elrontjuk (dekohererencia).

4.1.5 További mérések fotonokkal

- Elektronokkal bombázott fémfelület: K a beeső elektron kinetikus energiája, a maximális kilépő foton energiája is ennyi, azaz a maximális frekvencia $\nu_{max} = K/h$ (fékezési sugárzás).
- párkeltés: ha a foton energiája meghaladja $2mc^2$-et, akkor két m tömegű részecskét kelthet – két részecske a töltésmegmaradás miatt, antirészecskék, l. később. Impulzusmegmaradás miatt egy fotonból nem lehet két részecske, de atom elektromos terében már megfigyelhető ez a jelenség.
- fotonok és atomok kölcsönhatása: l. a következő fejezetet.

4.2 Az anyag hullámtermészete

A fény bizonyos körülmények között hullám, más körülmények között részecske tuljdonságokat mutat – vajon a részecske természetűnek látszó anyag nem mutat hullámjelenségeket?

A fotonra igaz volt: $p = h/\lambda = \hbar k$ a hullámhossz (hullámszám) és az impulzus közötti relációra. De Broglie (1924): tegyük fel, hogy igaz ez az anyagra is:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \tag{125}$$

Mekkora ez a hullámhossz? $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js, $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Js nagyon kis érték, vagyis egy 1kg tömegű, 1 m/s-mal haladó test, amelynek impulzusa 1 kg m/s a hullámhossz $\lambda = h/p = 6.626 \cdot 10^{-34}$ m, messze túl van a kimutatható határon. Ugyanakkor elektronra, amely 100 V feszültségen gyorsult fel. Nemrelativisztikus közelítésben:

$$E = eV = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}} = 1.22 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} = 0.122\,\mathrm{nm}, \tag{126}$$

ez a röntgensugárzás hullámhosszának nagyságrendjébe esik (a röntgensugárzás hullámhossza $\lambda \sim 0.1 - 0.5$ nm = 1-5 Å). Mivel a kristályrácsok atomtávolsága is Ånagyságrendű, ezért a röntgensugárzás a kristályrácson eltérül, interferenciajelenséget mutat. Amennyiben az elektron valóban hullámtermészetű, akkor egy kristályon áthaladva ugyanolyan interferenciajelenségeket kell mutatnia, mint a röntgensugárzásnak.

1926 Davisson és Germer, 1927 G.P. Thomson végzett el ilyen kísérleteket $\Rightarrow$ az elektronok valóban interferenciaképet mutatnak! Ugyanúgy, ahogy a fotonokra egyetlen elektron is interferál (önmagával), azonban ha megtudjuk, merre is haladt pontosan, az interferencia megszűnik.

Optikai rendszer felbontása, azaz amilyen távolságban levő tárgyakat még különállónak mutatja, $\sim \lambda$, a fény hullámhossza. Ha az elektron is hullám, ugyanilyen optikai eszközökat lehet vele készíteni $\Rightarrow$ elektronmikroszkóp, részecskegyorsítók.

Relativisztikus viszonyok esetén

$$E = mc^2 + eV = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{c}\sqrt{(mc^2 + eV)^2 - m^2c^4} \tag{127}$$

Az elektron tömegét akkor érjük el, ha

$$V = \frac{mc^2}{e} = 511\,kV \tag{128}$$

feszültségen gyorsítjuk az elektronokat. Feszültségen gyorsított töltött részecskék esetén szokták használni az *elektronvolt* energiaegységet:

$$1eV = e \cdot 1V = 1.609 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \tag{129}$$

egységet. Ebben az energiegységben számolva

$$m_e = 511\,\frac{\mathrm{keV}}{c^2}. \tag{130}$$

Egy $U \gg 500$ kV feszültségen gyorsított elektronnál elhanyagolható a nyugalmi tömeg. Ekkor

$$p \approx \frac{eV}{c} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{eV}. \tag{131}$$

Ezen képlet alapján egy 1MV feszültségen gyorsított elektron hulámhossza

$$1\,\mathrm{MV} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.2 \cdot 10^{-12} m = 1.2\,\mathrm{fm}. \tag{132}$$

Ez az atommag méretének nagyságrendje $\Rightarrow$ Rutherford felfedezhette az atommagot (1909, 5 MeV-os eletronokat használt).

A legkisebb felbontóképességet a legnagyobb energiás részecskékkel érhető el: 14 TeV = $1.4 \cdot 10^{13}$ eV-os részecskéket állítanak elő a CERN LHC gyorsítójában

$$20\,TeV \quad \Rightarrow \quad \lambda = 8.8 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{m}, \tag{133}$$

ez a ma elérhető legjobb felbontás $\Rightarrow$ az anyag szerkezetét ilyen skáláig ismerhetjük meg.

4.2.1 Határozatlansági reláció

Egy adott imulzusú elektron tehát pontosan olyan, mint egy monokromatikus síkhullám, azaz "mindenhol" van. Megcsinálhatjuk azt, hogy sok hullámot összetéve kis helyre szorítjuk be az elektront, ehhez azonban a sok hullámhosszt, azaz sok imoulzust kell összetenni. Valójában a hullám térbeli alakjához tartozik egy impulzustérbeli eloszlás. Ha valós hullámokról van szó

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\Psi(\mathbf{p})\sin(\frac{\mathbf{px}}{h} + \phi_{\mathbf{p}}), \tag{134}$$

amit Fourier-transzformációnak nevezünk. Ha a térbeli helyzet éles, akkor az impulzustérben széles eloszlást kapunk, és viszont. A fenti integrál Gauss-függvényekre elvégezhető:

$$\Psi(x) \sim e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \Rightarrow \quad \Psi(\mathbf{p}) \sim e^{-\frac{1}{2}\frac{p^2\sigma^2}{h^2}}. \tag{135}$$

A hely-eloszlás szélessége $\Delta x \sim \sigma$, az impulzus eloszlás szélessége $\Delta p \sim h/\sigma$, azaz a kettő szorzatából kiesik σ. Tehát az elektron helye és impulzusa nem mérhető tetszőlegesen pontosan egyszerre – csakúgy, mint a fotonok esetén. Megfelelően definiálva a szélességeket, és minden esetet figyelembe véve adódik

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{136}$$

a *Heisenberg-féle határozatlansági reláció.*

4.2.2 Energia bizonytalansága és virtuális részecskék

Hasonló reláció írható fel a frekvencia és a mérési hossz között: ha egy hullámot Δt ideig figyelünk, akkor a frekvenciáját $\Delta\nu \sim 1/\Delta t$ pontossággal tudjuk megadni. Mivel az energia $E = h\nu$, így egy véges pontosságú méréssel csak véges pontossággal tudjuk meghatározni az energia értékét. Pontosítva:

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{137}$$

Mi történik, ha egy hullám csupán τ ideig él, utána elbomlik? Ekkor időben nem lehet tiszta oszcilláló függvény, hiszen az végtelen kiterjedésű! A hullám szükségképpen különféle frekvenciák keverékéből áll, vagyis az energiája fizikailag nem meghatározott!

Következmény: egy rendszer energiája rövid távon nem meghatározott, pl. a vákuumtól "kölcsön lehet venni" energiát, minél rövidebb időre kérjük, annál nagyobbat. Vagyis rövid időtartamot tekintve a vákuumban mindenféle részecske megjelenhet (virtuális részecskék). Ennek mérhető következménye van: például egy részecske töltését mérve a virtuális részecskék leárnyékolják a töltést $\Rightarrow$ sérül a Coulomb törvény. Ha az elektromos potenciált helyfüggő töltéssel írjuk fel, akkor

$$U = \frac{e(r)}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \Rightarrow \quad e^2(r) = \frac{e_0^2}{1 - \log(1 + a^2/r^2)}. \tag{138}$$

A töltés nagy távolságokon mérve konstans ($e(r \gg a) \approx e_0$), a távolságok csökkentésével egyre nagyobb töltés látunk, hiszen egyre kevesebb az árnyékoló töltés. Érdekes módon, ha $r < a/\sqrt{e-1}$, akkor a töltés értéke végtelen nagy lesz, ez a Landau-pólus. Ennél kisebb távolságokon az elektromosság elmélete nem lehet helyes.

Másik alkalmazás: Hawking sugárzás.

4.2.3 Hullámfüggvény és mérés

Ha egy elektront figyelünk, akkor az csak egyetlen helyre csapódik be. Azaz a hullámtermészetét leíró hullámfüggvény nem közvetlenül vezet az interferenciához. Értelmezés: a hullámfüggvény *komplex értékű*, és annak abszolút értéke adja meg az elektron *megtalálási valószínűségsűrűségét.* Ez azt jelenti, hogy ha a hullámfüggvény $\Psi(\mathbf{x}, t)$, akkor annak a valószínűsége, hogy $\mathbf{x}$ körül egy kis $d^3\mathbf{x}$ térfogatelemben mérve az elektron ott lesz,

$$dP = d^3\mathbf{x}|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2. \tag{139}$$

Teljes valószínűség 1:

$$1 = \int d^3\mathbf{x}|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2. \tag{140}$$

Mérés után beugrik a sajátállapotba $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$-ből folytatódik az időfejlődés. Következmény: mérés során elromlik az interferencia két utas kísérlet esetén.

Nehéz kérdés: valószínűségi értelmezés, ezez elvetjük a determinisztikus mozgásegyenletek világát?? Filozófiai gondolatok.

Dekoherencia; hogy lehet, ha a mérőberendezés maga is kvantumos jellegű?

4.2.4 A hullámfüggvény időfejlődése, Schrödinger egyenlet

Ha az elektront $\Psi(t, \mathbf{x})$ hullámfüggvény írja le, akkor hogyan változik ez időben? $\Rightarrow$ Schrödinger egyenlet:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(p \to \frac{-i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x}, x)\Psi \tag{141}$$

parciális differenciálegyenlet írja le. H a Hamilton-függvény, azaz az energia kifejezése. Egy részecske, amelyik 1D-ban mozog, és $V(x)$ potenciálban van:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad \Rightarrow \quad i\frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\Psi(t, x). \tag{142}$$

A feladat megoldásához tegyük fel, hogy az időfüggés

$$\Psi(t, x) = \psi(x)e^{-iEt} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi = E\psi. \tag{143}$$

Az legegyszerűbb esetben V egy $[0, L]$ tartományon nulla, azon kívül végtelen $\Rightarrow$ bezárjuk a részecskét egy térfogatba, kívül nincs hulámfüggvény. A hullámfüggvény folytonossága miatt $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Ekkor

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi = E\psi, \qquad \psi(0) = \psi(L) = 0, \tag{144}$$

azaz

$$\psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi, \qquad \psi(0) = \psi(L) = 0. \tag{145}$$

Ennek megoldása, azt is figyelembe véve, hogy $\psi(0) = 0$

$$\psi(x) = C\sin(kx), \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \tag{146}$$

ahol C valamilyen normálási faktor, amely azt biztosítja, hogy a teljes megtalálási valószínűség 1 legyen. Ez a megoldás tiszta harmonikus hullám, bezárva egy térfogatba, amelynek hullámhosszára igaz a de Broglie összefüggés $h/\lambda = \sqrt{2mE} = p$.

A $\psi(L) = 0$ akkor teljesül, ha

$$k = \frac{\pi}{L}n, \qquad n \in \boldsymbol{N}. \tag{147}$$

Emiatt az energia nem lehet tetszőleges!

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}n^2. \tag{148}$$

Fontos tanulság: a rendszerben az energia nem lehet tetszőleges – pont ugyanúgy, mint egy üregrezonátorban sem lehet bármilyen frekvenciájú elekromágneses sugárzás. Az energiaszintek kvantáltak. Az elektron állapotai állóhullámok.

Harmonikus oszcillátor esetén, amelynek sajátfrekvenciája ω_0

$$E_n = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2}). \tag{149}$$

4.2.5 A Schrödinger egyenlet megoldásainak általános jellemzői

Anélkül, hogy megoldanánk a Scrödinger egyenletet, bizonyos tulajdonságait meg tudjuk érteni:

- A kötött állapotok energiaszintjei kvantáltak $\Rightarrow$ atomok stabilitása, vonalas színkép, abszorpció és emisszió, színes molekulák, ESR, NMR, stb.
- A hullámfüggvény ott is nem nulla értéket vehet fel, ahol klasszikusan nem juthatna el $\Rightarrow$ alagúteffektus, áramvezetés, pásztázó elektronmikroszkóp, U-bomlás, kémiai átalakulások, stb.
- összefonódottság: interferencia miatt az erősítési helyeken nagyobb a megtalálási valószínűség, mint az összeg alapján várnánk $\Rightarrow$ Bell-egyenlőtlenségek, kvantum számítógépek