A kvantummechanika speciális fejezetei

Jakovác Antal

2013 – utolsó javítás: April 24, 2017

Contents

1 Előszó **3**

2 A kvantumelmélet felépítése **3**
2.1 Mérés a kvantumelméletben . . . 5
2.2 Tér és idő a kvantumelméletben . . . 5
2.3 Kvantummechanikai leírás, hullámfüggvény . . . 7
2.4 Energia sajátértékek és a propagátor . . . 8
2.5 A propagátor mátrixelemeinek analitikus struktúrája végtelen térfogatban . . . 10
2.6 Spektrál függvények eltolás invariáns esetben . . . 15
2.6.1 Egyetlen szabad részecske példája . . . 16
2.6.2 Két részecske rendszer . . . 17
2.7 Perturbációszámítás . . . 17
2.8 Pályaintegrál reprezentáció . . . 18

3 Több részecske rendszerek **20**
3.1 Megkülönböztethetetlenség és Gibbs paradoxon . . . 20
3.2 Összefonódottság és mérés: Bell egyenlőtlenségek . . . 21

4 Részecskék eredete és az 1D húr kvantálása **24**
4.1 Kiegészítés: harmonikus oszcillátor . . . 28
4.2 A húr kvantumai . . . 29
4.3 Egyéb állapotok . . . 30
4.3.1 Tér sajátállapot . . . 30
4.3.2 Gerjesztett húr . . . 30
4.3.3 Pontrészecske . . . 32
4.4 Időfüggés . . . 32

5 Részecskék **33**
5.1 Térelméletek kvantálása . . . 33
5.2 A spin-statisztika tétel . . . 34
5.3 (Bi) spinor mezők . . . 35
5.4 Lorentz-vektormezők, mértékelméletek . . . 36

6 A Hamilton operátor diagonalizálása **38**
6.1 A kvantált húr időfüggése . . . 40

7 Anyag és sugárzás kölcsönhatása **41**
7.1 Átmenet atomi nívók között . . . 43
7.2 Az atomi energiaszintek és a sugárzás állapotainak hibridizációja, Wigner-Weisskopf-modell . . . 45

8 Részecske definíciók változó körülmények között **47**
8.1 Időfüggő tömegtag . . . 47
8.2 Unruh sugárzás . . . 49

9 Parametrikus rezonancia **54**
9.1 Stabilitás analízis . . . 55
9.2 Részecskekeltés . . . 57
9.3 Kozmológiai alkalmazás . . . 57

10 Schwinger effects and related staff **58**

A Klasszikus térelméletek **59**
A.1 Lagrange-sűrűség . . . 59
A.2 Mozgásegyenletek . . . 60
A.3 Megmaradó áramok . . . 60
A.4 Szimmetria és megmaradás . . . 60
A.5 Energia-impulzus tenzor . . . 62

B Relativisztikus térelméletek **63**
B.1 Relativitáselmélet ismétlés . . . 63
B.1.1 Szimmetria . . . 63
B.1.2 Példák Lorentz-transzformációkra . . . 64
B.1.3 Csoport-szerkezet . . . 64
B.1.4 Relativisztikus mechanika . . . 65
B.2 Lorentz-csoport ábrázolása mezőkön . . . 65

C Megjegyzések **68**

1 Előszó

Ez a jegyzet a kvantummechanika speciális fejezetei illetve a sugárzás és anyag kölcsönhatása témákban kiírt speci anyaga. Elsődleges célja az, hogy a kvantummechanikai alapismeretekre támaszkodva, elsősorban a térelméletet szem előtt tartva vizsgáljunk meg néhány alkalmazási területet. A kvantummechanika valójában az a speciális kvantum rendszer, ahol a részecskeszám minden (akár közbülső) állapotban rögzített. Amikor ezen túl akarunk lépni, nagyon sok koncepcionális nehézséggel találjuk magunkat szemben: mi a részecske, mi a mérés, a kölcsönhatás.

Hozzá kell tennünk, hogy a kvantumelmélet de még a kvantummechanika sem tekinthető lezárt területnek. A témával foglalkozó fizikusok is eltérő nézeteket vallanak például a mérés, hullámfüggvény redukció, dekoherencia kérdéséről.

A célunk, hogy kölcsönható kvantum rendszereket írjuk le, amelyek képesek a relativisztikus invarianciát is tükrözni. Kölcsönhatás alatt azonban sokmindet érthetünk

- időben állandó külső potenciál: a kvantummechanikában az egyedül megengedett kölcsönhatás, hiszen ezzel megmarad a részecskeszám. Relativitáselméletben négyespotenciált kell alkalmaznunk, más szóval egy klasszikus (azaz nem kvantumos, előre megadott értékű) mezőt.

- kvantumos köcsönhatások: részecske keltés és eltüntetést is lehetséges. Ekkor már a részecskéket is kvantum mezőként kell leírni, ez vezet a kvantumtérelmélethez. A relativitáselmélet miatt kvantummechanikában is automatikusan sokrészecske rendszerünk van, még vákuumban is (l. Dirac tenger), emiatt a rögzített klasszikus mezőkkel való kölcsönhatás is igen sok érdekes jelenséghez vezethet (Klein paradoxon, részecskekeltés).

- relativisztikus illetve sokrészecske rendszerek: a teljes kvantumos megfogalmazásban a kölcsönhatás is kvantált. Valójában nincs arra bizonyítás, hogy így "kell" csinálni, azonban a kauzalitás és relativisztikus invariancia egyszerre legegyszerűbben úgy realizálható, ha lokális kölcsönhatásaink vannak, és a kölcsönhatás is terjed a térben.

Ebben a félévben a fő hangsúly a kvantummechanika-szerű elméletek leírásán lesz, ami azonban részecskeszám változáshoz is vezethet.

2 A kvantumelmélet felépítése

Nézzük meg most röviden, milyen is a kvantumelmélet felépítése, olyan fogalmakkal, amelyek megfelelőek lesznek majd a későbbi, nem szigorúan részecskékre alapozott kvantumelmélet számára is. A következőkben a $\hbar = 1$ egységrendszert fogjuk használni.

Valójában a kvantumelmélet és a klasszikus elméletek abban különböznek, hogy az előbbi szétválasztja az állapotot és a mérést.

A klasszikus mechanikában egy állapotot mérési eredményekkel jellemzi. Például egy szabad részecskét a helyével és a sebességével (impulzusával) jellemzi. Így alakul ki a fázistér, amely fogalmat a több részecske rendszerekre és így tetszőleges testre ki lehet terjeszteni. Minden fizikai mennyiséget valamilyen módon ki kell fejezni a fázistér változóival, és akkor ezeknek is határozott számértékük lesz a rendszer tetszőleges állapotában. Hasonló módon a mezőt egy adott pontban jelemzett valós szám(ok)kal, a mező értékével lehet megadni, s a mérhető mennyiségeket a mező értékével kell kifejezni.

A kvantumelméletben szétválasztjuk a két fogalmat: az állapotot egy absztrakt tér, az állapottér elemének tekintjük. A kvantumelméletben az állapottér egy $\mathcal{H}$ komplex Hilbert tér (azaz egy olyan komplex vektortér, ahol értelmezett egy skalárszorzat $\langle .|. \rangle$, és az abból származó $||.||$ normára a vektortér teljes) egységnyi normájú elemei $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, ahol $\langle \psi|\psi\rangle = 1$. Szokás a teljes Hilbert-teret állapottérnek tekinteni, ekkor megfogalmazhatunk egy ekvivalenciarelációt, mely szerint két egymással arányos ($|\psi\rangle = c\,|\xi\rangle\ c \in \mathbf{R}$) elem ugyanazt a fizikai állapotot jelenti (sugárábrázolás). A Hilbert téren a $|\psi\rangle$ állapothoz tartozó projektor $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$. Ezen projektorokon mint bázison értelmezhető egy algebra (egyéb tulajdonságokkal kibővítve egy C* algebra), ami fizikailag a sűrűségmátrixok tere; ez tekinthető az állapottér kiterjesztésének. Mi azonban nem megyünk el eddig: számunkra az állapotok tere Hilbert-tér lesz.

Minden fizikai behatás megváltoztatja az állapotot, vagyis valamilyen $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ leképezést jelent. Elvárjuk, hogy a leképzett Hilbert tér az eredetivel izomorf legyen: ez akkor teljesülhet, ha a U leképzés lineáris[1], és egységnyi normájú állapotot egységnyi normájú állapotba képez

$$1 = |U\,|\psi\rangle\,|^2 = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle\,, \qquad \forall\,|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad U^\dagger U = 1. \tag{1}$$

Emiatt a fizikai behatást csakis unitér (antiunitér) operátor írhat le. A linearitás miatt a hatásnál a zárójelet elhagyjuk

$$|\psi\rangle' = U\,|\psi\rangle\,. \tag{2}$$

Értelmezhetjük a fizikai behatást (transzformációt) az $A\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátorokon is a következőképpen

$$A' = U^\dagger A U. \tag{3}$$

Ez esetben ugyanis

$$\langle\psi|A'|\eta\rangle = \langle\psi'|A|\eta'\rangle\,. \tag{4}$$

Fontos speciális esetet jelentenek azok a transzformációk, azaz unitér operátorok, amelyek egy (vagy több) valós paramétertől függnek $U(c)$, és csoportot alkotnak. A Lie csoportoknák feltételezzük a folytonosságot is (azaz $\forall\varepsilon > 0\ \exists U'$, hogy $||U^{-1}U'|| < \varepsilon$ valamilyen megfelelő normában), valamint feltehetjük, hogy a paraméterezés is folytonos. Egy paraméteres csoport pl. az állapot eltolása, vagy adott tengely körüli elforgatása, több paraméteres csoport az általános forgatás. A csoport tulajdonság azt jelenti, hogy $\forall\, c_1, c_2$ paraméterre $\exists c_3$ paraméter, hogy $U(c_1)U(c_2) = U(c_3)$. Ezeknek a csoportoknak a standard paraméterezése a következő feltételezésekből indul ki:

- $U(0) = 1$ legyen
- a folytonosság miatt $U(dc)$ infinitezimálisan kis paraméterre az egység körül lesz:

  $$U(dc) = 1 - iT dc + \mathcal{O}(dc^2), \tag{5}$$

  T neve (infinitezimális) generátor. Az unitaritás miatt

  $$U^\dagger = 1 + iT^\dagger dc = U^{-1} = 1 + iT dc \quad \Rightarrow \quad T^\dagger = T, \tag{6}$$

  a generátor hermitikus.
- $U(dc)^n$ a csoport eleme, ennek paraméterét *definiálom* $c = ndc$-nak. Átírva $dc = c/n$, azaz

  $$U(c) = \left(1 - \frac{iTc}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-iTc} \tag{7}$$

  Ezt a relációt úgy is szokták írni, hogy

  $$T = i\frac{\partial U(c)}{\partial c}\bigg|_{c=0}. \tag{8}$$

- Több (d) paraméter esetén nem mindegy, milyen úton érek el $(c_1, \ldots, c_d)$-ig. A szokásos eljárás, hogy az egyenes utat választom: ha az egységelem körül

  $$U(dc_a) = 1 - iT_a c_a + \mathcal{O}(c^2) \quad \Rightarrow \quad U(dc_a)^n \equiv U(ndc_a). \tag{9}$$

  Innen $n \to \infty$ esetén

  $$U(c_a) = e^{-iT_a c_a}. \tag{10}$$

Infinitezimális trf. hatására a hullámfüggvény ill. az operátorok trf-ja:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle' &= U(dc)\,|\psi\rangle = (1 - iT\partial c)\,|\psi\rangle = |\psi\rangle - iT\,|\psi\rangle\,dc, \\ A' &= U^\dagger(dc)\,A\,U(dc) = (1 + iT\partial c)A(1 - iT\partial c) = A + i[T, A]dc, \end{aligned} \tag{11}$$

azaz

$$d\,|\Psi\rangle = -iT\,|\Psi\rangle\,dc, \qquad \text{illetve} \qquad d\hat{O} = i[T, \hat{O}]dc. \tag{12}$$

[1] Lehet antilineáris is, azaz $U(c\,|\psi\rangle) = c^* U\,|\psi\rangle$. Másik megjegyzés: a linearitást olykor kétségbe vonják; azonban eddig konzisztens kvantum leírást csak lineáris operátorokkal lehetett megvalósítani.

2.1 Mérés a kvantumelméletben

Habár egy rendszerrel csak egyetlen dolog történhet, az állapota valahogyan transzformálódik, mégis beszélhetünk egy speciális transzformációról, ez a *mérés*. A mérés olyan behatás, amely szinte változatlanul hagyja a rendszert, azaz egy infinitezimális transzformáció kell legyen. A mérés során az ilyen minimális befolyás során bekövetkező változásokat figyeljük, erősítjük fel, vagyis tulajdonképpen a generátor hatását vizsgáljuk. A transzformáció generátorát ezért mérési operátornak nevezzük.

Általában is igaz, hogy bármilyen transzformáció esetén létezik olyan állapot, amely csupán egy fázisfaktorral transzformálódik, nevezetesen a generátor sajátállapotai ilyenek. Ha

$$T\left|\xi_a\right\rangle = \lambda_a \left|\xi_a\right\rangle \quad \Rightarrow \quad U\left|\xi_a\right\rangle = e^{-iTc}\left|\xi_a\right\rangle = e^{-i\lambda_a c}\left|\xi_a\right\rangle . \tag{13}$$

A sajátértékek halmazát az operátor *spektrumának* nevezzük. Mivel a generátor hermitikus, sajátértékei valósak $\lambda_a^* = \lambda_a$. A projektor felbontás szerint T bármely függvénye kifejezhető mint

$$f(T) = \sum_a f(\lambda_a)\left|\xi_a\right\rangle\left\langle\xi_a\right| , \tag{14}$$

például

$$1 = \sum_a \left|\xi_a\right\rangle\left\langle\xi_a\right| , \qquad T = \sum_a \lambda_a \left|\xi_a\right\rangle\left\langle\xi_a\right| . \tag{15}$$

A sajátállapotokra hatva a mérési operátor helyettesíthető egy számmal: logikus tehát azt mondani, hogy $\left|\xi_a\right\rangle$ állapotban a *mérés értéke* λ_a. Mivel a lehetséges sajátértékek halmaza (az operátor spektruma) sokszor diszkrét, ekkor a mérésnek csak bizonyos meghatározott értékei lehetnek.

Ha a rendszer $\left|\psi\right\rangle$ állapota nem sajátállapot, akkor nem kapunk határozott értéket a mérésre. Itt egy olyan elvet kell alkalmaznunk, amely nem következik az előzőekből, ez a kvantumelmélet *mérési posztulátuma*. Az állapotot felbonthatjuk a mérés sajátállapotai szerint $\left|\psi\right\rangle = \sum_a v_a \left|\xi_a\right\rangle$, ahol a kifejtési együtthatók általában komplexek $v_a \in \mathbf{C}$. A mérési posztulátum szerint $p_a = \left|v_a\right|^2$ annak a valószínűsége, hogy a $\left|\xi_a\right\rangle$-hoz tartozó mérési eredményt, λ_a-t kapjuk a mérés eredményeként. Ez konzisztens azzal, hogy a teljes valószínűség

$$\sum_a p_a = \sum_a \left\langle\psi|\xi_a\right\rangle\left\langle\xi_a|\psi\right\rangle = \left\langle\psi|\psi\right\rangle = 1. \tag{16}$$

A mérés várható értéke ebben az állapotban

$$\left\langle T\right\rangle_{\left|\psi\right\rangle} = \sum_a \lambda_a p_a = \left\langle \psi \middle| \left[\sum_a \lambda_a \left|\xi_a\right\rangle\left\langle\xi_a\right|\right] \middle| \psi \right\rangle = \left\langle\psi|T|\psi\right\rangle . \tag{17}$$

Mindez elfogadható és megérthető; azonban van a mérési posztulátumnak egy olyan, kísérletileg igazolható kitétele, hogy a mérés után a rendszer sajátállapotába kerül. Ez azt mondja, hogy a mérés nem része a kvantumos világnak, ami elég nehezen érthető, hiszen a mérőberendezés részei is a kvantumelméletnek kell, hogy engedelmeskedjenek. Nincsen konszenzus a fizikusok között arról, mit is kell pontosan gondolni a mérés alatt. De két dolgot állíthatunk biztosan. Az egyik, hogy a mérés megszünteti a kvantumelmélet belső logikáját, a mért objektum új, véletlenszerűen megválasztott kezdőállapotból folytatja az életét: ez a *dekoherencia* jelensége. A másik az, hogy a mérőberendezés sokrészecske kvantum rendszer, úgyhogy ha a kvantumelmélet magyarázatot akar adni a méréselmélet kérdéseire, akkor a sokrészecske rendszereket kell tanulmányoznia. Valójában itt sok, a mérési problémával analóg kérdéssel találkozunk, például a *spontán sértéssel* vagy a *termalizációval*. Később még visszatérünk bizonyos mértékig ezekre a kérdésekre.

2.2 Tér és idő a kvantumelméletben

A kvantumelméletet úgy építettük fel, hogy közben sem térről, sem időről egy szót sem ejtettünk, míg a klasszikus elmélet felépítésének legelső elemei voltak. A kvantumelméletbe való beillesztésük a transzformációk és mérések értelmezésével lehetségesek.

Az idő egy egy paraméteres inherens transzformációja a rendszerünknek, azaz változtatja a rendszer állapotát. Ezért tartozik hozzá egy unitér operátor, az időfejlesztés operátora $U(t)$. Ezen operátor generátorát jelöljük H-val, neve Hamilton operátor. Ekkor írhatjuk

$$U(t) = e^{-iHt}, \qquad |\psi, t\rangle = e^{-iHt} |\psi\rangle , \qquad A(t) = e^{iHt} A\, e^{-iHt}. \tag{18}$$

Kis időlépés esetén az infitezimális transzformáció alakjából

$$\frac{d |\psi\rangle}{dt} = -iH |\psi\rangle , \tag{19}$$

ezt nevezzük Schrödinger-egyenletnek. Az operátorokra pedig azt kapjuk, hogy

$$\frac{dA}{dt} = i[H, A]. \tag{20}$$

Láthatóan az időfejlődés Schrödinger egyenlete nem külön egyenlet, csupán annak a kifejezése, hogy létezik időfejlesztő operátor.

A tér esetében definiálhatunk egy helymérő operátort, $\hat{q}$, valamint egy hely-eltolás operátort $\hat{p}$. A kettő viszonyára a tér fizikai értelmezéséből az következik, hogy ha a teret eltoljuk dx-szel, akkor minden helymérés dx-szel mutat többet, azaz $d\hat{q} = dx$. Tehát

$$d\hat{q} = i[\hat{p}, \hat{q}]dx = dx \quad \Rightarrow \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i. \tag{21}$$

Ez a Heisenberg-féle kvantálási reláció. Láthatóan ez a kifejezés sem különálló követelmény, csupán annak a kifejeződése, hogy a tér és a téreltolás egymással meghatározott kapcsolatban áll. Mivel itt nem használtunk ki semmit a tér reprezentációjáról, ez a megkötés általános koordináták esetén is igaz kell maradjon. A konkrét fizikai rendszerekben ezek az operátorok "bázist" képeznek a fizikai megfigyelhető operátorok között, azaz minden megfigyelhető mennyiség $\hat{q}$ és $\hat{p}$ hermitikus függvénye. Ekkor a fenti kvantálási feltétel rögzíti bármely két megfigyelhető mennyiség kommutátorát.

Ha meg akarjuk tudni, milyen is a kifejezése H-nak és p-nek, akkor a következő gondolatmenetet követhetjük. Egy transzformáció során lehetnek megmaradó mennyiségek, amelyek nem változtatják értéküket a transzformáció során. Ezekre tehát $dA = i[T, A]d\lambda = 0$, vagyis

$$[T, A] = 0. \tag{22}$$

Egy operátort biztosan találunk a megmaradó operátorok között: ez maga a generátor T, hiszen $[T, T] = 0$ mindig igaz. Vagyis ha a generátort akarjuk megtalálni, akkor a transzformáció során megmaradó mennyiségekre kell koncentrálni. Ha a transzformációhoz természetes módon tartozik egy megmaradó mennyiség, akkor azt azonosíthatjuk a transzformáció generátorával. Azaz

$$\text{trf. generátora} \equiv \text{trf. során megmaradó mennyiség.}$$

Az időeltoláshoz természetes módon tartozik az energia megmaradása (l. klasszikus mechanika, vagy a térelmélet Noether-tétele). Ezért a fenti azonosítással azt mondhatjuk

$$\text{időeltolás generátora (Hamilton-operátor)} \equiv \text{energia.}$$

Hasonló módon a téreltoláshoz természetes módon tartozik az impulzus megmaradása (l. klasszikus mechanika, vagy a térelmélet Noether-tétele). Ezért a fenti azonosítás azt mondja

$$\text{téreltolás generátora} \equiv \text{impulzus.}$$

Mindez persze a klasszikus mechanikában is érvényes, és ott igen sok rendszerre már meghatároztuk annak Hamilton-függvényének függését a helytől és az impulzustól. Hogy a klasszikus mechanikát képesek legyünk leírni, a megfigyelhető mennyiségek $\hat{q}$ és $\hat{p}$-vel való kifejezése meg kell egyezzen a klasszikus képlettel, azonban rendezési bizonytalanságok lehetnek. Tartsuk azonban észben, hogy a klasszikus mechanika képletei a teljes kvantum rendszernek csak közelítései, ezért a kvantum Hamilton operátorba a klasszikusan nulla tagok tetszőleges együtthatóval hozzáadhatók.

2.3 Kvantummechanikai leírás, hullámfüggvény

A kvantummechanika az a kvantumelmélet, ahol egy részecske térbeli pozíciójának $\hat{q}$ mérési operátora és a téreltolás (impulzus) $\hat{p}$ operátora az a "bázis", amelyek szerint minden más operátor kifejezhető. A kvantummechanika nem teljes, mert mezők nem szerepelhetnek benne: például az elektromos tér mérési operátora nem eleme a fent definiált operátorseregnek.

A kvantummechanikában az állapotokat leggyakrabban a pozíció mérés operátor sajátállapotainak bázisában fejtik ki. Ez a *hullámfüggvény*:

$$\hat{q}\,|x\rangle = x\,|x\rangle \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = \langle x|\psi\rangle\,. \tag{23}$$

Általában feltesszük, hogy a helymérés folytonos spektrummal rendelkezik, azaz $x \in \mathbf{R}$. A hely sajátállapot hullámfüggvénye

$$\langle x|x_0\rangle = \delta(x - x_0) \tag{24}$$

nem normálható állapot.

A helymérés operátorának hatása a hullámfüggvényen

$$|\psi'\rangle = \hat{q}\,|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \psi'(x) = \langle x|\hat{q}|\psi\rangle = x\,\langle x|\psi\rangle = x\psi(x). \tag{25}$$

A helymérés tehát a hely sajátértékkel való szorzással reprezentálható.

Hogy az impulzus hatását megtaláljuk végezzük el a következő deriválást

$$\frac{d}{da}e^{i\hat{p}a}\hat{q}e^{-i\hat{p}a} = ie^{i\hat{p}a}\hat{p}\hat{q}e^{-i\hat{p}a} - ie^{i\hat{p}a}\hat{q}\hat{p}e^{-i\hat{p}a} = 1. \tag{26}$$

Ezen felül $a = 0$-nál $e^{i\hat{p}a}\hat{q}e^{-i\hat{p}a}|_{a=0} = \hat{q}$, emiatt

$$e^{i\hat{p}a}\hat{q}e^{-i\hat{p}a} = \hat{q} + a. \tag{27}$$

Ezt alkalmazva egy hely sajátállapotra

$$\hat{q}e^{-i\hat{p}a}\,|x\rangle = e^{-i\hat{p}a}(\hat{q} + a)\,|x\rangle = (x + a)e^{-i\hat{p}a}\,|x\rangle \quad \Rightarrow \quad e^{-i\hat{p}a}\,|x\rangle = |x + a\rangle\,, \tag{28}$$

az eltolt sajátvektort adja. Emiatt aztán

$$\langle x|e^{i\hat{p}a}|\psi\rangle = \langle x + a|\psi\rangle = \psi(x + a). \tag{29}$$

Ezt sorba fejtve, és az a szerinti rendeket megfeleltetve egymsának láthatjuk, hogy

$$\langle x|(i\hat{p})^n|\psi\rangle = \partial_x^n\psi(x). \tag{30}$$

Ez az egyenlet azt jelenti, hogy maga $i\hat{p}$ reprezentálható mint deriválás

$$i\hat{p} \quad \Rightarrow \quad \partial. \tag{31}$$

Megjegyezzük, hogy ha $\hat{p}$ sajátállapotai $|p\rangle$-k, akkor

$$\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle \quad \Rightarrow \quad -i\partial_x\,\langle x|p\rangle = p\,\langle x|p\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle x|p\rangle = e^{ipx}. \tag{32}$$

Ez a sajátállapot sem normálható. Ebben a bázisban $\hat{p}$ írható fel úgy, mint szorzásoperátor, és a helymérés lesz $i\partial_p$. Az impulzus "hullámfüggvény" és a hely hullámfüggvény egymáshoz való viszonya

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \int dx\,\langle p|x\rangle\,\langle x|\psi\rangle = \int dx e^{-ipx}\psi(x), \tag{33}$$

Fourier transzformáció.

Ezek után minden operátor, ami $\hat{q}$ és $\hat{p}$ függvénye mint differenciáloperátor írható fel, amely x és $-i\partial_x$ függvénye. A Schrödinger-egyenlet alakja tehát

$$(i\partial_t - H(-i\partial, x))\psi(t, x) = i\psi_0(x)\delta(t). \tag{34}$$

2.4 Energia sajátértékek és a propagátor

A kvantummechanika központi feladata az adott rendszer Hamilton operátora sajátértékeinek meghatározása, azaz a lehetséges energiaszintek megadása, valamint az energia sajátállapotok hulámfüggvényének meghatározása. Az általános kvantumelméletben ezeket a mennyiségeket olyan fogalmakkal cseréljük fel, amely nem kötődik közvetlenül a hely reprezentációhoz. A hullámfügvény helyett a propagátort, az energiaszintek megadása helyett az azok sűrűségét megadó spektrál operátort/függvényt használjuk, az energia sajátállapotokat (ha erre szükségünk van) a sajátállapotokra vetítő projektorokkal kezeljük. Ebben a fejezetben ezeket a fogalmakat vezetjük be, és mutatunk rá a használatára.

A Schrödinger egyenlet lineáris parciális differenciálegyenlet, azaz megoldható a Green-függvény technikával. A megoldandó egyenlet

$$(i\partial_t - \hat{H})\,|\psi\rangle = 0, \qquad \& \qquad |\psi, t_0\rangle = |\psi_0\rangle\,. \tag{35}$$

Ennek megoldása

$$|\psi, t\rangle = \varrho(t)\,|\psi_0\rangle\,, \qquad \text{ahol} \quad \varrho(t) = e^{-i\hat{H}t} \tag{36}$$

időfejlesztő operátor. Az időfejlesztő operátorra igaz egyenlet

$$(i\partial_t - \hat{H})\varrho(t) = 0 \qquad \varrho(0) = 1. \tag{37}$$

Milyen az időfejlesztő operátor Fourier transzformáltja? Ehhez írjuk fel az időfejlesztő operátort a sajátenergia bázisban

$$\varrho(t) = \sum_n |n, t\rangle\langle n, 0| = \sum_n e^{-iE_n t} P_n, \qquad P_n = |n\rangle\,\langle n|\,. \tag{38}$$

Ennek Fourier transzformáltja

$$\varrho(\omega) = \sum_n 2\pi\delta(\omega - E_n)P_n, \tag{39}$$

egy olyan operátor, amely csak akkor nem nulla, ha a frekvenciával eltaláljuk valamelyik energia sajátértéket, ott értéke éppen az arra az energia sajátaltérre vett projektor. Ezért a $\varrho(\omega)$ a probléma spektrumát szolgáltatja, így szokták spektrál-operátornak is nevezni. Ha ennek a trace-ét vesszül, akkor

$$\mathrm{Tr}\,\varrho(\omega) = \sum_n 2\pi g_n\delta(\omega - E_n), \tag{40}$$

már függvény, ahonnan az energia sajátértékek olvashatók le, g_n a sajátérték multiplicitása. Ez az *állapotsűrűség* kifejezése.

Az időfejlesztő operátornál előírhatjuk azt is, hogy az adott állapot az időfejlődés kezdő- vagy végállapota, ezzel a későbbiekben gyakran használt fogalmakhoz, a *retardált és avanzsált Green-függvények* definíciójához jutunk:

$$iG_{ret}(t) = \Theta(t)e^{-i\hat{H}t}, \qquad iG_{av}(t) = -\Theta(-t)e^{-i\hat{H}t}, \tag{41}$$

A retardált Green-függvénnyel $t > t_0$-ra

$$|\psi, t\rangle = iG_{ret}(t - t_0)\,|\psi_0\rangle\,, \tag{42}$$

$t < t_0$ esetén pedig nullát kapunk. Hasonló formulák igazak $t < t_0$ esetén az avanzsált Green-függvényekkel. A két Green-függvény különbsége

$$iG_{ret}(t) - iG_{av}(t) = \varrho(t). \tag{43}$$

A Green-függvény időderiváltját véve

$$i\partial_t iG(t) = i\partial_t\left(\Theta(t)e^{-i\hat{H}t}\right) = i\delta(t)\mathbf{1} + \hat{H}iG(t), \tag{44}$$

azaz

$$(i\partial_t - \hat{H})G(t) = \delta(t)\mathbf{1}, \tag{45}$$

ez indokolja a Green-függvény elnevezést. Ez a fajta felírás összhangban van azzal, hogy a kezdőfeltételt a differenciálegyenletbe belevehetjük: ugyanis ha

$$(i\partial_t - \hat{H})\,|\psi\rangle = i\,|\psi_0\rangle\,\delta(t-t_0) \qquad |\psi, t=-\infty\rangle = 0, \tag{46}$$

akkor $t=-\infty$-től $t=t_0$-ig nincs forrástag, így a megoldás nulla. $t=t_0$-nál ugrása lesz az egyenletnek, amit onnan láthatunk, ha $t_0-\varepsilon$-tól $t_0+\varepsilon$-ig integráljuk a fenti egyenletet. Feltételezve, hogy sehol nem szinguláris a megoldás, kapjuk:

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} dt\,(i\partial_t - \hat{H})\,|\psi\rangle = i\,|\psi, t_0+\varepsilon\rangle - i\,|\psi, t_0-\varepsilon\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} dt\, i\,|\psi_0\rangle\,\delta(t-t_0) = i\,|\psi_0\rangle\,. \tag{47}$$

Mivel $i\,|\psi, t_0-\varepsilon\rangle = 0$, $\varepsilon\to 0$ mellett adódik, hogy $|\psi, t_0\rangle = |\psi_0\rangle$. Emiatt (46) valóban egy kezdeti feltétel problémát határoz meg.

A Green-függvényt valamilyen bázisban felírva G_{ab} mátrixelemeket kapunk. A $\sum_a |a\rangle\, iG_{ab}$ egy olyan állapot időfejlődését írja le, amely $|b\rangle$-ből indult $t=0$-nál, hiszen

$$|b,t\rangle = iG(t)\,|b\rangle = \sum_a |a\rangle\,\langle a|\,iG(t)\,|b\rangle = \sum_a |a\rangle\, iG_{ab}. \tag{48}$$

Ezért a Green-függvény tekinthető a hullámfüggvény általánosításának.

A Green-függvény egyenletét Fourier-transzformálva kapjuk

$$(\omega - \hat{H})\hat{G}(\omega) = \mathbf{1}, \tag{49}$$

azaz

$$\hat{G}(\omega) = (\omega - \hat{H})^{-1}. \tag{50}$$

Ez az általános propagátor, ahol ω a komplex síkon veheti fel értékét. Ha ω valós, akkor $\hat{H}$ sajátértékeinél a propagátornak pólusai vannak. Hogy jobban lássuk, mi is történik, írjuk fel a jobb oldalt ismét $\hat{H}$ sajátrendszerében

$$\hat{G}(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - E_n} P_n, \tag{51}$$

azaz valóban, ha $\omega \to E_n$, akkor $\hat{G}$ felrobban. Ez rögöt módszert szolgáltat arra, hogy – amennyiben ismerjük a propagátort – hogyan határozhatjuk meg a rendszer energia sajátértékeit és sajátvektorait. Az energia sajátértékek meghatározásához vegyük $\hat{G}$ trace-ét:

$$\mathrm{Tr}\,\hat{G}(\omega) = \sum_n \frac{g_n}{\omega - E_n}, \tag{52}$$

ami azt jelenti, hogy ennek a függvénynek a pólusai adják az energia sajátértékeket. A gyakorlatban gyakran csak valamilyen mátrixelemet számolunk:

$$\langle\Phi|\hat{G}(\omega)|\Phi\rangle = \sum_n \frac{|\,\langle\Phi|n\rangle\,|^2}{\omega - E_n}, \tag{53}$$

ennek pólusai azon sajátértékek meghatározására alkalmas, ahol $\langle\Phi|n\rangle \neq 0$, amely a Φ állapot *kvantumcsatornáját* jelenti. Ha tudjuk a pólusok helyét, akkor az adott sajátaltérre vetítő projektort a pólus reziduumaként kapjuk:

$$P_n = \operatorname*{Res}_{\omega=E_n} \hat{G}(\omega) = \lim_{\omega\to E_n} (\omega - E_n)\hat{G}(\omega). \tag{54}$$

A $\hat{G}(\omega)$ inverz Fourier transzformáltjának meghatározásához meg kell mondanunk, mit kezdjünk a propagátor pólusaival. Ez az előírás a határfeltételekkel van kapcsolatban. Ha a nevezőhöz $i\varepsilon$ mennyiséget adunk $\varepsilon > 0$-val, akkor az inverz Fourier transzformáció

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega - E + i\varepsilon} = -i\Theta(t)e^{-iEt}. \tag{55}$$

Ez úgy látható, hogy $\omega = \omega_r + i\omega_i$ választással az exponens $e^{-i\omega_r t+\omega_i t}$. Emiatt $t > 0$-ra a kontúr lefelé ($\omega_i < 0$) zárható, ahol van egy egységnyi reziduumú pólus. Ennek járuléka, a fordított körbejárás miatt $-2\pi i$. Ha $t > 0$, a kontúr felfelé zárható, ahol nincs pólus, az integrál nulla. A Θ megjelenése miatt a retardált megoldást kaptuk; ha $-i\varepsilon$-t adtunk volna a nevezőhöz, akkor avanzsált megoldás lett volna az eredmény:

$$\hat{G}(\omega + i\varepsilon) = \hat{G}_{ret}(\omega), \qquad \hat{G}(\omega - i\varepsilon) = \hat{G}_{av}(\omega). \tag{56}$$

Ezeket a formulákat hívjuk Landau előírásnak. Expliciten kiírva

$$i\hat{G}_{ret}(\omega) = \sum_n \frac{i}{\omega - E_n + i\varepsilon} P_n, \qquad i\hat{G}_{av}(\omega) = \sum_n \frac{i}{\omega - E_n - i\varepsilon} P_n. \tag{57}$$

A retardált és avanzsált megoldás különbsége éppen az időfejlesztést adta, l. (43). Ez Fourier bázisban azt jelenti, hogy

$$\varrho = i\hat{G}(\omega + i\varepsilon) - i\hat{G}(\omega - i\varepsilon). \tag{58}$$

Ezt a kifejezést egy függvény diszkontinuitásának nevezzük:

$$\mathrm{Disc}\, f = f(\omega + i\varepsilon) - f(\omega - i\varepsilon), \tag{59}$$

azaz

$$\varrho(\omega) = \mathrm{Disc}\, i\hat{G}(\omega). \tag{60}$$

Ebben az esetben

$$\mathrm{Disc}\, \frac{1}{x} = \frac{1}{x + i\varepsilon} - \frac{1}{x - i\varepsilon} = \frac{-2i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -2\pi i\delta(x). \tag{61}$$

Emiatt visszakaptuk (39) alakot

$$\varrho(\omega) = \sum_n 2\pi\delta(\omega - E_n)P_n. \tag{62}$$

A propagátor diszkontinuitása tehát az állapotsűrűség. Ez is egy lehetséges eljárás a propagátor ismeretében a rendszer energia sajátállapotainak és az azokra történő vetítés operátorának meghatározásához. Mindez azt is mutatja, hogy a rendszer propagátora minden információt tartalamaz a rendszerről.

Kvantummechanikában mindent a hely bázisban fejezünk ki: a Green-függvény mátrixelemei:

$$G(t, x, x') = \left\langle x|\hat{G}(t)|x'\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \psi(t, x) = \langle x|\psi(t)\rangle = \int dx' \left\langle x\left|i\hat{G}_{ret}(t)\right|x'\right\rangle \langle x'|\psi_0\rangle = \int dx' iG(t, x, x')\psi_0(x'). \tag{63}$$

A Green-függvényre vonatkozó differenciálegyenlet:

$$(i\partial_t - H(-i\partial, x))G(t, x, x') = \delta(t)\delta(x - x'). \tag{64}$$

2.5 A propagátor mátrixelemeinek analitikus struktúrája végtelen térfogatban

Fontos hangsúlyozni, hogy a propagátor analitikus szerkezete a kvantumelméletben szigorúan rögzített, l. (53). A komplex frekvenciánál értelmezett propagátornak a valós tengelyen vannak pólusai, amelyek fizikailag az energiaszinteket jelentik. A propagátorból a spektrál függvényhez diszkontinuitás képzéssel juthatunk, fordítva pedig

$$\hat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\varrho(\omega')}{\omega - \omega'}, \tag{65}$$

amiről (39) felhasználásával könnyen meggyőződhetünk. Ez a képlet a *Kramers Kronig reláció*.

Véges rendszer energiaszintjei mindig diszkrétek. Azonban nagy térfogatok esetén az energiaszintek igen közel kerülnek egymáshoz. Hogy ezt lássuk, gondoljunk egy L lineáris méretű 1D rendszerre, amelynek periodikus határfeltételei vannak. A síkhullámokra a periodicitás követelménye

$$e^{ikx} = e^{ik(x+L)} \quad \Rightarrow \quad e^{ikL} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{L}n \quad \Rightarrow \quad \delta k = \frac{2\pi}{L}, \tag{66}$$

ennyivel tér el a szomszédos módusok hullámszáma. Nemrelativisztikus rendszerben tehát az energiaszintek különbsége

$$\delta E = \frac{(k+\delta k)^2}{2m} - \frac{k^2}{2m} = \frac{2\pi}{L}\frac{k}{m} + \mathcal{O}(\delta k^2) = \frac{2\pi v_k}{L} + \mathcal{O}(\delta k^2). \tag{67}$$

$L \to \infty$ esetén tehát az energiaszintek közelednek egymáshoz a fizikai hossz inverzével arányosan.

Magasabb dimenziós esetben másik effektus is felléphet. Egy teljesen szimmetrikus 3D-s test esetén az energiát $E(k)$ adja meg, ahol k a hullámszám abszolút értéke. Ebben az esetben az energiszintek különbségére

$$\delta E_{szim} = \frac{dE}{dk}\frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi v_E}{L} \tag{68}$$

értéket kapnánk, ahol L a lineáris hossz, v_E pedig a "csoportsebesség". Ugyanakkor az ehhez az energiához tartozó összes impulzus állapot száma, azaz az energiaszintek elfajultsága

$$g_E = \frac{4\pi k^2}{\delta k^2} \sim (kL)^2. \tag{69}$$

Ha a test nem teljesen szimmetrikus, akkor ezek az elfajulások feloldódnak, gondoljunk a 3D-s téglatest alakú üregrezonátor energiaszintjeit megadó

$$E^2 = (\hbar c)^2 \sum_i k_i^2, \qquad k_i = \frac{\pi n_i}{L_i} \tag{70}$$

képletre. Az energiaszeintek különbsége ($\hbar = c = 1$ egységrendszerben – amúgy van egy $\hbar c$ szorzó)

$$\delta E = \frac{1}{k}\sum_i k_i \delta k_i \tag{71}$$

képlettel számolható, ahol $\delta k_i = \pi/L_i \delta n_i$, lehet pozitív, negatív vagy nulla is. Az $\sim 1/L$-es függés mellett itt még úgy is közeledhetnek az energiaszintek, hogy mondjuk az egyik módus számát növeljük, a másikét csökkentjük.

Ha teljesen feloldódnak az elfajulások, akkor a δE_{szim} energialépésben g_E darab energiszint található, azaz az energiaszintek tipikus távolsága

$$\delta E = \frac{\delta E_{szim}}{g_E} \sim \frac{v_E}{k^2 L^3} \sim \frac{v_E}{k^2 V} \sim \frac{v_E \lambda^2}{V} \tag{72}$$

már a térfogattal arányosan csökkennek; az utolsó formulában a λ a hullámhosszt jelenti.

Ha a rendszert pontosan egy energiaszintről indítunk, akkor annak időfejlődése csak fázist jelent, emiatt valamilyen $\hat{T} = \hat{T}^\dagger$ mérhető mennyiség várható értéke időben állandó marad:

$$|n,t\rangle = e^{-iE_n t}\,|n\rangle\,, \quad \Rightarrow \quad \langle n,t|\hat{T}|n,t\rangle = \langle n|\hat{T}|n\rangle. \tag{73}$$

Ha egyszerre két energiaszintet gerjesztünk, akkor persze

$$|\psi,t\rangle = \alpha e^{-iE_1 t}\,|n_1\rangle + \beta e^{-iE_1 t}\,|n_1\rangle\,, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \tag{74}$$

az ezen mért várható érték:

$$\langle \psi,t|\hat{T}|\psi,t\rangle = \langle \psi,0|\hat{T}|\psi,0\rangle + 2A\left(\cos(\delta E\, t + \varphi) - \cos\varphi\right), \tag{75}$$

ahol

$$\delta E = E_1 - E_2, \qquad A = |\alpha^*\beta|\left|\langle n_1|\hat{T}|n_2\rangle\right|, \qquad \cos\varphi = \frac{\alpha^*\beta\langle n_1|\hat{T}|n_2\rangle}{A}. \tag{76}$$

Két energiaszint megkülönböztetéséhez tehát $t \sim 1/\delta E$ ideig kell mérnünk – ez a lebegési frenkvencia. 1D rendszerben ez fizikailag tipikusan azt az időt jelenti, amíg a jel átér az L térfogaton, ami még kivárható, de

$3D$ rendszerekben az elfajulások feloldódása miatt az energiaszintek jóval közelebb vannak egymáshoz, ezért a lebegést két közeli energiszint kivárni (feltéve, hogy $v_E \sim c$

$$t \sim \frac{V}{c\lambda^2}, \qquad \frac{ct}{\lambda} \sim \frac{V}{\lambda^3} \tag{77}$$

időt vesz igénybe, illetve a saját rezgés periódusidejének ennyiszerese. Hogy egy számpéldát hozzunk: 1 m^3-es dobozban a látható fény két energiaszintjének lebegési ideje kb egy nap, a fény periódusidejének kb 10^{19}-szerese.

Ha egyetlen energiaszintet akarunk gerjeszteni, akkor úgy kell a rendszert preparálni, hogy a szomszédos energiszintek már ne gerjesztődjenek. Az energia sajátállapot előállításához tehát a rendszert a lebegési ideig kell koherensen kezelni, ami gyakorlatilag lehetetlen feladat. Részecskefizikában egy-egy részecske tipikus előállítási ideje ("creation time") nagyjából megfelel annak az időnek, amíg a fény átér rajta, azaz $\tau \sim \lambda/c$. Ilyen rövid idő alatt az állapotnak átfedése tipikusan a fent látott V/λ^3 számú állapottal van. Emiatt valódi rendszerekben energia sajátállapotot lényegében nem tudunk előállítani, ha a hullámfüggvények kiterjednek a teljes térfogatra. A tipikusan előállítható állapotok energia sajátállapot szerinti felbontása igen sok szintet tartalmaz.

Az energiaszintek sűrűségét formálisan az állapotsűrűség kifejezéséből is magkaphatjuk, hiszen egy $[E, E+\delta E]$ intervallumban levő energiaszintek száma

$$\sum_n \Theta(E < E_n < E + \delta E) = \sum_n \int_E^{E+\delta E} d\omega\, \delta(\omega - E_n) = \frac{1}{2\pi} \int_E^{E+\delta E} d\omega\ \mathrm{Tr}\, \varrho(\omega). \tag{78}$$

Elegendően nagy δE-re a fenti szám, ahogy láttuk, arányos lesz a térfogattal, azaz igen sok állapotot jelent. Ugyanakkor, ha $E \gg \delta E$, akkor az állapotok száma δE-vel közel lineárisan változik. Emiatt definiálhatjuk a folytonos állapotsűrűség kifejezését, mint

$$g(E) = \frac{1}{V}\frac{1}{\delta E} \int_E^{E+\delta E} d\omega\ \mathrm{Tr}\, \varrho(\omega). \tag{79}$$

Ez a függvény már nem Dirac-deltákból áll, hanem folytonos. Nem nulla értékeket $E > E_0$-tól kezdve vesz fel, ahol E_0 a rendszer alapállapoti energiája.

Ugyanezzel a gondolatmenettel élhetünk akkor is, ha fizikailag előállítható állapotokat tekintünk, és kíváncsiak vagyunk az állapot időfejlődésére. Ekkor az időfejlesztő operátor mátrixelemeit kell tekintenünk:

$$\langle\psi|\varrho(t)|\eta\rangle = \sum_n e^{-iE_n t} \langle\psi|P_n|\eta\rangle\,. \tag{80}$$

Ha nincsenek elfajulások, akkor n és E_n között egyértelmű kapcsolat van, azaz a mátrixelemek E_n függvényeként is megadhatók. Vezessük be a projektorok mátrixelemeit mint energia függvényeket a következő módon:

$$\langle\psi|P_n|\eta\rangle = \frac{F(E_n)}{V}, \tag{81}$$

ahol a térfogattal való normálást az indokolja, hogy nagyon sok energiaszinttel vagyunk átfedésben, és ezért egy állapottal való átfedés mátrixeleme fordítottan arányos az összes állapot számának inverzével.

Ha fizikailag előállítható állapotokkal foglalkozunk, akkor ráadásul $F(E)$ az energia lassan változó függvénye. Ennek következtében a szumma átírható integrállá

$$\begin{aligned}\langle\psi|\varrho(t)|\eta\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sum_n 2\pi\delta(\omega - E_n) e^{-i\omega t} \frac{F(\omega)}{V} = \sum_i \delta E \frac{1}{V\delta E} \int_E^{E+\delta E} \frac{d\omega}{2\pi}\, \mathrm{Tr}\, \varrho(\omega) e^{-i\omega t} F(\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} g(E) F(E) e^{-iEt}.\end{aligned} \tag{82}$$

Ezzel a kifejezéssel formálisan értelmezhetjük a folytonos spektrál függvény mátrixelemeket

$$\varrho(\omega,\psi,\eta) = g(\omega)F(\omega). \tag{83}$$

Ez a függvény is folytonos, nem nulla értékeket $\omega > E_0$-tól kezdve vehet fel. Megjegyezzük, hogy a spektrumnak lehetnek diszkrét értékei is speciális esetben, elszigetelt energia sajátértékek esetében, amelyek távolsága a többi sajátértéktől nem változik a térfogat függvényében. Ilyenek például a stabil kötött állapotok energiaszintjei.

A fent elmondottak operátor szinten is végigvihetők, az eredmény a projektor mértékek feletti integrál bevezetése lesz. Mi azonban végig mátrixelemekkel fogunk foglalkozni.

A propagátor mátrixelemeire (65), az inverz relációra (60) összefüggés vonatkozik:

$$G(\omega,\psi,\eta) = \langle\psi|\hat{G}(\omega)|\eta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\varrho(\omega',\psi,\eta)}{\omega-\omega'}, \qquad \varrho(\omega,\psi,\eta) = \operatorname*{Disc}_{\omega} iG(\omega,\psi,\eta). \tag{84}$$

A továbbiakban elhagyjuk a mátrixelemekre hivatkozó ψ és η jelölést. A második reláció azt mondja, hogy

$$G(\omega+i\varepsilon) = G(\omega-i\varepsilon) + \varrho(\omega), \tag{85}$$

ami azt jelenti, hogy folytonos spektrum esetén a propagátor felső és alsó félsíkbeli értékei között végig ugrás van. Ezt nevezzük az adott függvény *vágásának*.

Matematikailag a vágás olyan függvények esetén jelenik meg, amelyek többértékűek lehetnek. Például az $y^2 = x$ megoldása $y = \pm\sqrt{x}$, mindkettő kielégíti az egyenletet. A komplex síkra kiterjesztett megoldás ezt a kettősséget érdekes módon veszi figyelembe. Polár paraméterezés esetén

$$x = re^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} = y_0 e^{i\xi}, \tag{86}$$

vagyis a szög megfeleződik. Ez viszont azt jelenti, hogy y-ra különböző értékeket kapunk a $\varphi \in [0, 4\pi]$ tatományon végighaladva. Vagyis az x síkon kétszer kell körbefordulnunk, hogy y-ban periodicitást kapjunk. Ezeket a körbefordulásokat nevezzük *Riemann-leveleknek*. A gyökfüggvénynél például az x értelmezési tartományában eredetileg $\varphi \in [-\pi, \pi]$, ennek értékkészlete viszont $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Az x síkban a $\pi - \varepsilon$ és a $-\pi + \varepsilon$ szögekhez tartozó értékek közel vannak $\varepsilon \to 0$ esetén, de a képük már messzire kerül:

$$\begin{aligned} &x_1 = re^{i\pi-i\varepsilon}, \quad x_2 = re^{-i\pi+i\varepsilon}, \quad x_1 - x_2 \approx 2ir\varepsilon \to 0 \\ &y_1 = \sqrt{r}e^{i\pi/2-i\varepsilon/2}, \quad y_2 = \sqrt{r}e^{-i\pi/2+i\varepsilon/2}, \quad y_1 - y_2 \approx 2i\sqrt{r}. \end{aligned} \tag{87}$$

A gyökfüggvény diszkontinuitása (vágása) tehát a valós tengely mentén

$$\operatorname{Disc}\sqrt{x} = \sqrt{x+i\varepsilon} - \sqrt{x-i\varepsilon} = 2i\Theta(-x)\sqrt{-x}. \tag{88}$$

A gyökfüggvény első Riemann-levelének képe a $\operatorname{Re} y > 0$ félsík, a második Riemann levél képe a $\operatorname{Re} y < 0$ félsík. A két Riemann levél egymáshoz a negatív x tengelynél kapcsolódik: a vágáson "atbújva" érhetünk el a második levélre. A leképzés valós és képzetes részét láthatjuk a 1 ábrán. A gyökfüggvény a két Riemann-levél egyesítésén már egyértelmű, azonban az nem egyértelmű, hol helyezkedik el a két Riemann-levél határa, azt bárhogyan definiálhatjuk, a két levelet kettévágva.

Egy másik jelentős függvény, amely nem egyértékű, a logaritmus. Erre

$$x = re^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ln x = \ln r + i\varphi. \tag{89}$$

A leképzés képzetes része tehát folyamatosan nő, habár az értelmezési tartományban körbe-körbe járunk. Itt tehát végtelen sok Riemann-levél létezik. Az átjárás a szokásos $\varphi \in [-\pi, \pi]$ definícióval szintén a negatív x tengelynél van:

$$\log(-x+i\varepsilon) - \log(-x-i\varepsilon) = \log(-1+i\frac{\varepsilon}{x}) - \log(-x+i\frac{\varepsilon}{x}) = 2\pi i. \tag{90}$$

A logaritmus függvény valós és képzetes részét látjuk a 2 ábrán. A spirál menetemelkedése 2π.

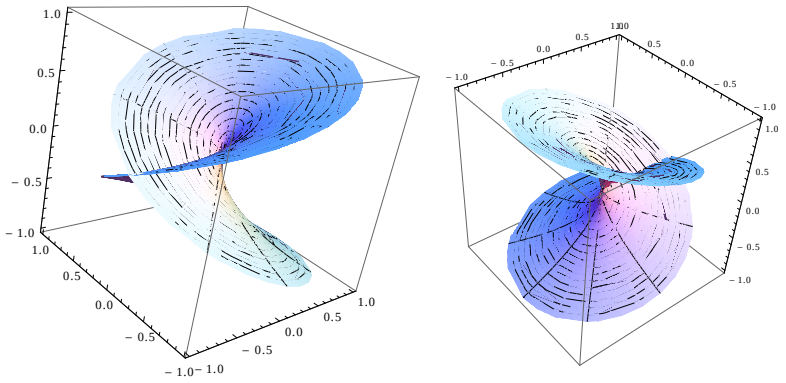

Figure 1: A két Riemann levél megjelenése a gyökfüggvény valós és képzetes részében.

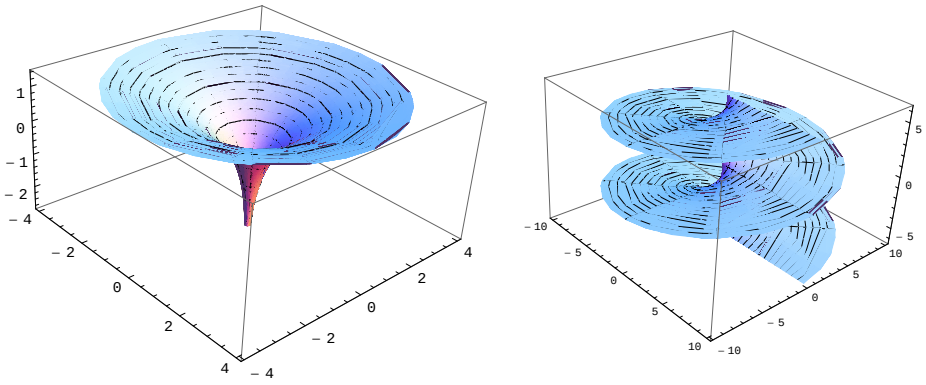

Figure 2: A logaritmus függvény Riemann-levelei.

A spektál függvény értéke valós időben egy adott állapot időfüggését adja meg. Nézzük meg, milyen tipikus időfüggéseket találunk hosszú idők esetén.

Ha a spektrál függvénynek vágása van valamilyen E_t értéktől kezdve (ez a *küszöbérték*, angolul *threshold value*), akkor sorba fejthetjük ezen érték körül. A vezető viselkedés $(\omega - E_t)^\alpha$ kiemelhető, így

$$\varrho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\varrho(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}(\omega - E_t)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\omega - E_t)^n = e^{-iE_t t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, e^{-i\omega' t}\omega'^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega'^n =$$

$$= e^{-iE_t t}\frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi}\, e^{-ix} x^{\alpha+n}. \tag{91}$$

Hosszú idő múlva a vezető időfüggés tehát $t^{-\alpha-1}$, ahol α a spektrál függvény viselkedése a küszöb közelében. Gyökös küszöb esetén (l. következő fejezet) az időfüggés $\sim t^{-3/2}$.

A másik tipikus viselkedés akkor figyelhető meg, ha a spektrál függvénynek Lorentz-görbével közelíthető csúcsa van. A csúcs járuléka

$$\varrho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2} = \frac{i}{2\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\left[\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\Gamma} - \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\Gamma}\right] = \frac{\pi}{\Gamma} e^{-i\omega_0 t - \Gamma|t|}, \tag{92}$$

akár fölfelé, akár lefelé zárjuk a kontúrt. Ekkor az energia sajátállapot időfüggéséhez egy exponenciális csillapodást (bomlást) is kapunk. Ezeket az állapotokat *kvázirészecskéknek* is nevezhetjük, mert kis Γ esetén sok szempontból egy energia sajátérték módjára viselkedik a rendszer.

Fontos hangsúlyozni, hogy bár a fent említett mátrielemek nullához tartanak, az unitaritás nem sérül: ha energia sajátállapotokban írjuk fel az időfejlődést, továbbra is igaz, hogy a hullámfüggvények normája 1 marad:

$$|\psi, t\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t}\,|n\rangle \quad \Rightarrow \quad |\,|\psi, t\rangle\,|^2 = \sum_n |c_n|^2 = 1. \tag{93}$$

Azonban az időfejlesztő operátor fizikailag megfigyelhető mátrixelemei mégis csillapodást mutatnak, annak következtében, hogy az állapotot felépítő energia sajátvektorok fázisai között kezdetben fennállt összhang szétzilálódik, akárcsak a lebegésnél, például:

$$\langle\psi|\psi, t\rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{-iE_n t} \to 0. \tag{94}$$

2.6 Spektrál függvények eltolás invariáns esetben

A Hamilton operátor általában tartalmaz egy kinetikus és egy potenciál tagot, ezért a Green-függvény komplikált, analitikusan nem meghatározható kifejezés. Ha hiányzik a potenciál tag, akkor a Hamilton-operátor eltolás invariáns, azaz felcserélhető az impulzus operátorral (helyeltolás infinitezimális generátorával). Emiatt a Hamilton operátornak és az impulzusnak van közös sajátfüggvényrendszere

$$\exists\,|E, \mathbf{k}\rangle\,, \qquad \hat{H}\,|E, \mathbf{k}\rangle = E\,|E, \mathbf{k}\rangle\,, \qquad \hat{p}\,|E, \mathbf{k}\rangle = k\,|E, \mathbf{k}\rangle\,. \tag{95}$$

A Green-függvényekre vonatkozó Schrödinger egyenlet időbeli Fourier transzformált alakja (49), ezt szendvicselve $|E, \mathbf{k}\rangle$ állapottal kapjuk

$$(\omega - E)G(\omega, E, \mathbf{k}) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(\omega, E, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega - E + i\varepsilon}, \tag{96}$$

ahol

$$G(\omega, E, \mathbf{k}) = \left\langle E, \mathbf{k}\left|\hat{G}(\omega)\right|E, \mathbf{k}\right\rangle. \tag{97}$$

2.6.1 Egyetlen szabad részecske példája

Egy részecske kvantummechanika esetén az eltolásinvarinacia azt jelenti, hogy a Hamilton operátor kifejezhető az impulzussal

$$\hat{H}(\hat{p}) \quad \Rightarrow \quad E = E_k, \tag{98}$$

az energia az impulzus függvénye (diszperziós reláció). Az időfejlesztő operátor és a propagátor impulzus mátrixelemei

$$\varrho(t, \mathbf{k}) = \left\langle \mathbf{k} \left| e^{-i\hat{H}t} \right| \mathbf{k} \right\rangle = e^{-iE_k t}, \qquad G(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega - E_k}. \tag{99}$$

Az időfejlesztő operátor Fourier-transzformáltja, vagy a propagátor diszkontinuitása adja a spektrál függvényt:

$$\varrho(\omega, \mathbf{k}) = 2\pi\delta(\omega - E_k). \tag{100}$$

Ennek jelentése ugyanaz, mint amit fent is elmondtunk: határozott impulzusnál csak egy energiaszintünk van E_k helyen.

Az állapotsűrűség a spektrálfüggvény spurja. Impuzus bázisban felírva

$$\mathrm{Tr}\, \varrho(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \varrho(\omega, \mathbf{k}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \varrho(\omega, \mathbf{k}), \tag{101}$$

mert $k_n = \frac{2\pi n}{L}$ periodikus határfeltételek esetén bármely irányban. Emiatt $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$, ezzel bővítve kapjuk a szummából a (Riemann-) integrált. Hely reprezentációban a téreltolás invariancia miatt

$$\mathrm{Tr}\, \varrho(\omega) = \sum_{\mathbf{x}} \varrho(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = V \varrho(\omega, \mathbf{x} = 0). \tag{102}$$

Szabad nemrelativisztikus részecske esetén $E_k = \frac{k^2}{2m}$. A spektrál függvény és az általános propagátor kifejezése

$$\varrho(\omega, \mathbf{k}) = 2\pi\delta(\omega - \frac{k^2}{2m}), \qquad G(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega - \frac{k^2}{2m}}. \tag{103}$$

Az összes energiaszinthez az állapotsűrűség kifejezését kell néznünk:

$$\varrho(\omega, \mathbf{x} = 0) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (2\pi)\delta(\omega - \frac{k^2}{2m}) = \frac{m}{\pi}\sqrt{2m\omega}, \tag{104}$$

az állapotsűrűség gyökösen emelkedik. Hasonló eredményt kapunk relativisztikus esetben, ahol $E^2 = k^2 + m^2$ ($c = 1$ egységrendszerben):

$$\varrho(\omega, \mathbf{x} = 0) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (2\pi)\delta(\omega - \sqrt{k^2 + m^2}) = \frac{\omega}{\pi}\sqrt{\omega^2 - m^2}. \tag{105}$$

Amennyiben a rendszer nem teljesen eltolás invaráns, azonban a téreltolásra lassan változik a potenciál, akkor a fenti kifejezés valamennyire helyfügő lesz: ez akkor a lokális állapotsűrűség. Pásztázó elektronmikroszkópnál (scanning electron microscope, SEM) a pásztázó tű hegye és a felület közötti átmeneti valószínűség, azaz a mikroszkópon átfolyó áram $I \sim T(\omega, \mathbf{x})\varrho(\omega, \mathbf{x})$ arányos a végállapotok $\varrho(\omega, \mathbf{x})$ számával és a $T(\omega)$ átmeneti valószínűséggel[2]. Az áram megváltozik, ha az átmeneti (alagutazási) valószínűség változik, vagy a lokális állapotsűrűség változik. Az átfolyó áramot mérve, vagy atomerő-elektronmikroszkópnál (atomic force mikroscope, AFM) a tű hegye és a felület között ható erőt mérve egészen atomi méretekig terjedő felbontás érhető el.

[2] A pontos képletet a Landauer-Büttiker formula adja meg $I_{AB} = \frac{2e}{h} \int dE \varrho(E) f'(E) T(E)$, ahol $\varrho(E)$ az állapotsűrűség, $f(E)$ az eloszlásfüggvény, $T(E)$ az átmeneti valószínűség. A $\frac{2e}{h}$ a vezetőképesség kvantuma.

2.6.2 Két részecske rendszer

Ha két eltérő tömegű független részecskénk van, akkor a Hamilton operátor

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \qquad \hat{H}_{1,2}(\mathbf{k}_{1,2}), \tag{106}$$

például nemrelativisztikus esetben

$$\hat{H}_{1,2}(\mathbf{k}_{1,2}) = \frac{\mathbf{k}_{1,2}^2}{2m_{1,2}}. \tag{107}$$

Mind $\hat{k}_1$, mind $\hat{k}_2$ megmaradó mennyiség, ezek sajátvektoraival jellemezhetjük a rendszert:

$$\hat{\varrho}(t) = e^{-i\hat{H}t} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\,\frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}\,e^{-i(E_1+E_2)t}\,|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\rangle\,\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,, \tag{108}$$

Fourier térben

$$\hat{\varrho}(\omega) = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\,\frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}\,(2\pi)\delta(\omega - E_1 - E_2)\,|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\rangle\,\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\,. \tag{109}$$

Megadott $\mathbf{k}_1$ és $\mathbf{k}_2$ esetén, az egy részecske rendszerhez hasonlóan, most is csak egyetlen energiaszintet kapunk.

Sok esetben azonban nem tudjuk a két impulzust külön kontrollálni, csak az összimpulzust. A két részecske állapotokat jellemzhetjük az összimpulzussal és mondjuk az egyik impulzusával

$$\hat{\varrho}(\omega) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,(2\pi)\delta(\omega - E_1(\mathbf{k}) - E_2(\mathbf{p}-\mathbf{k}))\,|\mathbf{p};\mathbf{k}\rangle\,\langle\mathbf{p};\mathbf{k}|\,. \tag{110}$$

Ilyenkor értelmes feltenni azt a kérdést, hogy mekkora az állapotsűrűség egy adott összimpulzus esetén: ezt parciális spúrképzéssel kaphatjuk meg:

$$\varrho(\omega,\mathbf{p}) = \langle\mathbf{p}\,|\mathrm{Tr}_{\mathbf{k}}\hat{\varrho}(\omega)|\,\mathbf{p}\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,(2\pi)\delta(\omega - E_1(\mathbf{k}) - E_2(\mathbf{p}-\mathbf{k})). \tag{111}$$

Bár ez az integrál általánosan is elvégezhető, nézzük csak a $\mathbf{p} = 0$ rendszert, ekkor formálisan ugyanaz az integrál jön ki, mint korábban az egy részecske teljes állapotsűrűségnél

$$\varrho(\omega,\mathbf{p}=0) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,(2\pi)\delta(\omega - \frac{k^2}{2M}) = \frac{M}{\pi}\sqrt{2M\omega}, \tag{112}$$

ahol $M = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ redukált tömeg. Az állapotsűrűség itt is gyökösen indul.

Ha a két részecske közötti potenciál fontos szerepet játszik, akkor az állapotsűrűség egyre jobban torzul. Legjelentősebb változás, ha léteznek kötött állapotok: ezek az állapotsűrűségben a negatív energiás részén megjelenő diszkrét Dirac-deltákként jelentkeznek.

2.7 Perturbációszámítás

A Green-függvénnyel perturbációszámítást is végezhetünk. Tegyük fel, hogy ismerjük a Green-függvényét egy $\hat{H}_0$ Hamilton operátornak, és $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Ekkor frekvencia-térben

$$\begin{aligned}
&(\omega - \hat{H}_0 - \hat{V})\hat{G} = \mathbf{1} \qquad (\omega - \hat{H}_0)\hat{G}_0 = \mathbf{1}\\
&(\hat{G}_0^{-1} - \hat{V})\hat{G} = \mathbf{1}\\
&\hat{G}^{-1} = \hat{G}_0^{-1} - \hat{V}\\
&\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G} \qquad \hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}\hat{V}\hat{G}_0\\
&\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \ldots\hat{G}_0(\hat{V}\hat{G}_0)^n.
\end{aligned} \tag{113}$$

A két utolsó kifejezést szokták Dyson-Schwinger sornak nevezni. Ha formálisan $\hat{V} \sim \lambda$, akkor a fenti kifejezéssel λ haladó sorában írhatjuk fel a propagátort, azaz perturbatíve meghatározhatjuk.

Innen megkaphatjuk a sajátvektorok és sajátértékek transzformációját is, itt első rendben számuljuk ki ezeket a mennyiségeket. Tegyük fel, hogy a teljes rendszer energia sajátértékei $\bar{E}_n$-ek, a hozzájuk tartozó energia sajátvektorok $\overline{|n\rangle}$-ek, a teljes propagátor tehát

$$\hat{G}(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - \bar{E}_n} \overline{|n\rangle\langle n|}. \tag{114}$$

Az eredeti H_0 rendszer energia sajátértékeit E_n-nel, a hozzájuk tartozó sajátvekorokat $|n\rangle$-nel jelöljük, ekkor

$$\hat{G}_0(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - E_n} |n\rangle\langle n|. \tag{115}$$

A Dyson-Schwinger sor első rendben kiírva:

$$\hat{G}(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - E_n} |n\rangle\langle n| + \sum_{nm} \frac{V_{nm}}{(\omega - E_n)(\omega - E_m)} |n\rangle\langle m| + \ldots, \tag{116}$$

ahol

$$V_{nm} = \langle n|\hat{V}|m\rangle. \tag{117}$$

Az energiaszintek eltolódásához érdemes $\operatorname{Tr}\hat{G}$ pólusait nézni:

$$\operatorname{Tr}\hat{G}(\omega) = \sum_n g_n \left(\frac{1}{\omega - E_n} + \frac{V_{nn}}{(\omega - E_n)^2} + \ldots \right) = \sum_n \frac{g_n}{\omega - E_n - V_{nn}} + \ldots, \tag{118}$$

azaz

$$\bar{E}_n = E_n + V_{nn}. \tag{119}$$

$\bar{E}_n$-nek ezt a kifejezését visszaírva (116)-be, első rendben kapjuk:

$$\hat{G}(\omega) = \sum_n \left(\frac{1}{\omega - \bar{E}_n} - \frac{V_{nn}}{(\omega - E_n)^2} \right) |n\rangle\langle n| + \sum_{nm} \frac{V_{nm}}{(\omega - \bar{E}_n)(\omega - \bar{E}_m)} |n\rangle\langle m| + \ldots. \tag{120}$$

A dupla pólus kiesik (innen is meghatározhattuk volna az energiaszintek eltolódását):

$$\hat{G}(\omega) = \sum_n \frac{1}{\omega - \bar{E}_n} |n\rangle\langle n| + \sum_{n \neq m} \frac{V_{nm}}{(\omega - \bar{E}_n)(\omega - \bar{E}_m)} |n\rangle\langle m| + \ldots. \tag{121}$$

Innen könnyen leolvasható a reziduum $\omega = \bar{E}_n$-nél, ez éppen az új sajátaltérre vetítés projektora

$$\overline{|n\rangle\langle n|} = |n\rangle\langle n| + \sum_{m \neq n} \left(\frac{V_{nm}}{(\bar{E}_n - \bar{E}_m)} |n\rangle\langle m| + \frac{V_{mn}}{(\bar{E}_n - \bar{E}_m)} |m\rangle\langle n| \right) + \ldots. \tag{122}$$

Ez a kifejezés úgy is értelmezhető, hogy

$$\overline{|n\rangle} = |n\rangle + \sum_m \frac{V_{mn}}{(\bar{E}_n - \bar{E}_m)} |m\rangle. \tag{123}$$

A perturbációszámítás fenti képletei megegyeznek a kvantummechanikai perturbációszámítás eredményeivel. A propagátor kiszámítására ugyanakkor sokkal hatékonyabb eszközök is rendelkezésre állnak.

2.8 Pályaintegrál reprezentáció

Az időfejlesztő operátátor speciális alakjának köszönhetően az időfejlesztő operátátor és a propagátor mátrixelemei kielégítik a következő egyenletet

$$\left\langle \psi \left| e^{-i\hat{H}t} \right| \eta \right\rangle = \sum_i \left\langle \psi \left| e^{-i\hat{H}t_1} \right| \xi_i \right\rangle \left\langle \xi_i \left| e^{-i\hat{H}(t-t_1)} \right| \eta \right\rangle, \tag{124}$$

ahol $|\xi_i\rangle$ teljes bázist alkot, t_1 pedig tetszőleges időpont. Az időfejlesztő operátor ezen bázisban felvett mátrixelemeit jelöljük

$$\varrho_{ij}(t) = \left\langle \xi_i \left| e^{-i\hat{H}t} \right| \xi_j \right\rangle \tag{125}$$

módon, erre tehát írhatjuk

$$\varrho_{ij}(t) = \sum_{\ell} \varrho_{i\ell}(t_1)\varrho_{\ell j}(t-t_1). \tag{126}$$

Megtehetjük azt, hogy minden $dt = t/n$ idő után beszúrunk egy teljes bázist:

$$\varrho_{i_0 i_n}(t) = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_{n-1}} \varrho_{i_0 i_1}(dt)\varrho_{i_1 i_2}(dt)\varrho_{i_2 i_3}(dt)\ldots\varrho_{i_{n-1} i_n}(dt). \tag{127}$$

Itt most ugyanannak az operátornak a mátrixelemeiről van szó. Szokták ezt az operátort *transzfer mátrixnak* nevezni:

$$T_{ij} = \varrho_{ij}(dt) = \left\langle \xi_i \left| e^{-i\hat{H}dt} \right| \xi_j \right\rangle, \tag{128}$$

amely a Hilbert-téren egy mátrix, végtelen dimenziós, hiszen i és j a báziselemeket indexeli. Ekkor a fenti kifejezés a T mátrix matrixszorzása, azaz T hatványozása:

$$\varrho_{ij}(t) = (T^n)_{ij}. \tag{129}$$

Ha $dt \to 0$ akkor írhatjuk

$$T_{ij} = \left\langle \xi_i \left| e^{-i\hat{H}dt} \right| \xi_j \right\rangle = \langle \xi_i|\xi_j\rangle - idt \left\langle \xi_i \left| \hat{H} \right| \xi_j \right\rangle + \mathcal{O}(dt^2) = \langle \xi_i|\xi_j\rangle\, e^{-idtH_{ij}} + \mathcal{O}(dt^2), \tag{130}$$

ahol

$$H_{ij} = \frac{\left\langle \xi_i \left| \hat{H} \right| \xi_j \right\rangle}{\langle \xi_i|\xi_j\rangle}. \tag{131}$$

Formálisan a szorzó mátrixelemet is reprezentálhatjuk exponenciális alakban:

$$\langle \xi_i|\xi_j\rangle = e^{idtR_{ij}} \quad \Rightarrow \quad R_{ij} = -i\frac{\ln\langle \xi_i|\xi_j\rangle}{dt}. \tag{132}$$

Valójában semmi nem garantálja, hogy az R mátrix véges maradjon a $dt \to 0$ limeszben. Ezzel nem törődve írhatjuk

$$T_{ij} = e^{idt(R_{ij}-H_{ij})} = e^{idtL_{ij}} \quad \Rightarrow \quad L = R - H, \tag{133}$$

ami egy formális Lagrange-függvény, és

$$\varrho_{i_0 i_n}(t) = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_{n-1}} e^{idt(L_{i_0 i_1} + L_{i_1 i_2} + \ldots + L_{i_{n-1} i_n})}. \tag{134}$$

Az exponensben szereplő kifejezés

$$dt(L_{i_0 i_1} + L_{i_1 i_2} + \ldots + L_{i_{n-1} i_n}) = \sum_{k=1}^{n} dt L_{i_{k-1}, i_k} \to \int_0^t dt' L(t') \equiv S_{i_0, i_n}, \tag{135}$$

a formális Lagrange-függvény indőintegrálja, azaz a formális hatás. Végül tehát

$$\varrho_{i_0 i_n}(t) = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_{n-1}} e^{iS_{i_0, i_n}}. \tag{136}$$

Ez a kifejezés egzakt, amennyiben minden mennyiséget végesnek tartunk meg (az integrált is).

Kvantummechanikában a szokásos eljárás, hogy

$$|\xi\rangle = |x\rangle, \tag{137}$$

ekkor a szummák helyett az x-ekre történő integrálunk lesz. A transzfer mátrix alakjához érdemes a p-sajátállapotokat is bevetni (a p-re való integrált nem jelölöm):

$$T_{xy} = \langle x|e^{-i\hat{H}dt}|y\rangle = \langle x|e^{-i\hat{H}dt}|p\rangle \langle p|y\rangle = e^{-iH(x,p)dt} \langle x|p\rangle \langle p|y\rangle = e^{-iH(x,p)dt+ip(x-y)} = e^{idtL(x,p)}, \quad (138)$$

ahol

$$H(x,p) = \frac{\langle x|\hat{H}|p\rangle}{\langle x|p\rangle}, \qquad L(x,p) = p\dot{x} - H(x,p), \qquad \dot{x} = \frac{x-y}{dt}. \quad (139)$$

Ebben az esetben tehát H valóban a klasszikus Hamilton függvény, L pedig annak Legendre transzformáltja, azaz a Lagrange-függvény p-x reprezentációban. Ha a Hamilton-függvény p-függése kvadratikus, ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\frac{p^2}{2m}+p\dot{x}} = e^{\frac{1}{2}m\dot{x}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\frac{(p-m\dot{x})^2}{2m}} = \sqrt{2\pi m} e^{\frac{1}{2}m\dot{x}^2} \quad (140)$$

miatt

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad \Rightarrow \quad L(x,p) = p\dot{x} - \frac{p^2}{2m} - V(x) \quad \Rightarrow \quad L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \quad (141)$$

a szokásos Lagrange-függvény. Ekkor tehát

$$\varrho_{xy}(t) = \int_{x_0=x}^{x_n=y} \mathcal{D}x\, e^{\,i\int_0^t dt' \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right)}, \quad (142)$$

ahol $\mathcal{D}x = dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Mivel az i integrál ideje idt, ezért valójában a $\mathcal{D}x$ integrál az összes lehetséges pályára vonatkozik, ezért a neve *pályaintegrál*. Más kvantumelméletekben mások a teljes állapotok, ezért ott nem valódi pályákon megy végig az integrál, ennek ellenére a neve megmaradt ennek.

3 Több részecske rendszerek

Míg a kvantummechanika alkalmazhatósága egy részecske rendszerekben teljességgel megalapozott, a sok részecske rendszerekben olyan jelenségekkel találkozhatunk, amelyet a kvantummechanikába csak új elvek beiktatásával tudunk figyelembe venni. Az egyik ilyen elv, amely már a legelemibb szinttől, az atomi színképek magyarázatától egész a méréselmélet furcsaságainak megértéséig központi szerepet játszik, az a részecskék megkülönböztethetetlenségének és összefonódottságának elve. Ebben a fejezetben a megkülönböztethetelenség és összefonódottság kérdéskörét tárgyaljuk.

3.1 Megkülönböztethetetlenség és Gibbs paradoxon

Amikor a több részecske rendszerek leírására törekszünk, akkor legelső gondolatunk az, hogy egymástól független egy részecske rendszereket tekintünk. Ilyen azonban a tapasztalat szerint nincsen, csak abban az esetben, ha valami kvantumszám (azaz megmaradó mennyiség sajátértéke) szerint megkülönböztethető állapotokról van szó. Két állapot, amely ugyanazokkal a kvantumszámokkal rendelkezik, egymástól megkülönböztethetetlen.

Erre nagyon egyszerű kísérleti tapasztalatot idézhetünk. Sok gáz közelíthető elegendően nagy pontossággal szabad gázzal, azaz az összetevőik nemigen hatnak kölcsön egymással. Ebben az esetben a statisztikus fizikából arra gondolnánk, hogy az állapotösszegben mindegyik részecske ugyanakkora járulékot ad, mintha egyedül lenne:

$$Z_1 = \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi)^3} e^{-\frac{p^2}{2mT}} = V\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2}, \quad (143)$$

és

$$Z = Z_1^N. \quad (144)$$

Ekkor a szabadenergia $Z = e^{-F/T}$ képlet alapján

$$F = -NT \ln Z_1 = -NT \ln V - \frac{3}{2} NT \log \frac{mT}{2\pi}. \tag{145}$$

Ez a kifejezés azonban nem extenzív! Ha kétszer akkora térfogatot veszünk kétszer akkora részecskeszámmal, akkor $F(2N, 2V) = 2F(N, V) - 2NT \ln 2$. Akkor lesz csak extenzív a szabadenergia (és megalapozható a teljes termodinamika), ha azok a konfigurációk, amelyek a részecskék különböző helyzetéhez tartoznak, egyetlen állapottal jellemezhetők. Ekkor

$$Z = \frac{1}{N!} Z_1^N \quad \Rightarrow \quad F = -NT \ln \frac{V}{N} - \frac{3}{2} NT(\log T + \text{const.}), \tag{146}$$

ez már extenzív kifejezés.

Mindez azt jelenti, hogy a gáz N darab összetevője nem különálló entitás, hanem a többiekkel egylényegű, velük *összefonódott* dolog. Nincs külön egy részecske hullámfüggvény, csak az N részecskének egyszerre lehet hullámfüggvénye.

Ha két különböző gázunk van, akkor azok molekulái persze megkülönböztethetőek. Ebben az esetben az első formula helyes eredményt szolgáltat, és ha mindkét gáz térfogatát kétszeresére növeljük (azaz a két gázt összekeverjük), akkor a szabad energia $-2NT \ln 2$-vel változik; mivel $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$, az entrópiában $2N \ln 2$ változás történik. Ez a keverési entrópia.

A részecskék megkülönböztethetetlenségére számos egyéb bizonyíték is rendelkezésünkre áll, például az elektronok fermion természete, ami miatt egy atompályára csak (a kétféle spinbeállás miatt) két elektron kerülhet. A fotonok kollektív viselkedésének következménye például a lézer előállításának lehetősége.

Azonban arra vonatkozóan, hogy a megkülönböztethetetlenséggel kapcsolatban nem teljesen értünk valamit, vonatkozik a Gibbs paradoxon. Gibbs azt a gondolatkísérletet végezte el, hogy kétfajta gázt A-t és B-t kevert össze, amelynek molekuláit úgy különböztette meg, hogy rájuk kis "zászlócskát" helyezett. Ezután a zászlócskákat egyre kisebbre vette. Mindaddig, amíg a zászlók látszanak, addig a részecskék megkülönböztethetőek, mikor azonban a zászlócskák eltűnnek, akkor a két gáz részecskéi megkülönböztethetetlenek lesznek. Ennek mérhető következményei lehetnek, például ha kémiai reakció végállapotában A és B is előfordulhat, akkor a reakcióállandó a végállapotok számának függvényében változik. Ez azt jelenti, hogy nemanalitikus módon függ egy fizikai mennyiség valamilyen folytonosan változó belső tulajdonságtól.

Ezt a kísérletet persze nem lehet elvégezni, ennek ellenére minden egyéb területen működik a Gibbs által használt gondolatsor. A fő probléma valójában nem az, hogy a részecskék megkülönböztethetőek vagy megkülönböztethetetlenek, hanem a fenti gondolatkísérletben azt kell megvalósítanunk, hogy az egyik leírásból a másikba egy paraméter változtatásával kell áttérnünk. Mikor a részecskéket definiáljuk keltő és eltüntető operátorok segítségével, ismét visszatérünk erre a problémára.

3.2 Összefonódottság és mérés: Bell egyenlőtlenségek

Az összefonódottság feltételezésének van egy furcsa következménye, nevezetesen akkor is "tudnak egymásról" egy gáz molekulái, amikor azok térszerűen, azaz kauzálisan elválasztottak. Erről szól Einstein, Podolsky és Rosen 1935-ben publikált, és később nevezetessé vált cikke. Ebben a mérési sajátállapotba történő beugrás és a kauzalitás ellentmondásosságát tárgyalták. A kérdésről részletesebben olvashatunk [1] könyvben.

Egy későbbi átfogalmazásban a felvetés így hangozhat: keltsünk nulla impulzusmomentumú kezdőállapotból két spinnel rendelkező részecskét, amelyek eltávolodnak egymástól, így semmiképpen nem kommunikálhatnak. Ha ezután megmérjük valamilyen tengelyre nézve az egyik részecske spinjét, akkor biztosak lehetünk benne, hogy a másik részecskén végzett mérés az ellentétes eredményt szolgáltatja. A paradoxon az, hogy hogyan mondhatta el az egyik részecske, hogy őt már detektálták, és ezért a másiknak határozott értékkel kell rendelkeznie? Látszólag ez sérti a relativitáselméletet, a maximális sebességű információterjedés elvét. Einsteinék ezt lehetetlennek tartották, ezért azt kellett feltételezniük, hogy a határozott spinállapot már akkor létrejön, amikor a két részecske még kauzális kapcsolatban volt. Ez a *rejtett paraméter* számunkra csak a mérés pillanatában derül ki.

Az első megjegyzés az, hogy az érvelés nem teljesen korrekt, ugyanis ha megmérjük az első részecskét, akkor ugyan tudjuk, hogy milyen lesz a másik állapota, azonban semmiféle információt nem tudunk közölni a másik berendezéssel. Emiatt nem vagyunk ellentmondásban a relativitáselmélet rendszerével.

A kvantummechanika magyarázata szerint a két részecske nem külön entitás, azoknak csak egy közös, *összefonódott* állapota van. Ennek ellenére igen különösnek hangzik, hogy a mérési sajátállapotba való beugrás egyszerre történik meg a teljes térben. Ezért nem irreális kísérletileg is megvizsgálni a rejtett paraméterek szerepét.

Hogy mit is érdemes mérni, arra Bell tett először javaslatot 1964-ben. Később javították a javaslaton, mai formájában a következőképpen néz ki. Vegyünk két elektront, amelynek spinje egy adott tengelyre nézve lehet $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$. Végezzük el a következő mérést: az egyik elektront megmérjük $\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}'$ irányú spin-detektorokkal, a másikat $\mathbf{b}$ és $\mathbf{b}'$ irányú detektorokkal. Ez úgy értendő, hogy sok kísérletet végzünk, némelyiket az első és második detektor $\mathbf{a}$ illetve $\mathbf{b}$ beállásával, másokat $\mathbf{a}'$ illetve $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ illetve $\mathbf{b}'$ és $\mathbf{a}'$ illetve $\mathbf{b}'$ beállásokkal. Legyen egy-egy adott kísérletben

- az $\mathbf{a}$ irányra vett mérés eredménye x_1,
- az $\mathbf{a}'$ irányra vett mérés eredménye x_1',
- a $\mathbf{b}$ irányra vett mérés eredménye x_2,
- a $\mathbf{b}'$ irányra vett mérés eredménye x_2',

ezek értéke ± 1 lehet. A mérések eredményét átlagoljuk. Miután nincs kitüntetett irány, mindegyik mérés átlaga önmagában nulla:

$$\langle x_1\rangle = \langle x_1'\rangle = \langle x_2\rangle = \langle x_2'\rangle = 0. \tag{147}$$

Ugyanakkor két mérés korrelációja nem lesz általában nulla. Képezzünk négy ilyen korrelátort:

$$S_{a,b} = \langle x_1 x_2\rangle\,, \qquad S_{a',b} = \langle x_1' x_2\rangle\,, \qquad S_{a,b'} = \langle x_1 x_2'\rangle\,, \qquad S_{a',b'} = \langle x_1' x_2'\rangle\,, \tag{148}$$

illetve ezekből a

$$S = S_{a,b} + S_{a',b} - S_{a,b'} + S_{a',b'} \tag{149}$$

mennyiséget.

Tegyük fel, hogy van valamilyen rejtett paraméter a rendszerben, amely bizonyos eloszlást követ. Ebben az esetben az átlagolást a rejtett paraméterre kell végezni. Ekkor

$$S = \langle x_1x_2 - x_1x_2' + x_1'x_2 + x_1'x_2'\rangle_\lambda = \langle x_1(x_2 - x_2')\rangle_\lambda + \langle x_1'(x_2 + x_2')\rangle_\lambda\,. \tag{150}$$

A lényeges felismerés az, hogy mivel minden konkrét mérésben $x_2 = \pm 1$ és $x_2' = \pm 1$, ezért két eset lehet: vagy $x_2 - x_2' = 0$ és $x_2 + x_2' = \pm 2$, vagy $x_2 - x_2' = \pm 2$ és $x_2 + x_2' = 0$. Emiatt a fenti két tag közül mindig csak az egyik ad járulékot, a másik nem. Azaz minden konkrét mérésben

$$|x_1x_2 - x_1x_2' + x_1'x_2 + x_1'x_2'| = \left\{\begin{array}{l} 2|x_1|, \quad \text{vagy} \\ 2|x_1'| \end{array}\right\} < 2. \tag{151}$$

Emiatt felírhatjuk

$$|S| < \langle |x_1x_2 - x_1x_2' + x_1'x_2 + x_1'x_2'|\rangle < 2. \tag{152}$$

Ez a *Bell-egyenlőtlenség*, amely a rejtett paraméter feltételezésén alapul.

Egy egyszerű mérési eljárásban például $+1$-et mérünk, ha a spin iránya és a detektor iránya közötti szög kisebb, mint 90° és -1-et, ha nagyobb. Legyen $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ közötti szög β (ezt mindig pozitívnak vesszük fel!), és a beérkező spin egyenlő valószínűséggel mutasson bármilyen irányba. Ekkor a $+1$ illetve -1 mérésének valószínűsége:

$$P_+ = \frac{\beta}{\pi}, \qquad P_- = 1 - \frac{\beta}{\pi}, \qquad \langle x_1x_2\rangle = P_+ - P_- = \frac{2\beta}{\pi} - 1. \tag{153}$$

Most legyen az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{a}'$ detektorok szöge α, az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ szöge β, és $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}'$ szöge β'. Amennyiben $\beta < \alpha < \beta'$, akkor

$$S_{a,b} = \frac{2\beta}{\pi} - 1, \qquad S_{a',b} = \frac{2(\alpha-\beta)}{\pi} - 1, \qquad S_{a,b'} = \frac{2\beta'}{\pi} - 1, \qquad S_{a',b'} = \frac{2(\beta'-\alpha)}{\pi} - 1, \tag{154}$$

ezért

$$S = -2. \tag{155}$$

Hogyha $\alpha < \beta, \beta'$, akkor

$$S_{a,b} = \frac{2\beta}{\pi} - 1, \qquad S_{a',b} = \frac{2(\beta-\alpha)}{\pi} - 1, \qquad S_{a,b'} = \frac{2\beta'}{\pi} - 1, \qquad S_{a',b'} = \frac{2(\beta'-\alpha)}{\pi} - 1, \tag{156}$$

ezért

$$S = \frac{4(\beta-\alpha)}{\pi} - 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < S < 2, \tag{157}$$

hiszen $\beta - \alpha$ értéke 0 és π között van.

Ha a várható értéket a kvantummechanika határozza meg, akkor x_1 és x_2 közös mérése nem x_1 és x_2 értékének szorzata. Ilyenkor állapotokkal, és a rajtuk végzett mérésekkel kell dolgoznunk. Amikor kibocsátjuk a két elektront nulla összimpulzusmomentummal, akkor állapotuk

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\uparrow_1 \downarrow_2\rangle - |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle \right] \tag{158}$$

hullámfüggvénnyel írható le, ahol a spinbeállásokat a z irányra fogjuk vonatkoztatni (ez az állapot szinglet, azaz tetszőleges beállás választásával ugyanezt az eredményt kapjuk).

A mérő operátor egy $\boldsymbol{a}$ polarizáció esetén $\boldsymbol{a\sigma}$, ahol σ_i-k a Pauli-mátrixok

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0, & -i \\ i, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}. \tag{159}$$

Válasszuk a haladás tengelyét z-nek, a polarizáció legyen merőleges erre a tengelyre, azaz $\boldsymbol{a} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Ekkor

$$\boldsymbol{a\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi - i\sin\varphi \\ \cos\varphi + i\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{160}$$

Az együttes korreláció mérése $\hat{M} = (\boldsymbol{a\sigma}_1)(\boldsymbol{b\sigma}_2)$ operátorral történik, ahol $\boldsymbol{\sigma}_1$ az első, $\boldsymbol{\sigma}_2$ a második részecske Hilbert-terén hat. A (158) állapoton az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ polarizációs koincidencia mérés eredménye

$$\begin{aligned} S_{a,b} &= \langle \Psi | (\boldsymbol{a\sigma}_1)(\boldsymbol{b\sigma}_2) | \Psi \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left\langle \uparrow\downarrow | \hat{M} | \uparrow\downarrow \right\rangle - \left\langle \uparrow\downarrow | \hat{M} | \downarrow\uparrow \right\rangle - \left\langle \downarrow\uparrow | \hat{M} | \uparrow\downarrow \right\rangle + \left\langle \downarrow\uparrow | \hat{M} | \downarrow\uparrow \right\rangle \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left(e^{-i\varphi_a} e^{i\varphi_b} + e^{i\varphi_a} e^{-i\varphi_b} \right] = -\cos(\varphi_a - \varphi_b) = -\boldsymbol{ab}. \end{aligned} \tag{161}$$

Ezért a (149)-ben szereplő korrelátor abszolút értékére

$$|S| = |\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{a'b} - \boldsymbol{ab'} + \boldsymbol{a'b'}|. \tag{162}$$

A fontos itt az, hogy a korrelátor lehet negatív is. Például ha $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a'}$ és $\boldsymbol{b'}$ egymással mindig 45°-os szöget bezáró vektorok, akkor

$$\boldsymbol{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{a'b} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{ab'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{a'b'} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{163}$$

tehát

$$|S| = 2\sqrt{2} > 2. \tag{164}$$

Ez azt jelenti, hogy a kvantum rendszeren végzett méréssel eldönthető, hogy volt-e rejtett paraméter a rendszerben vagy sem.

Fontos elmondani, hogy a fenti eredményben az összefonódottság feltételezése a döntő! Ha például egy olyan állapotban mérünk, ahol az x irányú spineket használva

$$|\Psi\rangle = |\uparrow_x \downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{165}$$

Egy ilyen állapotban $\boldsymbol{a\sigma}$ várható értéke

$$\langle \boldsymbol{a\sigma} \rangle = \frac{1}{2}\,(1, \pm 1) \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \cos\varphi, \tag{166}$$

azaz a javasolt S korrelátor értéke:

$$|S| = |\cos\varphi_a \cos\varphi_b + \cos\varphi_{a'} \cos\varphi_b - \cos\varphi_a \cos\varphi_{b'} + \cos\varphi_{a'} \cos\varphi_{b'}| \quad \Rightarrow \quad |S| < 2, \tag{167}$$

ahogy arról könnyen meggyőződhetünk. Ha tehát a mérés kvantumos, azonban a két részecske egymástól függetlenné vált, akkor a klasszikus határesetet kapjuk vissza.

Ezután kísérleteket kell végeznünk a Bell-egyenlőtlenségek kimérésére. Ezt többen megtették, például A. Aspect 1982-ben [2]. A kísérleteknél vigyázni kell arra, hogy a mérendő objektumok korrelációja ne sérüljön, azaz ne legyen olyan külső körülmény, amely "megméri" a detektálandó részecskét mielőtt az az általunk szerkeszetett detektorba érkezne. A kísérletek meggyőzően bizonyítják a Bell-egyenlőtlenségek sérülését, azaz a rejtett paraméterek hiányát.

Jelenleg is végeznek Bell-teszteket, pl. [3]. Ebben a kísérletben a forrás egy kristályátmenet volt (spontaneous parametric downconversion (SPDC)), a két nagy koherenciájú fotont 29 km-re utaztatták, ott detektálták. A detektorban a detektálási szöget a fotonok repülése alatt választotta ki egy véletlenszámgenerátor. A kísérlet célja a "lokális realizmus" megcáfolása, azaz hogy aannak a bizonyítása, hogy a kvantum mérések nem összeegyeztethetők azzal a világképpel, amely szerint a fénynél gyorsabban semmi nem mehet (lokális), és hogy a mérendő objektumnak van saját, mérőberendezéstől független fizikai tulajdonsága (realizmus). A mérés úgy lett megkonstruálva, hogy a lehetséges ellenérveket (loopholes) a legjobban kivédje. Ilyenek például a lokalitási érv, amely szerint ha van arra lehetőség, hogy a mérésről a mérendő objektumok "tudomást szerezzenek", akkor még lokálisan megtörténhet a mérés, erről csak később szerzünk tudomást. Másik probléma lehet, hogy ha a mérések szisztematikusan követik egymást, akkor az előző mérésből már következik a következő, ismét van idő a lokális mérésre. Esetleg csak bizonyos esetekben sérül a Bell-egyenlőtlenség, de globálisan nem, ha viszont nem detektálunk elegendően sok részecskét, akkor rossz mintaválasztás miatt kaphatunk sérülést. A szerzők mindezeket gondosan kiküszöbölve a Bell egyenlőtlenségek sérülését 11.5 σ jel/zaj aránnyal tudták demonstrálni: ezek szerint csupán $\sim 10^{-31}$ annak a valószínűsége, hogy a világban teljesül a Bell-egyenlőtlenség, és a mérőberendezés csak véletlenül mért ettől eltérő értéket.

Meg kell jegyeznünk, hogy a fenti mérések csak a lokális rejtett paraméterek létét zárja ki. Amennyiben a részecskék és a detektorok rendszerét összefogóan egy zárt kvantum rendszernek tekintjük, akkor azt egy determinisztikus közös Schrödinger-egyenlet írja le. Ennek kezdőállapota meghatározza a végállapotot, azaz rögtön az elején "meg van határozva" a korrelációs mérések eredménye. A kezdőállapot azonban a detektorok és a mérendő részecske közös sajátfüggvényrendszerét jelenti, nem csak a részecske hullámfüggvényét.

4 Részecskék eredete és az 1D húr kvantálása

A valódi részecskék tehát sok esetben összefonódott állapotot alkotnak, a részecskék maguk megkülönböztethetetlenek. Hogyan lehet ilyen rendszert konstruálni, ahol nem kell kézzel betenni a hullámfüggvény (anti-)szimmetriáját?

Tekintsünk ehhez egy rugókkal összekötött tömegpontokból álló láncot, ahol a rugók kezdeti hossza Δx_0, nyugalomban az aktuális hossz Δx és a rugók direkciós ereje D. Vagyis a rugók előfeszítettek

$$F = D(\Delta x - \Delta x_0) = \alpha D \Delta x, \qquad \Delta x_0 = (1-\alpha)\Delta x. \tag{168}$$

A rendszer dinamikájának leírásához minden ($i.$) pontban vegyünk fel egy koordinátarendszert, a vízszintes kitérés u_i, a függőleges y_i és z_i. A szomszédos tömegpontok közötti távolság

$$\Delta\ell_i^2 = (\Delta x + u_{i+1} - u_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2 = \Delta x^2 \left[\left(1 + \frac{\Delta u_i}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_i}{\Delta x}\right)^2 \right] \tag{169}$$

A teljes rendszer Lagrange-függvénye

$$L = \sum_i \left\{ \frac{1}{2} m_i (\dot{u}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \frac{1}{2} D_i (\Delta\ell_i - \Delta x_0)^2 - V(u_i, y_i, z_i) \right\}, \tag{170}$$

ahol V valamilyen lokális potenciál (pl. gravitációs erőtér). Jelölés: $V_i = v\Delta x$ és $m_i = \varrho_i \Delta x$. A potenciál tag:

$$U_i = \frac{1}{2} D_i (\Delta \ell_i - \Delta x_0)^2 + V(u_i, y_i, z_i) = \Delta x \left[\frac{1}{2} D_i \Delta x \left(\frac{\Delta \ell_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x_0}{\Delta x} \right)^2 + v_i \right] = \Delta x \left[\frac{F}{2\alpha} \left(\frac{\Delta \ell_i}{\Delta x} - 1 + \alpha \right)^2 + v_i \right]. \tag{171}$$

Itt

$$\frac{\Delta \ell_i}{\Delta x} = \left(\left(1 + \frac{\Delta u_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \boldsymbol{y}_i}{\Delta x} \right)^2 \right)^{1/2} = 1 + \frac{\Delta u_i}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \boldsymbol{y}_i}{\Delta x} \right)^2 + \dots, \tag{172}$$

kvadratikus rendig kifejtve. Emiatt

$$\left(\frac{\Delta \ell_i}{\Delta x} - 1 + \alpha \right)^2 = \left(\alpha + \frac{\Delta u_i}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \boldsymbol{y}_i}{\Delta x} \right)^2 \right)^2 = \alpha^2 + 2\alpha \frac{\Delta u_i}{\Delta x} + \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\Delta \boldsymbol{y}_i}{\Delta x} \right)^2 + \dots \tag{173}$$

Az első tag konstanst ad, a második tag $\sum_i \Delta u_i = 0$-t ad a Lagrange-függvényben. A maradékot visszaírva

$$L = \Delta x \sum_i \left[\frac{1}{2} \varrho_i (\dot{u}_i^2 + \dot{\boldsymbol{y}}_i^2) - \frac{F}{2\alpha} \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x} \right)^2 - \frac{F}{2} \left(\frac{\Delta \boldsymbol{y}_i}{\Delta x} \right)^2 - v_i \right] + \dots \tag{174}$$

Vannak még további tagok, de a kitérések legalacsonyabb rendjében ezek a tagok maradnak. Vegyünk konstans ϱ_i értéket.

$\Delta x \to 0$ limeszben integrált kapunk, ha bevezetjük a Lagrange-sűrűséget:

$$\mathcal{L} = \frac{L_i}{\Delta x}. \tag{175}$$

Ekkor

$$L = \int dx\, \mathcal{L} = \int dx \left[\frac{1}{2} \varrho (\dot{u}^2 + \dot{\boldsymbol{y}}^2) - \frac{F}{2\alpha} (\partial_x u)^2 - \frac{F}{2} (\partial_x \boldsymbol{y})^2 - v \right] + \dots \tag{176}$$

Két (ill. három) Lagrange-függvény összegét kaptuk, amelyek között nincs kölcsönhatás, legalábbis legalacsonyabb rendben. Az egyik transzverzális módus egyenlete

$$L_y = \int dx \left[\frac{1}{2} \varrho \dot{y}^2 - \frac{F}{2} (\partial_x y)^2 - v \right]. \tag{177}$$

Klasszikusan $v = 0$-nál a mozgásegyenlet

$$\varrho \partial_t^2 y - F \partial_x^2 y = 0, \tag{178}$$

megoldása síkhullámok összege

$$y = e^{-i\omega t + ikx} = e^{ik(x - \frac{\omega}{k} t)}, \qquad \omega^2 \varrho = F k^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\varrho}}. \tag{179}$$

Csináljunk néhány átskálázást

$$\Phi = \sqrt{F} y, \qquad \tau = \sqrt{\frac{F}{\varrho}} t = ct \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \sqrt{\varrho}\, \dot{y}. \tag{180}$$

Ezzel

$$L_y = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_\tau \Phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \Phi)^2 - v \right]. \tag{181}$$

Az átskálázott mozgásegyenletből már hiányzik c.

$$(\partial_\tau^2 - \partial_x^2) y + v' = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^2 y + v' = 0. \tag{182}$$

Próbáljuk megkvantálni a rendszert. Az eredeti szabadsági fokok nyelvén (ezek Descartes rendszert alkotnak)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i \quad \Rightarrow \quad [\hat{y}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{183}$$

Most skálázzuk át az eredeti szabadsági fokokat:

$$y_i = CY_i \quad \Rightarrow \quad P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_i} = Cp_i \quad \Rightarrow \quad [\hat{Y}_i, \hat{P}_j] = [\hat{y}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{184}$$

Ez azt jelenti, hogy a szabadsági fokok átskálázása nem változtat a kvantálási feltételen. Ugyanakkor a Lagrange-függvény átskálázásának hatása

$$\mathcal{L} = \frac{L}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} = \frac{1}{\Delta x} p_i \quad \Rightarrow \quad [\hat{y}_i, \hat{\pi}_i] = i\hbar \frac{\delta_{ij}}{\Delta x}. \tag{185}$$

Ha az indexekből térváltozót csinálunk, azaz $x = i\Delta x$ jelöléssel $y(x) = y_i$, akkor a jobb oldal Dirac-deltához tart, hiszen

$$\sum_i \Delta x \frac{\delta_{ij}}{\Delta x} = 1. \tag{186}$$

Vagyis amikor a Lagrange-sűrűségből képzett deriváltakból származtatunk kvantálást, akkor a jobb oldalon Dirac-deltát kell írni.

Most induljunk ki (181) egyenletből:

$$\Pi(t,x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}(t,x)} = \partial_t \Phi(t,x), \tag{187}$$

ezzel

$$[\hat{\Phi}(t,x), \hat{\Pi}(t,y)] = i\hbar\delta(x-y). \tag{188}$$

Most folytassuk úgy, hogy feltesszük, hogy

$$v(\Phi) = \frac{M^2}{2}\Phi^2. \tag{189}$$

Láthatóan M nem az eredeti tömegekkel, inkább az eredeti potenciállal van kapcsolatban. Ekkor a Lagrange- és a Hamilton-függvények alakja:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{M^2}{2}\Phi^2, \tag{190}$$

és

$$H = \sum_i p_i q_i - L \to \int (\Pi \partial_t \Phi - \mathcal{L}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \Phi)^2 + \frac{M^2}{2}\Phi^2. \tag{191}$$

A mozgásegyenlet

$$(\partial_0^2 - \partial_X^2 + M^2)\Phi(t,x) = 0, \qquad (\partial_0^2 + k^2 + M^2)\Phi(t,k) = (\partial_0^2 + \omega_k^2)\Phi(t,k) = 0, \tag{192}$$

ahol definiáltuk a

$$\omega_k^2 = k^2 + M^2. \tag{193}$$

Ez a jelölés olyan, mint egy relativisztikus diszperziós reláció (hiszen az idő átskálázásával $c = 1$-re tértünk át). A térbeli Fourier transzformáció után már teljesen úgy néz ki a mozgásegyenlet, mint sok egymástól független harmonikus oszcillátor összessége, ahol a sajátfrekvenciák ω_k-k.

A rendszer kvantálása a (188) alapján történik. Fizikailag a húr kitérés és annak konjugált impulzusa helyett a kitérés mérése és kitérés megváltoztatása operációkat alkalmazzuk. Mivel a rendszer nagyon hasonlít a harmonikus oszcillátorra, a kvantálásnál az ott alkalmazott módszert érdemes követni. Az egyetlen nehézség, amit figyelembe kell venni, hogy most nem a független módusok hermitikus operátorok, hanem a

valós térbeli mezők. Így az eredeti Φ, Π változók helyett a következő módon vezetjük be a keltő és eltüntető operátorokat

$$\hat{\Phi}(t,x) = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}_k e^{ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ikx} \right)$$
$$\hat{\Pi}(t,x) = \int \frac{dk}{2\pi} (-i) \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(\hat{a}_k e^{ikx} - \hat{a}_k^\dagger e^{-ikx} \right). \tag{194}$$

Az inverz relációk

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \int dx e^{-ikx} \left(\hat{\Phi} + \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi} \right)$$
$$\hat{a}_k^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \int dx e^{ikx} \left(\hat{\Phi} - \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi} \right). \tag{195}$$

Ezek kommutációs relációjára kapjuk

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_q^\dagger] = \sqrt{\frac{\omega_k \omega_q}{2}} \int dx dy \, e^{-ikx+iqy} [\hat{\Phi}_x + \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi}_x, \hat{\Phi}_y - \frac{i}{\omega_q} \hat{\Pi}_y] = 2\pi\delta(k-q). \tag{196}$$

A Hamilton-operátort is kifejezhetjük ezekkel az operátorokkal. A fentihez hasonló számolás után kapjuk

$$\hat{H} = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{\omega_k}{2} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) = \int \frac{dk}{2\pi} \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \int \frac{dk}{2\pi} \frac{\omega_k}{2} 2\pi\delta(0). \tag{197}$$

A második tag az oszcillátorok nullponti energiájának megfelelője kontinuum esetre. Valóban, diszkrét esetben

$$\int \frac{dk}{2\pi} \leftrightarrow \frac{1}{L} \sum_i, \qquad \text{valamint} \qquad \int dx \, e^{ikx} \Big|_{x=0} = 2\pi\delta(0) = L, \tag{198}$$

ezért

$$\int \frac{dk}{2\pi} \frac{\omega_k}{2} 2\pi\delta(0) \leftrightarrow \frac{1}{L} \sum_i \frac{\omega_i}{2} L = \sum_i \frac{\omega_i}{2}. \tag{199}$$

Csakhogy amíg egyetlen oszcillátor esetében lehetett érvelni amellett, hogy a nullponti energia mérhető, itt semmiképpen nem értelmezhető ez a tag fizikailag. Először is ez egy konstans járulék az energiához, márpedig csak energiakülönbségek mérhetők. Igazi kontinuum esetben vagy végtelen térfogat esetében a végtelen sok módus végtelen energiát jelent, hasonlóan a klasszikus Reileigh instabilitáshoz. Elvileg, ha valami korlátozza a módusok számát, például létezik legkisebb lehetséges hullámhossz, akkor véges értéket kapunk, amely elvileg mérhető lehetne. Az egyik megnyilvánulási formája lehetne a nullponti energiának a vákuum energiája, azaz a kozmológiai sötét energia, amely a kozmológiai standard modell szerint valóban létezik, és a világegyetem energiasűrűségének kb 70%-át teszi ki. Azonban bármely ésszerű becslés a legkisebb hullámhosszra, sok-sok nagyságrenddel (azaz 10^{40}-től 10^{120} faktorig) ad nagyobb értéket a kozmológiai konstansra, mint a kísérleti érték. A másik lehetséges effektus a Casimir effektus lenne: adott energiasűrűség esetén a V térfogat energiája $\varrho_E V$, ekkor egy véges térfogatba zárt vákuum a doboz falára erővel hat. Ekkor nem az energia abszolút értékét mérjük ki, hanem a változását. Bár elég bizarr gondolat a vákuumot dobozba zárni, ez a vonzóerő valóban kimérhető; azonban más magyarázat (spontán töltésmegosztás) ugyanilyen eredményt ad.

Végeredményben azt kell mondanunk, hogy a nullponti energia nem megfelelően alátámasztott fogalom, valójában még az "igazi" kvantummechanikai rendszerek esetében sem. Az egyik legfontosabb kritika ellene, hogy valójában a kvantum Hamiltonból kellene kiindulnunk, nem pedig a klasszikus megfelelőjéből. A kvantum Hamilton függvény pedig tartalmazhat olyan tagot, amelynek klasszikus határesete nulla. Például kvadratikus rendig

$$-i\hat{q}\hat{p} + i\hat{p}\hat{q} \to \begin{cases} 1 & \text{kvantumosan,} \\ 0 & \text{klasszikusan.} \end{cases} \tag{200}$$

Miután csupán a klasszikus Hamilton-függvényből tudunk kiindulni, nem vehetjük komolyan a konstans tagok megjelenését a kvadratikus elméletben.

A Hamilton operátor alakja $\hat{a}^\dagger$-tel és $\hat{a}$-val kifejezve most már ponotsan független harmonikus oszcillátorok összegének felel meg. Ismétlésként nézzük meg az egy szabadsági fokú harmonikus oszcillátor megoldását.

4.1 Kiegészítés: harmonikus oszcillátor

A kvantummechanika lényegében egyetlen megoldható problémája a harmonikus oszcillátor, és az abból származtatható potenciálok. Erre

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2. \tag{201}$$

Bevezetjük a keltő-eltüntető operátorokat:

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger), \qquad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad \Rightarrow \quad [q,p] = i[a,a^\dagger] = i \quad \Rightarrow \quad [a,a^\dagger] = 1. \tag{202}$$

Kifejezve H-t

$$p^2 = -\frac{\omega}{2}\left(a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + (a^\dagger)^2\right), \qquad q^2 = \frac{1}{2\omega}\left(a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + (a^\dagger)^2\right) \quad \Rightarrow \quad H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \tag{203}$$

Jelöljük H sajátvektorait $|n\rangle$-nel, sajátértékeit E_n-nel. Mivel bármely állapotban

$$\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \omega\left(|a|\Psi\rangle|^2 + \frac{1}{2}\right) > 0, \tag{204}$$

ezért valamennyi sajátértéke pozitív. Emiatt van legkisebb sajátérték: E_0, a hozzá tartozó sajátvektort jelöljük $|0\rangle$-nak. Mivel

$$[a^\dagger a, a] = -a \quad \Rightarrow \quad [H,a] = -\omega a, \qquad [H,a^\dagger] = \omega a^\dagger, \tag{205}$$

ezért

$$Ha|n\rangle = aH|n\rangle + [H,a]|n\rangle = (E-\omega)a|n\rangle. \tag{206}$$

Vagyis $a|n\rangle$ is sajátvektor, sajátértéke $E-\omega$. Viszont $E_0 - \omega$ nem lehet sajátérték, ezért

$$a|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad H|0\rangle = \frac{\omega}{2}|0\rangle \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\omega}{2}. \tag{207}$$

Másrészt $Ha^\dagger|n\rangle = (E_n + \omega)a^\dagger|n\rangle \quad \Rightarrow \quad a^\dagger|n\rangle$ is sajátvektor, sajátértéke $E_n + \omega$. Ezért

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega, \qquad |n\rangle \sim (a^\dagger)^n|0\rangle. \tag{208}$$

Az arányossági tényezőhöz

$$|n\rangle = \frac{1}{\alpha_n}a^\dagger|n-1\rangle = \frac{1}{\beta_{n+1}}a|n+1\rangle. \tag{209}$$

Ezzel, feltéve, hogy minden sajátállapot normált:

$$\langle n-1|a|n\rangle = \beta_n = \alpha_n. \tag{210}$$

Másrészt

$$\langle n|n\rangle = \frac{1}{\alpha_n^2}\langle n-1|aa^\dagger|n-1\rangle = \frac{1}{\alpha_n^2}\langle n-1|a^\dagger a + 1|n-1\rangle = \frac{1}{\alpha_n^2}(\alpha_{n-1}^2+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n^2 = \alpha_{n-1}^2+1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n^2 = n. \tag{211}$$

Tehát

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle. \tag{212}$$

4.2 A húr kvantumai

Ennek az analízisnek a pontos mását kell a húr esetén is követni. Feltesszük, hogy van egy olyan állapot, amelyet minden $\hat{a}_k$ operátor eltüntet: ez lesz a vákuumállapot $|0\rangle$. Ebből előállítható keltő operátorok segítségével egy általános

$$|k_1, n_1; k_2, n_2; \dots k_a, n_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_a!}} (a^\dagger_{k_1})^{n_1} (a^\dagger_{k_2})^{n_2} \dots (a^\dagger_{k_2})^{n_2} |0\rangle . \tag{213}$$

Itt a k_i hullámszámú állapotban n_i gerjesztés van. A keltő operátorok felcserélhetősége miatt

$$|\dots; k_i, n_i; \dots k_j, n_j; \dots\rangle = |\dots; k_j, n_j; \dots k_i, n_i; \dots\rangle , \tag{214}$$

vagyis a gerjesztések sorrendje nem számít.

Ugyanezen oknál fogva $\hat{n}_k = \hat{a}^\dagger_k \hat{a}_k$ operátorok felcserélnek $\hat{a}_q$ és $\hat{a}^\dagger_q$ tetszőleges függvényével, ha $k \neq q$. Emiatt

$$\hat{n}_k |k_1, n_1; k_2, n_2; \dots k_a, n_a\rangle = n_k |k_1, n_1; k_2, n_2; \dots k_a, n_a\rangle . \tag{215}$$

Ha a k módust nem gerjesztettük, akkor persze $n_k = 0$-t kapunk. Mindenesetre így kaptunk végtelen sok egymással felcserélő mennyiséget. A fenti operátorok összege a "részecskeszám operátor"

$$\hat{N} = \int \frac{dk}{2\pi} \hat{a}^\dagger_k \hat{a}_k, \tag{216}$$

erre

$$\hat{N} |k_1, n_1; k_2, n_2; \dots k_a, n_a\rangle = \sum_i n_i |k_1, n_1; k_2, n_2; \dots k_a, n_a\rangle . \tag{217}$$

Rögzítve az összes részecske számát a teljes Hilbert-tér felírható, mint fix részecskeszámú alrendszerek direkt összege

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \dots \mathcal{H}_0 \oplus \dots , \tag{218}$$

ez a Fock-tér konstrukció.

A fentiek miatt a (213) állapot energia sajátállapot:

$$\hat{H} |k_1, n_1; k_2, n_2; \dots k_a, n_a\rangle = \sum_{i=1}^{a} n_i \omega_{k_i} |k_1, n_1; k_2, n_2; \dots k_a, n_a\rangle \quad \Rightarrow \quad E = \sum_{i=1}^{a} n_i \omega_{k_i}. \tag{219}$$

Ha az impulzust is tudni akarjuk, akkor nem a $\hat{\Phi}$ kitéréshez kanonikusan konjugált $\hat{\Pi}$ operátort kell nézni, hiszen az a húr irányú kitérésért felelős. Az imulzus azonban a fizikai tér $x \to x + \Delta x$ eltolásának generátora kell legyen. Erre a terek változása $\Phi(x) \to \Phi(x + \Delta x)$. Infinitezimális transzformációkra $\delta\hat{\Phi} = i[\hat{P}, \hat{\Phi}] = \partial\hat{\Phi}$. Állítás az, hogy ez az operátor

$$\hat{P} = \int dy \, \hat{\Pi}(y) \partial\hat{\Phi}(y). \tag{220}$$

Bizonyítás: mivel $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, ezért

$$i[\hat{P}, \hat{\Phi}(x)] = \int dy \, i[\hat{\Pi}(y)\partial\hat{\Phi}(y), \hat{\Phi}(x)] = \int dy \, i[\hat{\Pi}(y), \hat{\Phi}(x)]\partial\hat{\Phi}(y) = \partial\hat{\Phi}(x), \tag{221}$$

hiszen $i[\hat{\Pi}(y), \hat{\Phi}(x)] = \delta(x - y)$, míg $[\hat{\Phi}(y), \hat{\Phi}(x)] = 0$, ezért a deriváltra is ugyanez igaz.

Beírva a keltő- és eltüntető operátorokat

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \int dy \, \hat{\Pi}(y)\partial\hat{\Phi}(y) = \int dy \frac{dk}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} (-i)(-ik) \sqrt{\frac{\omega_q}{4\omega_k}} \left(\hat{a}_q e^{-iqx} - \hat{a}^\dagger_q e^{iqx}\right) \left(\hat{a}_k e^{-ikx} - \hat{a}^\dagger_k e^{ikx}\right) = \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} \frac{k}{2} \left(\hat{a}_k \hat{a}^\dagger_k + \hat{a}^\dagger_k \hat{a}_k\right) = \int \frac{dk}{2\pi} k \hat{a}^\dagger_k \hat{a}_k. \end{aligned} \tag{222}$$

Emiatt (213) alatt létrehozott állapot impulzus sajátállapot is:

$$\hat{P} |k_1, n_1; k_2, n_2; \dots k_a, n_a\rangle = \sum_i n_i k_i |k_1, n_1; k_2, n_2; \dots k_a, n_a\rangle . \tag{223}$$

Mindennek alapján a (213) állapot olyan, mint egy független kvantum részecskékből álló gáz, ahol a gerjesztések jelentik a részecskéket. Az egyes részecskékre relativisztikus energia-impulzus összefüggés (diszeprziós reláció) érvényes. A gerjesztések cseréjére nem kapunk új állapotot, ez magából a konstrukcióból következik! Jelen esetben a gáz részecskéi bozonok, felcserélésükre ugyanazt az állapotot kapjuk. A teljes energia és impulzus a részecskék energiájának illetve impulzusának összege.

4.3 Egyéb állapotok

Az energia és impulzus sajátállapotok mellett egyéb állapotok is fontosak lehetnek. Például az, amelyikkel a húr pengetése közben találkozunk. Minek felel ez meg kvantumosan?

4.3.1 Tér sajátállapot

Az egyik első gondolatunk lehet, hogy a kitérített húr a kitérés-mérő operátor $\hat{\Phi}(x)$ sajátállapota. Mivel adott időre $[\hat{\Phi}(t,x), \hat{\Phi}(t,y)] = 0$, ezért van közös sajátfüggvényrendszerük:

$$\hat{\Phi}(x) \left|\Phi_0\right\rangle = \Phi_0(x) \left|\Phi_0\right\rangle . \tag{224}$$

Ez az állapot felel meg a sokrészecske kvantummechanika pontszerű részecskéinek, hiszen itt a húrt felépítő egyes atomok helye pontosan meghatározott. Formálisan gyakran szoktunk erre az állapotra hivatkozni, ugyanakkor – csakúgy mint az egy részecske kvantummechanikában, ezzel az állapottal itt is baj van.

Például a kanonikus kvantálási relációt tekintve:

$$i\delta(x-y) = \left\langle \Phi_0 \left| [\hat{\Phi}(x), \hat{\Pi}(y)] \right| \Phi_0 \right\rangle = \left\langle \Phi_0 \left| (\hat{\Phi}(x)\hat{\Pi}(y) - \hat{\Pi}(y)\hat{\Phi}(x)) \right| \Phi_0 \right\rangle = 0, \tag{225}$$

ami ellentmondáshoz vezet. A határozott kitérésű állapot nem normálható: egy részecske esetén például

$$\langle x|x\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \, \langle x|p\rangle \, \langle p|x\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \, = \frac{p_{max}}{2\pi} \to \infty \tag{226}$$

a végtelen térfogatú esetben[3]. Még nagyobb baj, hogy ennek az állapontak végtelen nagy az energiája; ismét egyetlen harmonikus oszcillátort tekintve

$$\langle x|\hat{H}|x\rangle = \left\langle x \left| \frac{p^2}{2m} + V(x) \right| x \right\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \, \langle x|p\rangle \, \frac{p^2}{2m} \, \langle p|x\rangle + V(x) = \int \frac{dp}{2\pi} \, \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{p_{max}^3}{6m} + V(x) \right], \tag{227}$$

azaz

$$\langle \hat{H} \rangle = \frac{1}{p_{max}} \left[\frac{p_{max}^3}{6m} + V(x) \right] \to \frac{p_{max}^2}{6m} \to \infty. \tag{228}$$

A húr kitérítésénél tehát biztosan nem ilyen állapotba érkezünk.

4.3.2 Gerjesztett húr

Induljunk ki praktikusan: hogyan tudjuk előállítani a húr kitérítését? Erővel hatunk rá, azaz a potenciált adjuk meg pontonként. f_i lokális erőkhöz tartozó módosulűs a Lagrange-függvényben $\sum_i f_i y_i$, kontinuum limesz, és átskálázás után

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi(-\partial^2 - m^2)\Phi + J\Phi. \tag{229}$$

$J(\mathbf{x})$-t szokták *külső forrástagnak* is nevezni. A klasszikus mozgásegyenlet:

$$(\partial^2 + m^2)\Phi = J, \tag{230}$$

ez időfüggő esetre is megadja a húr rezgését, konstans J-t alkalmazva a húr kitérése lesz a stacionárium megoldás.

Milyen kvantumrendszerhez jutunk innen? A kvantáláshoz két különböző stratégiát követhetünk. Mindkét esetben korrekt az eljárás, azonban a részecsketartalom különböző.

[3] p_{max} a diszkretizáció után a legkisebb távolsággal van kapcsolatban. Δx-nél kisebb hullámhossz nincs értelmezve, ezért $\lambda_{min} = \Delta x$, és így $\frac{p_{max}}{2\pi} = \frac{1}{\Delta x}$.

Klasszikus háttér Az első módszerben a kvantálás előtt felírom a teret mint

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \varphi(x). \tag{231}$$

Ezt beírva a Lagrange-függvénybe, felhasználva, hogy teljes divergenciák eldobhatók:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi_0(-\partial^2 - m^2)\Phi_0 + \phi(-\partial^2 - m^2)\Phi_0 + \frac{1}{2}\phi(-\partial^2 - m^2)\phi + J(\Phi_0 + \varphi). \tag{232}$$

Válasszuk

$$(\partial^2 + m^2)\Phi_0 = J, \tag{233}$$

ez éppen a klasszikus mozgásegyenlet. Vagyis a klasszikus kitérés a kitérés mérő operátor egységoperátorral arányos részének felel meg!

Ezzel

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varphi(-\partial^2 - m^2)\varphi + \frac{1}{2}\Phi_0 J. \tag{234}$$

Itt a második tag kívülről adott, nem befolyásolja a φ rendszer dinamikáját. Ha tehát ezt a rendszert kvantálni akarom, akkor ugyanúgy kell eljárni, mint forrás nélküli esetben. Definiálhatunk egy vákuumot $|\tilde{0}\rangle$-t, illetve az ezen értelmezett eltüntető operátorokat $b_{\mathbf{k}}$-kat: $b_{\mathbf{k}}|\tilde{0}\rangle = 0$. Az $b^\dagger_{\mathbf{k}}$ operátorok a keltő operátorok.

Eredeti kvantálás Érdekelhet minket, hogy az eredeti, vákuum felett felépített Hilbert téren milyen állapotnak felel meg a kitérített húr vákuum-tere? Ekkor a Lagrange- és Hamilton-függvény alakja

$$L = \int d^3\mathbf{x}\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) - \frac{m^2}{2}\Phi^2 + J\Phi\right), \qquad H = \int d^3\mathbf{x}\left(\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{m^2}{2}\Phi^2 - J\Phi\right). \tag{235}$$

Ugyanúgy bevezetve a keltő- eltüntető operátorokat mint korábban, a J-t tartalmazó tag:

$$-\int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}J(t,\mathbf{x}) + a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}J(t,\mathbf{x})\right) = -\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_p J^*_{\mathbf{p}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}J_{\mathbf{p}}\right). \tag{236}$$

A teljes Hamilton-operátor tehát:

$$H = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left(\omega_{\mathbf{p}}a^\dagger_p a_p - a_p\frac{J^*_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} - a^\dagger_{\mathbf{p}}\frac{J_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\right). \tag{237}$$

Bevezetve

$$\eta_{\mathbf{p}} = \frac{J_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega^3_{\mathbf{p}}}} \qquad b_p = a_p - \eta_{\mathbf{p}} \quad \Rightarrow \quad H = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left(\omega_{\mathbf{p}}b^\dagger_p b_p + |\eta_{\mathbf{p}}|^2\right). \tag{238}$$

Ismét megkaptuk egy szabad rendszer Hamilton-operátorát. A vákuumállapot, amelyet az előbb $|\tilde{0}\rangle$-val jelöltünk, s amelyet a $b_{\mathbf{k}}$ operátorok eltüntetnek most relációba hozható az eredeti vákuummal:

$$b_{\mathbf{p}}|\tilde{0}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\mathbf{p}}|\tilde{0}\rangle = \eta_{\mathbf{p}}|\tilde{0}\rangle, \tag{239}$$

ez tehát a-k sajátállapotai. Ezeket hívjuk *koherens állapotoknak*, amelyek tehát egyáltalán nem egy-részecske állapotok. Egy adott impulzus esetén a normált koherens állapot

$$a\,|\eta\rangle = \eta\,|\eta\rangle \quad \Rightarrow \quad |\eta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}e^{\eta a^\dagger}\,|0\rangle\,, \tag{240}$$

a teljes koherens állapot ezek direkt szorzata, azaz

$$|\tilde{0}\rangle = \exp\left(\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left(-\frac{1}{2}|\eta_{\mathbf{p}}|^2 + \eta_{\mathbf{p}}a^\dagger_p\right)\right)|0\rangle\,. \tag{241}$$

A klasszikus mező tehát a részecskék szempontjából egy koherens állapotnak felel meg, ahol az n-részecske állapot megfigyelésének valószínűsége $|\langle\eta|n\rangle|^2 = e^{-|\eta|^2}|\eta|^{2n}/n!$ Poisson-eloszlást mutat minden impulzusra.

A két leírás ekvivalens, nincs arra mód, hogy megállapítsuk, vajon melyik a helyes, azaz mennyi részecsét találunk a klasszikus mezőben. Vagyis a részecske definíció függ attól, hogyan definiálom őket.

Ha a forrás időfüggetlen, a klasszikus mező és a koherens paraméter közvetlenül összefügg:

$$\Phi_0(\mathbf{p}) = \frac{J_\mathbf{p}}{\omega_p^2} \quad \Rightarrow \quad \eta_\mathbf{p} = \sqrt{\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}}\,\Phi_\mathbf{p}. \tag{242}$$

Ha a forrás időfüggő, akkor nincs ennyire közveten kapcsolat, csak azt tudjuk, hogy

$$(\partial_t^2 + \omega_p^2)\Phi_0(t,\mathbf{p}) = J_\mathbf{p}(t) = \sqrt{2\omega_p^3}\,\eta_\mathbf{p}. \tag{243}$$

Ha egy rendszert vákuumállapotából indítok, és a fenti forrással kitérítem, akkor valójában $\eta(t)$-t definiálok, vagyis végig koherens álapotokat kapok. Ugyanakkor az eredeti részecskék nyelvén az időfüggő forrás részecskéket hoz létre.

4.3.3 Pontrészecske

Ahogy fent láttuk, a húr bármilyen klasszikus kitérítése, akár egy pontban is, nem egy-részecske állapot a kvantum rendszerben. Hogyan lehet a vákuumban egy adott hellyel rendelkező részecskét kelteni?

Ez a feladat nem egészen jól definiált, vagyis definíció kérdése, mit is tekintek "pontszerűnek". Annyi biztos, hogy az impulzusa teljesen határozatlan, azaz mindenféle impulzus szerepel benne. Mivel azonban az impulzus sajátállapotok nem normálhatók a szokásos értelemben, a különböző normálási eljárások különböző "pontszerű" részecskét eredményeznek. Annyi biztos, hogy a potnrészecske az $N = 1$ szektorban kell legyen, azaz az $a^\dagger|0\rangle$ állapotok kombinációja. Mivel $\hat\Phi(x)$ egy keltő és egy eltüntető operátorból áll, de az eltüntető operátor a vákuumot nullába viszi, az egy részecske állapot tehát $\hat\Phi(x)|0\rangle$ állapotokkal van összefüggésben. Legegyszerűbben

$$|x\rangle = \hat\Phi(x)|0\rangle\,. \tag{244}$$

Ezek után a határozott impulzusú egy részecske állapot hullámfüggvénye (194) felhasználásával, ha a síkhullám normálása $\mathcal{N}$:

$$\langle 0|\hat\Phi(x)|p\rangle = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2\omega_k}}\,e^{ikx}\,\langle 0|\hat a_k\hat a_p^\dagger|0\rangle \sim e^{ipx}, \tag{245}$$

síkhullám,ami szintén megfelel az elvárásainknak. Egy gyakran használt normálás szerint

$$|p\rangle_{phys} = \sqrt{2\omega_p}a_p^\dagger|0\rangle\,, \tag{246}$$

erre

$$\langle 0|\hat\Phi(x)|p\rangle_{phys} = e^{ipx}. \tag{247}$$

Az ilyen vákuum és valamilyen másik állapot közötti mátrixelemet szokás form faktornak hívni.

4.4 Időfüggés

A Hamilton operátor diagonális állapotaiban az időfüggés triviális:

$$|k_1,n_1;k_2,n_2;\dots k_a,n_a;t\rangle = e^{-iEt}\,|k_1,n_1;k_2,n_2;\dots k_a,n_a;t\rangle\,, \tag{248}$$

ahol E a teljes energia (219).

Heisenberg képben az operátorok időfüggőek. A legegyszerűbb

$$\dot a_k(t) = i[H,a_k] = -i\omega_k a_k \quad \Rightarrow \quad a_k(t) = e^{-i\omega_k t}a_k. \tag{249}$$

Így például az időfüggő téroperátor

$$\hat\Phi(t,x) = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(\hat a_k e^{-i\omega_k t+ikx} + \hat a_k^\dagger e^{i\omega_k t-ikx}\right). \tag{250}$$

A sokrészecske rendszerek időfüggésénél érdekes szempont a részecske-hiány időfüggése. Nézzünk egy $|n\rangle$ állapotot, és egy egy részecskével több $|n+p\rangle$ állapot. Ez utóbbi időfüggése az $|n\rangle$-ből úgy kapható, mint egy extra részecske időfüggése:

$$|n+p,t\rangle = e^{-iE_n t - iE_p t}\,|n+p\rangle = e^{-iE_p t} a_p^\dagger\,|n,t\rangle\,, \tag{251}$$

vagyis az extra részecske időfüggése $e^{-iE_p t}$. Azonban $|n\rangle$-re úgy is tekinthetek, mint az $|n+p\rangle$ állapothoz képest egy p impulzusú lyuk jelenlétét. Ekkor

$$|n,t\rangle = e^{-iE_n t}\,|n\rangle = e^{iE_p t} a_p\,|n+p,t\rangle\,. \tag{252}$$

Vagyis a részecskehiány időfüggése $\sim e^{iE_p t}$, amelyet vagy úgy értelmezünk, mint egy *negatív energiás* részecske jelenlétét, vagy úgy, mint egy *időben visszafelé terjedő* részecskét.

Általában a negatív frekvenciánál megjelenő gerjesztéseket *antirészecskének* nevezzük, és $\overline{|p\rangle}$-vel jelöljük őket. A húr esetében persze nincs külön fizikai állapot az antirészecskéknek, ezért itt a részecskék és antirészecskék ugyanazok, más szóval minden részecske önmaga antirészecskéje. Összetettebb rendszerekben azonban a kétféle állapot különbözik.

A fenti gondolatok szerint az antirészecskék időben visszafelé haladó részecskékkel azonosíthatók. Az idő megfordítása azt is jelenti, hogy a bemenő állapotok kimenő állapotok lesznek, vagyis átvisszük $|p\rangle$-t $\langle p|$ állapotba. Az azonosítás miatt

$$\overline{|p\rangle} \sim \langle p|\,. \tag{253}$$

Az eredeti $|p\rangle$ állapotból kiindulva a fenti állapotokat különböző operációk segítségével hajthatjuk végre

$$\overline{|p\rangle} = C\,|p\rangle\,, \qquad \langle p| = T\,|-p\rangle\,, \qquad |-p\rangle = P\,|p\rangle\,. \tag{254}$$

Itt az első a "töltéstükrözés", a második az időtükrözés (eközben az impulzus is megfordul), a harmadik a megfordított impulzus visszafordítására a tértükrözés. A (253) azt jelenti, hogy e három operáció együttes hatása az egységoperátorral arányos

$$CTP \sim \mathbf{1}. \tag{255}$$

Ez a *CTP tétel*, és minden olyan kvantum rendszerben, ahol a részecske eltüntetése és keltése ugyanazon fizikai folyamat eredménye, teljesülni kell.

5 Részecskék

A rezgő húr gondolatmenetét általánosítva a részecskéket matematikailag általában is valamilyen mező kvantálás utáni energia- és impulzus sajátállapotának képzeljük el. Van azonban néhány szempont, amit a kvantálásnál figyelembe kell venni.

5.1 Térelméletek kvantálása

A térelméletek kvantálásakor ugyanúgy járunk el, mint bármely más rendszernél: szétválasztjuk a konfigurációk mint állapotok reprezentációját az állapotokon végezhető mérésektől. A mezőállapotot tehát valamilyen absztrakt Hilbert-tér elem képviseli, míg a mező értékei mérésből következnek: $\hat\Psi(\mathbf{x})$ mezőmérési operátor és $\hat\Pi(\mathbf{x})$ mező-eltolási operátor várható értékei a rendszer állapotában. Hogy hol mérem a mezőt, azaz $\mathbf{x}$ értéke most teljes mértékben egy index szerepét játssza. A térelméletekben leginkább Heisenberg-képet alkalmazunk, azaz az operátorokhoz társítjuk az időfüggést. Így beszélhetünk $\hat\Psi(x)$ téridő mezőfüggvényről ($x = (t, \mathbf{x})$).

A kvantálási feltételhez azonban a tér definíciója szükséges, ugyanis azt kell kihasználni, hogy az impulzus generálja a tér eltolásait. Az impulzus ugyanakkor a téreltolásokhoz tartozó megmaradó mennyiség, ami a térelméletekben az energia-impulzus tenzor (538) impulzus része kell legyen. Megmutatható, hogy általános térelméletekben is a húr esetén kapott alak formája megmarad:

$$\hat P_i = \int d^d x\,\hat\Pi_\alpha(x)\partial_i\hat\Psi_\alpha(x), \qquad \text{ahol} \quad \Pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Psi_\alpha}. \tag{256}$$

Infinitezimális tér-eltolás hatására

$$\delta\Psi(t,\mathbf{x}) = \Psi(t,\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - \Psi(t,\mathbf{x}) = d\mathbf{x}^i\partial_i\Psi(t,\mathbf{x}) + \mathcal{O}(dx^2). \tag{257}$$

Ezt generálja az impulzus; a (12) képlet alapján, ügyelve az indexek fel- és lehúzására is:

$$\delta\Psi(t,\mathbf{x}) = i[\boldsymbol{P}_i(t),\Psi(t,\mathbf{x})]d\mathbf{x}^i = i\int d^3\mathbf{y}\,[\Pi(t,\mathbf{y})\partial_i\Psi(t,\mathbf{y}),\Psi(t,\mathbf{x})]d\mathbf{x}^i = d\mathbf{x}^i\partial_i\Psi(t,\mathbf{x}). \tag{258}$$

Ezt *két* konzisztens kvantálás tudja teljesíteni. Mivel

$$[AB,C] = ABC - CAB = A(BC+\alpha CB) - (\alpha AC + CA)B = \begin{cases} A[B,C] + [A,C]B, & \text{ha } \alpha = -1 \\ A\{B,C\} - \{A,C\}B, & \text{ha } \alpha = 1, \end{cases} \tag{259}$$

Ezért lehetséges kommutátorral vagy antikommutátorral kvantálni:

$$\begin{aligned} &[\Psi(t,\mathbf{x}),\Pi(t,\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad [\Psi(t,\mathbf{x}),\Psi(t,\mathbf{y})] = 0, \qquad \text{vagy} \\ &\{\Psi(t,\mathbf{x}),\Pi(t,\mathbf{y})\} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad \{\Psi(t,\mathbf{x}),\Psi(t,\mathbf{y})\} = 0. \end{aligned} \tag{260}$$

Az előbbieket nevezzük bozonoknak, az utóbbiakat fermionoknak. Fontos, hogy a kvantálás egy idejű operátorokra vonatkozik.

Az időfejlődést az infinitezimális idő-eltolás generátorával állíthatjuk elő, ez a Hamilton-operátor. Ettől elvárjuk, hogy megegyezzen az idő-eltolás során előálló megmaradó mennyiséggel, vagyis $E = \int d^3\mathbf{x}\,T^{00}$ energiával.

5.2 A spin-statisztika tétel

Az impulzus és a mező felcserélésére vagy kommutátort vagy antikommutátort kell használni. A spin-statisztika tétel szerint egész spinű részecskékre kommutátort, félegész spinűekre antikommutátort kell használni. Hogy megértsük a tétel lényegét, vizsgáljuk meg a permutációk és forgatások kapcsolatát egy feles spinű állapot esetén:

Vegyünk két elektront az $\mathbf{x} = (x_0,0,0)$ és az $\mathbf{x} = (-x_0,0,0)$ helyen az egyszerűség kedvéért s állapotban, mindkettő sipnje legyen z irányú, felfelé mutató. A közös hullámfüggvényt vegyük egyelőre két hullámfüggvény szorzatának, azaz

$$\Psi_{12}(t,\mathbf{x},\mathbf{x}') = |\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle\ \ \Psi_s(t,x-x_0,y,z)\Psi_s(t,x'+x_0,y',z'). \tag{261}$$

Mi történik a közös sajátfüggvénnyel, ha megcseréljük a két részecskét? A két részecske felcserélése ebben a speciális esetben elérhető úgy is, hogy z tengely körül elforgatom a rendszert 180°-kal[4]! Ekkor $(x,y,z)\to(-x,-y,z)$, de mivel s állapotban voltak a részecskéim, a hullámfüggvény térbeli része nem változik – attól eltekintve, hogy most $x-x_0$ helyett $x+x_0$ jelenik meg. A hullámfüggvény azonban még spinor indexekkel is rendelkezik, azaz ott is forgatni kell. A forgatást végző operátor

$$\hat{O} = e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_3} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{262}$$

azaz a felfelé mutató spint egyszerűen i-vel szorozza. Ezért a részecskék felcserélése után kapott hullámfüggvény

$$\Psi_{21}(t,\mathbf{x},\mathbf{x}') = -|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle\ \ \Psi_s(t,x+x_0,y,z)\Psi_s(t,x'-x_0,y',z') = -\Psi_{12}(t,\mathbf{x}',\mathbf{x}), \tag{263}$$

vagyis kaptunk egy extra -1 faktort. Bozonikus esetben a 180°-kal való elforgatás operátora ±1-et ad, ami két azonos hullámfüggvény esetében mindig 1-re egészíti ki egymást.

Ennek alapján tehát a részecskéket keltő operátoroknak antikommutálniuk kell. Mivel a kommutátorból, ahogy láttuk, kommutáló részecskéket kapunk, ezért antikommutátort kell vennünk:

$$\{\Psi_\alpha(t,\mathbf{x}),\Pi_\beta(t,\mathbf{x}')\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad\Rightarrow\quad \{\Psi(t,\mathbf{x}),\Psi^\dagger(t,\mathbf{x}')\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{264}$$

[4]Ehhez legalább két dimenziós tér kell; 1D rendszerekben a statisztika nem kötődik a forgatásokhoz, így nem igaz a spin-statisztika tétel sem. Lehetnek pl. egzotikus statisztikájú "anyonok"

5.3 (Bi) spinor mezők

A valóságban megjelenő részecskékre megkötés, hogy ha Lorentz-transzformációt végzünk a rendszeren, akkor az új, trenszformált koordinátarendszerben is ugyanolyan típusú részecskéket lássunk. Ez azt jelenti, hogy a részecskéket reprezentáló mezők a Lorentz csoport ábrázolásai kell, hogy legyenek.

A Lorentz csoport olyan $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ lineáris leképzásekből áll, amelyekre $x' = \Lambda x$ négyeshossza invariáns $(x')^2 = x^2$. Indexesen kiírva $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\cdot\nu} x^{\nu}$, és a hossz invarianciájának feltétele $x'^{\nu} x'_{\nu} = x^{\nu} x_{\nu}$. Innen következik, hogy

$$\Lambda^{\mu}_{\cdot\rho} \Lambda^{\nu}_{\cdot\sigma} g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma}, \qquad \Lambda^{\cdot\varrho}_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\cdot\sigma} = \delta^{\varrho}_{\sigma}, \qquad (\Lambda^{-1})^{\varrho}_{\cdot\nu} = \Lambda^{\cdot\varrho}_{\nu}. \tag{265}$$

Itt $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ metrikus tenzor. Bővebben a csoportszerkezetről és az ábárzolásairól a B függelékben olvashatunk.

Az ott található analízis eredménye az, hogy a Lorentz csoport legegyszerűbb (alap) ábrázolása egy $\Psi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{C}^2$ mezőn valósul meg a

$$L = e^{-\frac{i}{2}(\omega_i + i u_i)\sigma_i} \tag{266}$$

mátrix segítségével, ahol σ_i-ka Pauli mátrixok. Fizikailag ω_i a három tengely körüli forgatást jelenti, ez a nemrelativisztikus eset $SO(3)$ szinnemtriája esetén is megtalálható. Az u_i-k a boost (mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérés) paraméterei, pontosabban az adott irányú eltolás rapiditása: $\tanh u = v/c$. Ezek nem unitér leképzést valósítanak meg: ez a boost hatására egymásba alakuló negyesvektorok transzformációjára jellemző.

Ez a mátrix egységnyi determinánsú, hiszen

$$\ln \det L = \mathrm{Tr} \ln L = -\frac{i}{2}(\omega_i + i u_i)\,\mathrm{Tr}\,\sigma_i = 0. \tag{267}$$

Általában, ha V egy ábrázolás, akkor

$$V,\ V^*,\ V^{T-1},\ V^{\dagger -1} \tag{268}$$

mind ábrázolások. Most $L^{T\,-1}$ és L unitér ekvivalensek az egységnyi determináns miatt:

$$\varepsilon_{ij} \det L = \varepsilon_{i'j'} L_{ii'} L_{jj'} \quad \Rightarrow \quad (i\varepsilon)^{\dagger}_{ki} L_{ii'} (i\varepsilon)_{i'j'} L^{T}_{j'j} = \delta_{kj} \quad \Rightarrow \quad L^{T\,-1} = (i\varepsilon)^{\dagger} L (i\varepsilon), \tag{269}$$

hiszen $(i\varepsilon)^{\dagger} = (i\varepsilon)^{-1} = (i\varepsilon)$, unitér mátrix. Így két független választásunk van: L vagy $L^{\dagger\,-1}$. Ez a két mátrix a Lorentz-csoport két ábrázolásának felel meg, nevezzük a hozzájuk tartozó tereket Ψ_L és Ψ_R-nek. Ezekre

$$\Psi'_R = L \Psi_R, \qquad \Psi'_L = L^{\dagger -1} \Psi_L. \tag{270}$$

Ezek a Weyl-spinorok. A két transzformáció viszonya:

$$L^{\dagger -1} = e^{-\frac{i}{2}(\omega_i - i u_i)\sigma_i} = L|_{\omega_i \to \omega_i, u_i \to -u_i}, \tag{271}$$

azaz nem változik a forgatás, de előjelet vált a mozgó vonatkoztatási rendszer sebessége. Ez pontosan a tértükrözés hatása: tehát P tértükrözés olyan kell legyen, hogy

$$PLP = L^{\dagger -1} \quad \Rightarrow \quad P\Psi_L = \Psi_R, \quad P\Psi_R = \Psi_L. \tag{272}$$

Ha tehát a tértükrözést is ábrázolni akarjuk, akkor a Ψ_L és Ψ_R terek együttesét kell kezelni. Ezek a bispinorok:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{273}$$

Valójában a fenti alak a Weyl-reprezentáció, a Dirac által eredetileg javasolt alak ennek unitér transzformáltja.

Hogy egy invariáns Lagrange-függvényt tudjunk felépíteni nézzük meg, először a következő kifejezést nézzük meg

$$(\Psi^*_R \Psi_L)' = \Psi^*_R L^{\dagger} L^{\dagger -1} \Psi_L = \Psi^*_R \Psi_L, \tag{274}$$

azaz elő tudtunk állítani egy Lorentz-invariáns kombinációt. Hasonlóan $\Psi^*_L \Psi_R$ is invariáns.

A másik invariáns megtalálásához bebizonyítható, hogy $L^\dagger \bar\sigma^\mu L$ (ahol $\bar\sigma^\mu = \sigma_\mu$), és $L^{-1}\bar\sigma^\mu L^{-1\dagger}$ az eredeti $\bar\sigma^\mu$ illetve σ^μ Lorentz transzformáltjai. Emiatt

$$\Psi_R^* \bar\sigma^\mu i\partial_\mu \Psi_R, \qquad \Psi_L^* \sigma^\mu i\partial_\mu \Psi_L \tag{275}$$

invariánsok, azaz a Lagrange-függvény részét képezhetik.

Szokás bevezetni a Dirac-mátrixokat és a Dirac-adjungáltat

$$\bar\Psi = \Psi^\dagger \gamma_0, \qquad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar\sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix} = P, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{276}$$

Ezekre igaz (Clifford-algebra)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{277}$$

Ilyen módon a L-R szimmetrikus, azaz tértükrözés-invariáns Lagrange-függvény úgy írható, mint

$$\mathcal{L} = \bar\Psi i\partial\!\!\!/ \Psi - m\bar\Psi\Psi, \tag{278}$$

a Dirac-féle Lagrange-függvény (valójában két együtthatót vezethettünk volna be, de a terek normálásával az egyiket 1-nek választhatjuk). Az ebből származó mozgásegyenlet a

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar\Psi} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar\Psi} = (i\partial\!\!\!/ - m)\Psi, \tag{279}$$

a Dirac-egyenlet.

5.4 Lorentz-vektormezők, mértékelméletek

A Lorentz-csoport csoport definiáló ábrázolása az A^μ Lorentz-vektormezőkhöz vezet. Ezek transzformálódása a Lorentz-csoport alatt:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\nu} A^\nu. \tag{280}$$

Milyen Lorentz invariáns kombináció szerkeszthető ezekből? Használhatjuk a ∂_μ deriválást, is, így lehet például:

$$A_\mu A^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu, \quad \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu. \tag{281}$$

Ezek mindegyike szerepelhet a Lagrange-függvényben. Kiemelkedő szerepe van azonban a következő kombinációnak:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad \text{ahol} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{282}$$

ez írja le az elektromágneses tér Lagrange függvényét. Kifejtve

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \right). \tag{283}$$

Képezhetjük az elektromos és mágneses térerősségeket $F^{0i} = E_i$ és $F^{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$ alapján. Így a fenti alak

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(E^2 - B^2 \right). \tag{284}$$

A mozgásegyenletek:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} E = 0, \quad \partial_0 E - \operatorname{rot} B = 0, \tag{285}$$

szabad (forrásmentes) Maxwell egyenletek. A maradék két Maxwell egyenlet:

$$\partial_\mu \tilde F^{\mu\nu} = 0, \qquad \text{ahol} \quad \tilde F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma}, \tag{286}$$

ahol $\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$ teljesen antiszimmetrikus. A fenti egyenlet valójában azonosság (Bianchi), ami ε antiszimmetriája illetve a vegyes parciális deriváltak szimmetriája miatt teljesül.

A fenti Lagrange függvénynek van egy különleges szimmetriája: ha $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \alpha(x)$ *helyfüggő* (mérték) transzfromáció, akkor a térerősségtenzor változása

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu = 0. \tag{287}$$

Vagyis a terek mozgását meghatározó Lagrange-függvény mértékinvariáns.

Az energia-impulzus tenzor kifejezése

$$T_{\mu\nu} = \partial_\nu A^\varrho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\varrho)} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} = \partial_\nu A^\varrho F_{\varrho\mu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} FF. \tag{288}$$

Ez nem szimmetrikus μ-ν-ben; azonban hozzáadhatjuk

$$\partial^\varrho (A_\nu F_{\varrho\mu}) \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu \partial^\varrho (A_\nu F_{\varrho\mu}) = 0, \tag{289}$$

hiszen F antiszimmetrikus μ-ν-ben, míg a vegyes derivált szimmetrikus. Ezért a szimmertikus energia-impulzus tenzor alakja:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = g^{\varrho\varrho'} F_{\nu\varrho'} F_{\varrho\mu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} FF. \tag{290}$$

Speciálisan

$$\bar{T}_{00} = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right). \tag{291}$$

Mivel a tér spinje 1, ezért bozon, vagyis kommutátorral kell kvantálni. Ilyet már láttunk korábban a skalár tér esetén. Először meg kell mondani a kanonikusan konjugált momentumot:

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^0 A^\mu} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 \quad \Rightarrow \quad \Pi^0 \equiv 0! \tag{292}$$

Ez annak a következménye, hogy a Lagrange-függvény mértékinvariáns. Ezért nem róhatjuk ki a $[A^0, \Pi^0] = i\delta$ kommutációs relációt!

Hogy orvosoljuk a bajt, mértéket kell rögzítenünk. A klasszikus Lorenz-mérték esetén

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{293}$$

Ezzel a Lagrange-függvény alakja

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu = \frac{1}{2}(-g^{\nu\nu'})\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A_{\nu'} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_0 \partial^\mu A_0 + \frac{1}{2}\partial_\mu A_i \partial^\mu A_i. \tag{294}$$

Láthatóan az A_i terek teljesen olyanok, mint 3 független $m = 0$ tömegű skalártér. Az A_0 tér előjele azonban különbözik – ez az az ár amit fizetnünk kell a mértékrögzítésért. Most már definiálhatók a kanonikusan konjugált impulzusok

$$\Pi^\mu = -\partial_0 A_\mu \quad \Rightarrow \quad \Pi_0 = -\partial_0 A_0, \qquad \Pi_i = \partial_0 A_i. \tag{295}$$

A kommutációs relációk tehát

$$[A_\mu(t,\mathbf{x}), \Pi_\nu(t,\mathbf{y})] = i\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad [A_\mu(t,\mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t,\mathbf{y})] = -ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{296}$$

a többi nulla.

Lehet a Coulomb mértéket is rögzíteni:

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{297}$$

az A^0 pedig a töltéssűrűségből következik a klasszikus kifejezéssel: ennek nincs dinamikája, azaz nem tekintjük kvantumtérnek. Emiatt nem probléma, hogy hozzá nem tartozik kanonikusan konjugált impulzus. Ekkor csak két szabadsági fok marad meg, ezeket kell kvantálni, amelyek megfelelnek az elektromágneses sugárzás transzverzális komponenseinek. A Lagrange függvényben megmarad:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu A_i \partial^\mu A_i \Big|_{\mathrm{div}A=0}. \tag{298}$$

6 A Hamilton operátor diagonalizálása

Három elméletet ismertünk meg, ezek Lagrange függvénye

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}((\partial_\mu \Phi)^2 - m^2\Phi^2)\\ \mathcal{L} &= \bar{\Psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\Psi\\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu A_i \partial^\mu A_i - \frac{1}{2}\partial_\mu A_0 \partial^\mu A_0\end{aligned} \tag{299}$$

A kanonikusan konjugált impulzusok $\Pi = \dot{\Phi}$ illetve $\Pi = i\Psi^\dagger$. A Hamilton függvények alakja ezzel:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\Phi(-\partial_i^2 + m^2)\Phi\\ \mathcal{H} &= \bar{\Psi}(i\partial_i\gamma^i - m)\Psi \equiv \Psi^\dagger h \Psi.\end{aligned} \tag{300}$$

A mértéktér Hamilton függvénye a skalártérrel való rokonságából következik. Tulajdonképpen a skalár elméleteket is átírhatjuk a fermionikus alakra, ha bevezetjük a

$$h^2 = -\triangle + m^2 \tag{301}$$

differenciáloperátort, és

$$\Psi = \sqrt{\frac{h}{2}}\Phi + \frac{i}{\sqrt{2h}}\Pi \tag{302}$$

jelölést. Ekkor

$$\mathcal{H} = \Psi^\dagger h \Psi. \tag{303}$$

Feltesszük tehát, hogy ez a kifejezés adja meg a Hamilton sűrűséget teszőleges kvadratikus elmélet esetén.

A kvantáláshoz:

$$[\hat{\Phi}_\alpha(x), \hat{\Pi}_\beta(y)]_\pm = i\delta(x-y), \qquad [\hat{\Phi}_\alpha(x), \hat{\Phi}_\beta(y)]_\pm = [\hat{\Pi}_\alpha(x), \hat{\Pi}_\beta(y)]_\pm = 0, \tag{304}$$

ami átfogalmazható

$$[\hat{\Psi}_\alpha(x), \hat{\Psi}^\dagger_\beta(y)]_\pm = \delta(x-y), \qquad [\hat{\Psi}_\alpha(x), \hat{\Psi}_\beta(y)]_\pm = [\hat{\Psi}^\dagger_\alpha(x), \hat{\Psi}^\dagger_\beta(y)]_\pm = 0, \tag{305}$$

ami igaz mind a fermionikis mind a bozonikus esetre.

Érdemes bevezetni az eltüntető operátort:

$$\hat{\Psi}_\alpha(x) = \sum_r \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} u_{\alpha r\mathbf{k}} \hat{a}_{r\mathbf{k}}, \tag{306}$$

ahol $u_{\alpha r\mathbf{k}}$ minden $\mathbf{k}$-ra teljes ortogonális rendszert alkotnak

$$\sum_r u^*_{\alpha r\mathbf{k}} u_{\beta r\mathbf{k}} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \sum_\alpha u^*_{\alpha r\mathbf{k}} u_{\alpha s\mathbf{k}} = \delta_{rs}. \tag{307}$$

Az inverz reláció ekkor

$$\hat{a}_{r\mathbf{k}} = \sum_\alpha \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} u^*_{\alpha r\mathbf{k}} \hat{\Psi}_\alpha(x). \tag{308}$$

Emiatt

$$[\hat{a}_{r\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{s\mathbf{q}}]_\pm = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}), \qquad [\hat{a}_{r\mathbf{k}}, \hat{a}_{s\mathbf{q}}]_\pm = [\hat{a}^\dagger_{r\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{s\mathbf{q}}]_\pm = 0. \tag{309}$$

Beírva ezt az alakot a Hamilton operátorba

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\mathbf{x} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{a}^\dagger_{r\mathbf{k}} u^*_{\alpha r\mathbf{k}}\right) h_{\alpha\beta} \left(e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} u_{\beta s\mathbf{q}} \hat{a}_{s\mathbf{q}}\right). \tag{310}$$

Figyelembe véve, hogy $h_{\alpha\beta}$ deriváltat tartalmaz, ez a következő alakot ölti

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \hat{a}^\dagger_{r\mathbf{k}} u^*_{\alpha r\mathbf{k}} h_{\alpha\beta\mathbf{k}} u_{\beta s\mathbf{k}} \hat{a}_{s\mathbf{k}}. \tag{311}$$

Válasszuk az u vektorokat $\omega_{\mathbf{k}}$ sajátvektorának

$$h_{\alpha\beta\mathbf{k}} u_{\beta s\mathbf{k}} = E_{s\mathbf{k}} u_{\beta s\mathbf{k}}. \tag{312}$$

Ez valójában valós időben kifejezve úgy is írható, mint

$$(i\partial_t - h)u = 0, \qquad u(t) = ue^{-iEt}, \tag{313}$$

vagyis u a kvantummechanikai energia sajátfüggvény. Az ortogonalitást kihasználva ekkor

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_r E_{rk} \hat{a}^\dagger_{r\mathbf{k}} \hat{a}_{r\mathbf{k}}. \tag{314}$$

A Hamilton operátor alakja most már megegyezik a harmonikus oszcillátorok együttesével, ezért megoldásához ugyanazon eszközöket használjuk, mint a húrnál. Létezik egy vákuum $|0\rangle$, amelyre $\hat{a}_{s\mathbf{k}} |0\rangle = 0\ \forall a$. A részecskállapotokat a

$$|\Psi\rangle = |\mathbf{k}_1, n_1, s_1; \ldots \mathbf{k}_i, n_i, s_i; \ldots\rangle = N_1 (\hat{a}^\dagger_{s_1\mathbf{k}_1})^{n_1} \ldots N_i (\hat{a}^\dagger_{s_i\mathbf{k}_i})^{n_i} \ldots |0\rangle \tag{315}$$

módon képezzük, ahol N_i normálási faktorok. Fermionok esetén $(a^\dagger)^2 = 0$, emiatt $n_i = 0, 1$ lehet. A húrnál látottak alapján ez az állapot energia és impulzus sajátállapot:

$$\hat{H} |\Psi\rangle = \left(\sum_i n_i E_{r_i\mathbf{k}_i} \right) |\Psi\rangle, \qquad \hat{P} |\Psi\rangle = \left(\sum_i n_i \mathbf{k}_i \right) |\Psi\rangle. \tag{316}$$

Relativisztikus esetben a Hamilton operátor magfüggvényének csak két sajátértéke lehet: $E_k = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Bozonikus esetben csak a pozitív gyök marad, hiszen az eredeti Hamilton operátorból csak a formai hasonlóság miatt vontunk gyököt. A fermionikus esetben azonban h 4×4-es mátrix. Ennek két pozitív és két negatív energia sajátértéke van, ezek mindegyike 2D-s altér, vagyis ezt még fel kell bontani $r = 1, 2$ vektorokkal. A pozitív energiás altér felbontásához használjuk az $u_{r\mathbf{k}}$ illetve $a_{r\mathbf{k}}$, a negatív energiás altérhez $v_{r\mathbf{k}}$ és $\bar{b}_{r\mathbf{k}}$ jelölést. Ekkor az energia

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{k}} \sum_r (a^\dagger_{r\mathbf{k}} a_{r\mathbf{k}} - \bar{b}^\dagger_{r\mathbf{k}} \bar{b}_{r\mathbf{k}}). \tag{317}$$

Ezzel az a probléma, hogy a $\bar{b}^\dagger$-ek által előállított állapotok energiája negatív, és tetszőlegesen nagy negatív energiát elő lehet ezzel állítani. Ha van valamilyen kölcsönhatás, például fotont lehet kisugározni, akkor a negatív energiás állapotok egyre jobban betöltődnek, és eközben energiát sugárzunk ki. A fent definiált vákuum tehát nem stabil.

A megoldás az lehet, hogy új vákuumot definiálunk, ahol minden negatív energiás állapot be van töltve:

$$\prod_{r,\mathbf{q}} \bar{b}^\dagger_{r\mathbf{q}} |0\rangle = |0\rangle_{Dt}, \tag{318}$$

az index jelentése "Dirac-tenger". Mivel $(\bar{b}^\dagger)^2 = 0$, ezért erre a vákuumra

$$\bar{b}^\dagger_{s\mathbf{k}} |0\rangle_{Dt} = 0 \quad \forall s, \mathbf{k}. \tag{319}$$

Emiatt a $\bar{b}^\dagger_{s\mathbf{k}}$ valójában eltüntető operátorként hat a Dirac tenger vákuumon. Bevezethetünk tehát $b_{s\mathbf{k}} = \bar{b}^\dagger_{s\mathbf{k}}$ új jelölést, ennek megfelelően $b^\dagger_{s\mathbf{k}} = \bar{b}_{s\mathbf{k}}$. Ezek ugyanolyan antikommutációs relációval rendelkeznek,

$$\{b_{s\mathbf{k}}, b^\dagger_{r\mathbf{q}}\} = \{\bar{b}^\dagger_{s\mathbf{k}}, \bar{b}_{r\mathbf{q}}\} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \tag{320}$$

Vagyis ha $b_{s\mathbf{k}}$ az eltüntető operátor, $b^\dagger_{s\mathbf{k}}$ részecskét kelt: ezek az antirészecskék. A Hamilton operátor kifejezése:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{k}} \sum_r (a^\dagger_{r\mathbf{k}} a_{r\mathbf{k}} - b_{r\mathbf{k}} b^\dagger_{r\mathbf{k}}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{k}} \sum_r (a^\dagger_{r\mathbf{k}} a_{r\mathbf{k}} + b^\dagger_{r\mathbf{k}} b_{r\mathbf{k}}) + \text{konstans}. \tag{321}$$

A konstans energia a Dirac tenger vákuum és az eredeti vákuum energiakülönbsége. Az új, Dirac tenger vákuum felett már pozitív energiás minden gerjesztés. Egy részecske esetén

$$|\mathbf{k}, r\rangle = a^\dagger_{r\mathbf{k}} |0\rangle_{Dt}\,, \qquad \overline{|\mathbf{k}, r\rangle} = b^\dagger_{r\mathbf{k}} |0\rangle_{Dt}\,. \tag{322}$$

Végülis tehát a keltő- eltüntető operátorok segítségével felírt téroperátorok alakja, visszatérve az eredeti jelölésre, és a szokásos normálást illetve impulzuskiosztást használva:

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(e^{i\mathbf{kx}} a_{\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{kx}} a^\dagger_{\mathbf{k}} \right) \\
\hat{\Psi}_\alpha(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{r=1,2} \left(e^{i\mathbf{kx}} u_{\alpha r\mathbf{k}} \hat{a}_{r\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{kx}} v_{\alpha r\mathbf{k}} \hat{b}^\dagger_{r\mathbf{k}} \right) \\
\hat{A}^i(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{t=1,2} \left(e^{i\mathbf{kx}} \varepsilon^i_{t\mathbf{k}} \hat{a}_{t\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{kx}} \varepsilon^{*i}_{t\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{t\mathbf{k}} \right).
\end{aligned} \tag{323}$$

Az utolsó sorban a Coulomb-mértékben érvényes kifejezést írtuk fel. A $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ feltétel teljesítéséhez a polarizációs mátrixra

$$k_i \varepsilon^i_{t\mathbf{k}} = 0 \tag{324}$$

feltétel kell teljesüljön.

Mindezek után minden a természetben előforduló részecskét a fenti módon kell leírni. A részecske definíció, úgy tűnik, ezzel lezárható.

6.1 A kvantált húr időfüggése

Hogy a propagátort meghatározzuk, szükségünk lesz a rendszer időfejlődésének meghatározására. A térelméletben leginkább Heisenberg képet szoktak használni, vagyis az időfüggést az operátorokhoz rendeljük. Kezdjük először a kitérést mérő és kitérítő operátorokkal. A kanonikus kommutációs relációkat (188) használva látható, hogy

$$\partial_t \hat{\Phi} = i[\hat{H}, \Phi] = \hat{\Pi}, \qquad \partial_t \hat{\Pi} = i[\hat{H}, \Pi] = (\partial_x^2 - M^2)\hat{\Pi}. \tag{325}$$

Ez azt jelenti, hogy a téroperátor a klasszikus mozgásegyenleteknek tesz eleget. Valójában ez mindig igaz, és a Poisson zárójelek és a kommutátor közötti szoros kapcsolat következménye. Fourier-térben a mozgásegyenlet

$$(\partial_0^2 + \omega_k^2)\hat{\Phi}(t, k) = 0, \tag{326}$$

innen a

$$\hat{\Phi}(t = t_0, k) = \hat{\Phi}(t_0, k), \qquad \partial_t \hat{\Phi}(t = t_0, k) = \hat{\Pi}(t_0, k) \tag{327}$$

kezdeti feltételekkel kapjuk

$$\hat{\Phi}(t, k) = \hat{\Phi}(t_0, k) \cos \omega_k (t - t_0) + \hat{\Pi}(t_0, k) \frac{\sin \omega_k (t - t_0)}{\omega_k}. \tag{328}$$

A fenti kifejezés mindkét tagját lehet a retardált propagátornak értelmezni. Szokásosan a második tagot szokták venni, az első ennek időderiváltja. Szóval

$$G_{ret}(t, k) = -\Theta(t) \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k}. \tag{329}$$

A spektrál függvény pedig az $iG_{ret}(t) = \Theta(t)\varrho(t)$ összefüggésből (l. (41) egyenlet)

$$\varrho(t, k) = -i \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k}. \tag{330}$$

A kvantálási reláció miatt

$$\varrho(t,x) = \left\langle 0 \left| [\hat{\Phi}(t,x), \hat{\Phi}(0)] \right| 0 \right\rangle . \tag{331}$$

Általában ezt az alakot lehet használni a spektrum felderítésére.

Frekvencia térben ezek a mennyiségek:

$$G_{ret}(k_0,k) = \frac{1}{(k_0+i\varepsilon)^2 - \omega_k^2}, \qquad \varrho(k_0,k) = \frac{2\pi}{2\omega_k}(\delta(k_0-\omega_k) - \delta(k_0+\omega_k)) = 2\pi\,\mathrm{sgn}(k_0)\delta(k_0^2-\omega_k^2). \tag{332}$$

Látható módon a spektrumban két vonal jelent meg, egy a pozitív, a másik a negatív frekvenciákon. Ez közvetlenül annak a következménye, hogy $\hat{\Phi}$ mozgásegyenlete kvadratikus volt. A kvadratikus mozgásegyenlet másik következménye volt az is, hogy $\hat{\Phi}$ részecskét kelteni és eltüntetni is tud. A negatív frekvenciákon megjelenő spektrumvonal tehát a részecske eltüntetéssel kapcsolható össze. A negatív frekvencia azt is jelenti, hogy $e^{ik_0t} = e^{-ik_0(-t)}$, azaz mintha pozitív frekvenciás részecske haladna visszafelé az időben.

A keltő és eltüntető operátorok időfüggését is kidolgozhtajuk:

$$\partial_t a_k = i[\hat{H}, a_k] = -i\omega_k a_k \quad \Rightarrow \quad a_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t}. \tag{333}$$

A pontszerű kezdőállapotból indított hullámfüggvény

$$i\Delta(t,x,t_0,x_0) = \langle x,t|x_0,t_0\rangle = \left\langle 0|\hat{\Phi}(t,x)\hat{\Phi}(t_0,x_0)|0\right\rangle \tag{334}$$

a tér-mérő operátor korrelációs függvénye lesz. Mivel a rendszer tér- és időeltolás invariáns, csak a tér- és időargumentumok különbségétől függ a propagátor $\Delta(t-t_0, x-x_0)$. Behelyettesítve a $\hat{\Phi}$ (194) képletébe

$$i\Delta(t,x) = \int \frac{dk}{2\pi}\frac{dq}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{4\omega_k\omega_q}} \left\langle 0 \left| \left(\hat{a}_k e^{-i\omega_k t+ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t-ikx}\right)\left(\hat{a}_q + \hat{a}_q^\dagger\right) \right| 0 \right\rangle = \int \frac{dk}{2\pi}\,\frac{e^{-i\omega_k t+ikx}}{2\omega_k}. \tag{335}$$

Fourier-térben tehát

$$i\Delta(t,k) = \frac{e^{-i\omega_k t}}{2\omega_k}, \qquad i\Delta(k_0,k) = \frac{1}{2\omega_k} 2\pi\delta(k_0-\omega_k). \tag{336}$$

Ez a spektrum pozitív energiás felét adja meg.

Egy speciális propagátort kapunk akkor, ha $t > t_0$-ra a részecske t_0-ból indul, de $t < t_0$-ra t-ből:

$$iG_F(t,x) = \Theta(t-t_0)\left\langle 0|\hat{\Phi}(t,x)\hat{\Phi}(t_0,x_0)|0\right\rangle + \Theta(t_0-t)\left\langle 0|\hat{\Phi}(t_0,x_0)\hat{\Phi}(t,x)|0\right\rangle . \tag{337}$$

Ez a kauzális, vagy *Feynman-propagátor*. Fourier-térben

$$G_F(k_0,k) = \frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon}. \tag{338}$$

7 Anyag és sugárzás kölcsönhatása

Hogyan képes kölcsönhatni anyag, azaz a fermiontér, és a sugárzás, azaz a fotontér? Ehhez fel kell írni a Lagrange-függvényt, amely tartalmazza a fermion- és a fotonteret is, és Lorentz invariáns.

Ilyen tagból sokféle lehet, azonban van egy elv, amely lerögzíti, milyen módon kell a kölcsönhatást megkeresni. A Dirac-féle Lagrange-függvénynek van egy globális $U(1)$ szimmetriája, ami azt jelenti, hogy

$$\Psi' = e^{-ie\alpha}\Psi, \qquad \bar{\Psi}' = e^{ie\alpha}\bar{\Psi} \tag{339}$$

transzformáció hatására ugyanaz marad a Lagrange függvény. Ha azonban α helyfüggő (lokális transzformáció), akkor a Lagrange-függvény nem marad invariáns

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi}'(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi' = e^{ie\alpha}\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{-ie\alpha}\Psi = \mathcal{L} + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\alpha. \tag{340}$$

Ha azonban megváltoztatjuk a deriválást egy új tér bevezetésével

$$i\partial_\mu \to i\nabla_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu, \tag{341}$$

akkor

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi}'(i\not{\nabla}' - m)\Psi' = e^{ie\alpha}\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A'_\mu - m)e^{-ie\alpha}\Psi = \mathcal{L} + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi(\partial_\mu\alpha - \delta A_\mu). \tag{342}$$

Ha tehát

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha, \tag{343}$$

akkor a Lagrange-függvény *lokálisan is invariáns marad.*

Ha tehát megköveteljük, hogy egy globális szimmetriával rendelkező szabad részecskéket leíró modell szimmetriája lokális legyen, akkor ezt úgy tehetjük meg, hogy bevezetünk (általánosan a szimmetria minden generátorához) egy mértékteret, amellyel a deriválást kovariáns deriválttá tesszük. Ilyen módon kölcsönhatást generálunk a részecske és a mértéktér között. Ez a *mértékelv* (gauge-elv), a globális szimmetria "gauge-elése". Úgy tűnik, az Univerzumban megjelenő összes kölcsönhatást helyesen írhatjuk le a mértékelv segítségével. Az elektromos kölcsönhatáshoz az U(1) szimmetriát kellet gauge-elni, a gyenge kölcsönhatáshoz az SU(2) csoportot (ízek), az erős kölcsönhatáshoz az SU(3) csoportot (színek), a gravitációhoz a Lorenztcsoportot.

A kapott Lagrange-függvényhez hozzáadhatjuk a mértéktér már látott szabad alakját

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - ieA_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \tag{344}$$

Ez a kvantum-elektrodinamika (QED) Lagrange-függvénye. Ebben az elméletben a mértéktér az elektromágneses négyesáramhoz kapcsolódik. Valóban, a Dirac-egyenlet miatt

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad -i\partial^\mu\Psi^\dagger\gamma^\dagger_\mu - m\Psi^\dagger = 0 \quad \Rightarrow \quad (-i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\bar{\Psi} = 0, \tag{345}$$

mert $\gamma_0\gamma^\dagger_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu$, a $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ összefüggés miatt. Ennek következménye

$$0 = \bar{\Psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\Psi - [(-i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\bar{\Psi}]\Psi = i\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi), \tag{346}$$

vagyis mérlegegyenletet kaptunk rá (megmaradó áram). A nulladik komponens $e\Psi^\dagger\Psi = e|\Psi|^2 = \varrho$ az elektron megtalálási valószínűsége a töltésével súlyozva: ez a töltéssűrűség.

Ha az anyagteret nem kvantum-térelmélettel, hanem kvantummmechanikával akarjuk leírni, ugyanezt a formulát használjuk: a kölcsönhatáshoz a mértéktér az elektromos négyesáramhoz csatolódik. Mivel a négyesáram klasszikus mechanikában

$$j^\mu = e(c, \mathbf{v}), \tag{347}$$

ezért a kölcsönhatási tag ($c = 1$) rendszerben

$$L_{kh} = -e\Phi + e\mathbf{v}\mathbf{A}. \tag{348}$$

A teljes Lagrange-függvény

$$L = -m\sqrt{1 - v^2} - e\Phi + e\mathbf{v}\mathbf{A}. \tag{349}$$

Coulomb-mértéket használva $\Phi \to 0$. A kanonikusan konjugált impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2}} + eA_i. \tag{350}$$

A sebesség kifejezése

$$v^2 = \frac{\tilde{p}^2}{m^2 + \tilde{p}^2}, \qquad \tilde{p}_i = p_i - eA_i. \tag{351}$$

Emiatt a Hamilton-függvény Coulomb-mértékben

$$H = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2}} + e\mathbf{v}\mathbf{A} + m\sqrt{1 - v^2} - e\mathbf{v}\mathbf{A} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} = \sqrt{\tilde{p}^2 + m^2}. \tag{352}$$

Ez pontosan olyan, mint egy szabad részecske Hamilton-függvénye, csak az impulzust kell módosítani. A mérték-elv klasszikus megfelelője tehát az, hogy a szabad elmélet impulzusát helyettesíteni kell a mértéktérrel eltolt impulzussal

$$\mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \tag{353}$$

Nemrelativisztikus esetben tehát

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{2m}\left(\mathbf{pA} + \mathbf{Ap}\right) + \frac{e^2}{2m}A^2, \tag{354}$$

ahol figyeltünk arra, hogy kvantummechanikában nem felcserélhető p és A. A kölcsönhatási Hamilton-operátor tehát

$$H_I = -\frac{e}{2m}\left(\mathbf{pA} + \mathbf{Ap}\right). \tag{355}$$

Ekvivalens megfogalmazás: a Lagrange-függvényben egy teljes időderivált klasszikusan nem számít. Emiatt át lehet írni

$$L \to e\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A} = e\partial_t\left(\mathbf{xA}\right) - e\mathbf{x}\dot{\mathbf{A}} \to e\mathbf{xE}, \tag{356}$$

hiszen Coulomb-mértékben $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$. Ebben a megközelítésben a kölcsönhatási Hamilton-operátor

$$H_I = -e\mathbf{xE} \tag{357}$$

dipól-kölcsönhatás.

Atomi méretek esetén az elektromos tér helyfüggése elhanyagolható; ekkor Coulomb mértékben (ahol $\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{A}$), és valós polarizációs vektorokat választva írhatjuk

$$H_I = -ie\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{k}{2}}\sum_{t=1,2}\left(\hat{a}_{t\mathbf{k}}e^{-ikt} - \hat{a}^\dagger_{t\mathbf{k}}e^{ikt}\right)\varepsilon^i_{t\mathbf{k}}\hat{x}_i. \tag{358}$$

7.1 Átmenet atomi nívók között

A Hamilton operátor áll egy szabad időfejlődést leíró operátorból, és egy kölcsönhatásból. Érdemes az utóbbit leválasztani: a Schrödinger egyenletben a szabad időfejlődést ecpliciten kihasználjuk

$$\imath\partial_t\Psi = (H_0 + H_I)\Psi, \qquad \Psi = e^{-iH_0t}\psi, \tag{359}$$

ezzel

$$i\partial_t\Psi = H_0\Psi + e^{-iH_0t}i\partial_t\psi = H_0\Psi + H_Ie^{-iH_0t}\psi, \tag{360}$$

azaz

$$i\partial_t\psi = H_I(t)\psi, \qquad \text{ahol} \quad H_I(t) = e^{iH_0t}H_Ie^{-iH_0t}. \tag{361}$$

Szukcesszív approximációt használunk, azaz egy olyan sorozatot, ahol

$$i\partial_t\psi^{(n+1)} = H_I(t)\psi^{(n)}, \tag{362}$$

a $\psi^{(0)} = |i\rangle$ kezdeti állapotból kiindulva. Az első rend

$$\psi^{(1)}(t) = -i\int_0^t dt'\, H_I(t')\,|i\rangle\,. \tag{363}$$

Ennek átfedése egy $\langle f|$ állapottal:

$$\langle f, t|i, 0\rangle = -i\int_0^t dt'\,\langle f|H_I(t')|i\rangle\,. \tag{364}$$

Ha $-\infty$ és ∞ között veszem, akkor a teljes átmeneti amplitúdót kapom: ez az S-mátrix:

$$S_{fi} = \langle f, \infty|i, -\infty\rangle = -i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\langle f|H_I(t')|i\rangle\,. \tag{365}$$

Tekintsünk egy atomot, amelynek két állapota van: $|a\rangle$ alapállapot és $|g\rangle$ gerjesztett állapot. A gerjesztett állapotból az alapállapotba való átmenet során kibocsátódik egy foton (feltételezésünk alapján), azaz a fotontér $|n,q,\alpha\rangle$ állapotból $|n+1,q,\alpha\rangle$ állapotba kerül valamilyen hullámszámra és polarizációra. Ennek átmeneti amplitúdója

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\ \langle f|H_I(t')|i\rangle = \\ &= -e\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{k}{2}}\sum_{t=1,2}\varepsilon^i_{t\mathbf{k}}\left\langle n+1,q,\alpha|\hat{a}_{t\mathbf{k}}e^{-ikt}-\hat{a}^\dagger_{t\mathbf{k}}e^{ikt}|n,q,\alpha\right\rangle\langle a|\hat{x}_i(t)|g\rangle\,. \end{aligned} \tag{366}$$

Az első mátrixelem

$$\left\langle n+1,q,\alpha|\hat{a}_{t\mathbf{k}}e^{-ikt}-\hat{a}^\dagger_{t\mathbf{k}}e^{ikt}|n,q,\alpha\right\rangle = -e^{iqt}\sqrt{n+1}(2\pi)^3\delta(k-q)\delta_{t\alpha}. \tag{367}$$

a második mátrixelem

$$\langle a|\hat{x}_i(t)|g\rangle = \left\langle a|e^{iH_0t}\hat{x}_ie^{-iH_0t}|g\right\rangle = e^{-i(E_g-E_a)t}\langle a|\hat{x}_i|g\rangle\,. \tag{368}$$

Mindent összevetve

$$S_{fi} = e\sqrt{\frac{q}{2}}\varepsilon^i_{\alpha\mathbf{q}}\langle a|\hat{x}_i|g\rangle\sqrt{n+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\,e^{-i(E_g-E_a-q)t} = g_{\alpha\mathbf{q}}\sqrt{n+1}\,(2\pi)\delta(E_g-E_a-q), \tag{369}$$

ahol

$$g_{\alpha\mathbf{q}} = e\sqrt{\frac{q}{2}}\varepsilon^i_{\alpha\mathbf{q}}\langle a|\hat{x}_i|g\rangle\,. \tag{370}$$

Az átmeneti valószínűség képletében $\delta(E)^2$ fordul elő. Ennek értelmezéséhez

$$\delta(E) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{-iEt} \quad\Rightarrow\quad \delta(E)^2 = \delta(E)\delta(0) = t\delta(E), \tag{371}$$

ahol t az átmenet ideje. Így időegységre számított átmeneti valószínűséget tudunk számolni:

$$w_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{t} = (2\pi)\delta(E_g-E_a-q)|g_{\alpha,\mathbf{q}}|^2(n+1). \tag{372}$$

Ha megvan az átmeneti valószínűség, kiszámolhatjuk a kisugárzott teljesítményt is, vagyis az időegység alatt kisugárzott energiát. Miután minden hullámszám és minden polarizáció megengedett:

$$\mathcal{P} = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sum_{\alpha=1,2}qw_{fi}(\alpha,\mathbf{q}) = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,q\sum_{\alpha=1,2}(2\pi)\delta(E_g-E_a-q)\left|e\sqrt{\frac{q}{2}}\varepsilon^i_{\alpha\mathbf{q}}\langle a|\hat{x}_i|g\rangle\right|^2(n_q+1). \tag{373}$$

A polarizációra való összegzés, $d_i = \langle a|\hat{x}_i|g\rangle$ jelöléssel

$$\sum_{\alpha=1,2}\left|\varepsilon^i_{\alpha\mathbf{q}}d_i\right|^2 = d_i^*\left(\sum_{\alpha=1,2}\varepsilon^{*i}_{\alpha\mathbf{q}}\varepsilon^j_{\alpha\mathbf{q}}\right)d_j = \mathbf{d}^*(1-\hat{\mathbf{q}}\otimes\hat{\mathbf{q}})\mathbf{d} = \sin^2\theta|\mathbf{d}|^2, \tag{374}$$

ahol felhasználtuk, hogy a polarizáció merőleges irányú lehet. Ekkor

$$\mathcal{P} = \frac{e^2|\mathbf{d}|^2}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty dq\,q^4\int d\Omega\,\delta(\Delta E-q)\sin^2\theta(n_{\mathbf{q}}+1). \tag{375}$$

Innen

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = (n_{\mathbf{q}}+1)\frac{e^2|\mathbf{d}|^2\Delta E^4}{8\pi^2}\sin^2\theta. \tag{376}$$

Ez $n=0$-ra az elektrodinamika dipólsugárzás képletével egyező eredmény, amennyiben azonosítjuk

$$p_i = 2e|d_i|, \qquad \omega = \Delta E. \tag{377}$$

Ekkor SI egységekben ($Z_0 = \mu_0 c = 376.7\,\Omega$ vákuumimpedancia)

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = (n_{\mathbf{q}}+1)\frac{Z_0\mathbf{p}^2\omega^4}{32\pi^2c^2}\sin^2\theta. \tag{378}$$

A klasszikus képlethez képest megjent egy $n+1$ szorzó, ahol n a $q=\Delta E$ nagyságú, Ω irányú impulzussal rendelkező fotonok száma. Az $n=0$ klasszikus képlet a *spontán emissziót* írja le. Kvantumosan a többi foton hatására gyorsabban történik meg az átmenet, nagyobb lesz a kisugárzott teljesítmény: az n faktor az *indukált emissziónak* felel meg.

Ha $n=0$, akkor elvégezhetjük a térszög integrált:

$$\mathcal{P} = \frac{Z_0\mathbf{p}^2\omega^4}{12\pi c^2}, \tag{379}$$

mert

$$\int d\Omega \sin^2\theta = 2\pi\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2) = \frac{8\pi}{3}. \tag{380}$$

7.2 Az atomi energiaszintek és a sugárzás állapotainak hibridizációja, Wigner-Weisskopf-modell

Ha nem csak első rendben akarjuk megállapítani az átmenetet, akkor az eredeti nemkölcsönható atomi energia-sajátállapotok és a fotonok rendszerében fel kell írni a teljes Hamilton operátort, és diagonalizálni kell azt. Hogy ezt lehetővé tegyük, a helymérés operátorát fel kell írnunk az atomi energiaállapotok terében. Feltéve, hogy $|a\rangle$ és $|g\rangle$ állapotokban $\langle\hat{\mathbf{x}}\rangle = 0$ (azaz ugyanott van a súlypontjuk), a helymérés operátora valójában átvisz a $|a\rangle$ és $|g\rangle$ állapotok között:

$$\hat{\mathbf{x}}\big|_{a,g} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{x}_{ag} \\ \mathbf{x}_{ag}^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_{ag} = \langle a|\hat{\mathbf{x}}|g\rangle\,. \tag{381}$$

Az atomi energiaszintek mátrixa, az alapállapoti energiát nullára tolva

$$\hat{H}_0\big|_{a,g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta E \end{pmatrix}. \tag{382}$$

Ezt a két operátort leírhatjuk az atomi nívók keltő-eltüntető operátoraval:

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{383}$$

ezzel

$$\hat{H}_0 = \Delta E c^\dagger c, \qquad \hat{\mathbf{x}}\big|_{a,g} = \mathbf{x}_{ag}c + \mathbf{x}_{ag}^* c^\dagger. \tag{384}$$

A szabad fotonok Hamilton-operátora

$$\hat{H}_{ph} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_t k a_{t\mathbf{k}}^\dagger a_{t\mathbf{k}}. \tag{385}$$

A kölcsönhatási Hamilton-operátort elég $t=\mathbf{x}=0$-ban felírni (l. (358))

$$\hat{H}_I = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{t=1,2}\left(\hat{a}_{t\mathbf{k}} - \hat{a}_{t\mathbf{k}}^\dagger\right)(g_{t\mathbf{k}}c + g_{t\mathbf{k}}^* c^\dagger). \tag{386}$$

Az ac tag eltüntet egy fotont, és alapállapotba viszi az atomot, ezért – a korábbi analízis szerint – egy $2\pi\delta(\Delta E + k)$ Dirac-deltára vezet, amely soha nem teljesülhet. Ezért ezt (és a neki megfelelő $a^\dagger c^\dagger$) tagot elhagyhatjuk fizikai alkalmazásokban. A teljes Hamilton-operátor tehát úgy írható, mint

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_t k a^\dagger_{t\mathbf{k}} a_{t\mathbf{k}} + \Delta E c^\dagger c - i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{t=1,2} \left(g^*_{t\mathbf{k}} c^\dagger \hat{a}_{t\mathbf{k}} - g_{t\mathbf{k}} c \hat{a}^\dagger_{t\mathbf{k}} \right). \tag{387}$$

Ez a teljes időfejlődést leíró Hamilton-operátor. A mozgásegyenletek Heisenberg-képben:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= -i\Delta E c - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{t=1,2} g^*_{t\mathbf{k}} a_{t\mathbf{k}} \\ \dot{a}_{t\mathbf{k}} &= -ik a_{t\mathbf{k}} + g_{t\mathbf{k}} c. \end{aligned} \tag{388}$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer, amit meg lehet oldani egzaktul. Időbeli Fourier-transzformációt végezve kapjuk

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega - \Delta E) c + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{t=1,2} i g^*_{t\mathbf{k}} a_{t\mathbf{k}} \\ 0 &= (\omega - k) a_{t\mathbf{k}} - i g_{t\mathbf{k}} c. \end{aligned} \tag{389}$$

A második egyenletet az elsőbe visszaírva kapjuk

$$0 = \left(\omega - \Delta E - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{t=1,2} \frac{|g_{t\mathbf{k}}|^2}{\omega - k} \right) c. \tag{390}$$

A gerjesztett állapot hullámfüggvénye $|g,t\rangle = c^\dagger(t)\,|a\rangle$, ennek átfedése a gerjesztett állapottal

$$\langle g,t|g\rangle = \left\langle a|c(t)c^\dagger(0)|a\right\rangle, \qquad \langle g,0|g\rangle = 1, \tag{391}$$

ennek megoldása a retardált propagátor

$$G^{(ret)}_{cc^\dagger}(\omega) = \left\langle a|cc^\dagger|a\right\rangle = \left(\omega - \Delta E - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{t=1,2} \frac{|g_{t\mathbf{k}}|^2}{\omega - k} \right)^{-1} \Bigg|_{\omega\to\omega+i\varepsilon} \tag{392}$$

Ezt írhatjuk úgy is, mint

$$G^{(ret)}_{cc^\dagger}(\omega) = \frac{1}{\omega - \Delta E - \Sigma(\omega)} \Bigg|_{\omega\to\omega+i\varepsilon} \tag{393}$$

ahol

$$\Sigma(\omega) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{t=1,2} \frac{|g_{t\mathbf{k}}|^2}{\omega - k}. \tag{394}$$

Grafikus szemléletetés...

A retardált propagátor diszkontinuitása adja meg a a sajátenergiák spektrumát:

$$\varrho(\omega) = \operatorname{Disc} i G^{(ret)}_{cc^\dagger}(\omega) = -2\operatorname{Im} G_{cc^\dagger}(\omega + i\varepsilon) = \frac{-2\operatorname{Im}\Sigma}{(\omega - \Delta E - \operatorname{Re}\Sigma)^2 + (\operatorname{Im}\Sigma)^2}. \tag{395}$$

A spektrum, azaz állapotsűrűség most tehát nem egyetlen energiaszintből áll, hanem egy csúcsos görbe, amelyiknek maximuma az $\omega = \Delta E + \operatorname{Re}\Sigma(\omega)$ megoldásánál van. Jelöljük ezt $\Delta E'$-vel: ez lesz a módosított gerjesztési energia. Ha $\operatorname{Im}\Sigma \to 0^+$, akkor $\operatorname{Disc} i G^{(ret)}_{cc^\dagger}(\omega) \sim \delta(\omega - \Delta E')$ lenne; ha $\operatorname{Im}\Sigma$ kicsi, akkor ugyan nem Dirac-delta az eredmény, de gyorsan változik. Jó közelítéssel ezért ω helyére $\Delta E'$ írható, $\gamma := -\operatorname{Im}\Sigma(\Delta E')$. Ekkor a függvény egy Lorentz-görbe lesz

$$\varrho(\omega) = \frac{2\gamma}{(\omega - \Delta E')^2 + \gamma^2}, \tag{396}$$

amelynek félértékszélessége éppen γ. Kiszámolva

$$\gamma = -\operatorname{Im}\Sigma(\Delta E') = -\operatorname{Im}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{t=1,2}\frac{|g_{t\mathbf{k}}|^2}{\delta E' - k + i\varepsilon} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{t=1,2}|g_{t\mathbf{k}}|^2\,\pi\delta(\delta E' - k). \tag{397}$$

Ezt a számolást már elvégeztük korábban

$$\gamma = \frac{d^2(\Delta E')^3}{6\pi}. \tag{398}$$

Valós időre Fourier-transzformációt kell végeznünk:

$$\varrho(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}e^{-i\omega t}\left[\frac{1}{\omega - \Delta E' - i\gamma} - \frac{1}{\omega - \Delta E' + i\gamma}\right] = e^{-i\Delta E' t - \gamma t}. \tag{399}$$

A gerjesztett állapot időfüggése tehát exponsneciális bomlást mutat, a bomlás időállandója a Lorentz-görbe szélessége.

8 Részecske definíciók változó körülmények között

Azzal a problémával, hogy a részecskék megsem teljesen olyanok, mint a klasszikus tömegpontok, akkor szembesülünk, ha valamilyen módon próba alá helyezzük a rendszert, azaz kölcsönhatásba hozzuk valamivel. Ebben a fejezetben a legegyszerűbb kölcsönhatásokat vizsgáljuk, amikor a részecske környezetét klasszikus módon változtatjuk.

8.1 Időfüggő tömegtag

Az időfüggés módosíthatja a Lagrange-függvény paramétereit is. Ez az eset gyakrabban fordul elő, mint a korábbi, ilyen többek között külső erőtérbe térbe helyezett részecske esete, de erre majd látunk különféle alkalmazásokat.

Tekintsünk egy komplex skalárteret, amelynek a sajátfrekvenciája valamilyen időfüggést mutat. Mielőtt ezt a rendszert megvizsgálnánk, röviden nézzük meg a fix együtthatós komplex skalártér kvantálását. A klasszikus Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\Phi)^*(\partial_\mu\Phi) - m^2\Phi^*\Phi, \qquad \Phi \in \boldsymbol{C}. \tag{400}$$

Amikor kvantáljuk Φ-ből operátor lesz, de nem önadjungált.

A kanonikusan konjugált impulzusok

$$\Pi = \partial_t\Phi^\dagger, \qquad \Pi^\dagger = \partial_t\Phi, \tag{401}$$

a Hamilton-sűrűség

$$\mathcal{H} = \Pi^\dagger\Pi + (\nabla\Phi)^\dagger(\nabla\Phi) + m^2\Phi^\dagger\Phi. \tag{402}$$

A mozgásegyenletek Fourier-térben

$$(\partial^2 + \omega_k^2)\Phi_k = 0, \tag{403}$$

ahol $\omega_k^2 = k^2 + m^2$. Hamiltoni formalizmusban:

$$\partial_t\Phi_{\mathbf{k}} = \Pi_{\mathbf{k}}^\dagger, \qquad \partial_t\Pi_{\mathbf{k}}^\dagger = -\omega_k^2\Phi_{\mathbf{k}}. \tag{404}$$

A teret felírhatjuk valós és képzetes rész összegeként

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2), \qquad \Pi^\dagger = \partial_t\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Pi_1 + i\Pi_2), \tag{405}$$

ekkor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \Phi_1)^2 - m^2\Phi_1^2) + \frac{1}{2}((\partial_\mu \Phi_2)^2 - m^2\Phi_2^2). \tag{406}$$

Ez két közönséges szabad skalártér Lagrange-függvényének összege. A kvantálás tehát a szokásos módon megy: bevezethetjük a vákuumot $|0\rangle$, amelyet $a_{1\mathbf{k}}$ és $a_{2\mathbf{k}}$ eltüntet, és amelyen $a_{1\mathbf{k}}^\dagger$ és $a_{2\mathbf{k}}^\dagger$ hoz létre állapotokat. A téroperátorok kifejezése

$$\begin{aligned}\Phi_{1,2}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{1,2,\mathbf{k}} + a_{1,2,-\mathbf{k}}^\dagger\right)e^{-i\mathbf{kx}} \\ \Pi_{1,2}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,(-i)\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\left(a_{1,2,\mathbf{k}} - a_{1,2,-\mathbf{k}}^\dagger\right)e^{-i\mathbf{kx}}.\end{aligned} \tag{407}$$

A Hamilton-operátor alakja

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\omega_k\left(a_{1\mathbf{k}}^\dagger a_{1\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{k}}^\dagger a_{2\mathbf{k}}\right) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\omega_k\left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_k^\dagger b_{\mathbf{k}}\right). \tag{408}$$

Visszaírva az eredeti alakba észrevehetjük, hogy megjelenik két kombináció; ezeket ejlöljük a következőképp:

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{a_{1\mathbf{k}} + ia_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}, \qquad b_{\mathbf{k}} = \frac{a_{1\mathbf{k}} + ia_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}. \tag{409}$$

Ezek ugyanazon felcserélési relációkat tudják, mint az eredeti operátorok

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^2\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}), \qquad [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^2\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}), \qquad [a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}] = [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}] = 0. \tag{410}$$

Ezzel

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger\right)e^{-i\mathbf{kx}} \\ \Pi^\dagger(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,(-i)\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\left(a_{\mathbf{k}} - b_{-\mathbf{k}}^\dagger\right)e^{-i\mathbf{kx}}.\end{aligned} \tag{411}$$

A Hamilton-operátor alakja most

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\omega_k\left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_k^\dagger b_{\mathbf{k}}\right). \tag{412}$$

Mindezidáig igaz marad minden akkor is, ha $\omega_k(t)$ időfüggő, a Hamilton-operátort diagonalizálhatjuk a fenti módon. A Heisenberg képben az operátorok lesznek időfüggők; a rájuk vonatkozó mozgásegyenletek (404) alapján

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger)\right) &= -i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}(a_{\mathbf{k}} - b_{-\mathbf{k}}^\dagger) \\ \partial_t\left(-i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}(a_{\mathbf{k}} - b_{-\mathbf{k}}^\dagger)\right) &= -\omega_k^2\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger),\end{aligned} \tag{413}$$

ebből

$$\partial_t a_{\mathbf{k}} = -i\omega_k a_{\mathbf{k}} + \frac{\dot\omega_k}{2\omega_k}b_{-\mathbf{k}}^\dagger, \qquad \partial_t b_{\mathbf{k}}^\dagger = i\omega_k b_{\mathbf{k}}^\dagger + \frac{\dot\omega_k}{2\omega_k}a_{\mathbf{k}}. \tag{414}$$

Látható módon, ha $\dot\omega \neq 0$, akkor összekeveredik az $a_{\mathbf{k}}$ és a $b_{-\mathbf{k}}^\dagger$! Írjuk a következő módon fel a megoldást

$$a_{\mathbf{k}}(t) = \alpha_{\mathbf{k}}(t)a_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}^*(t)b_{-\mathbf{k}}^\dagger, \qquad b_{-\mathbf{k}}^\dagger(t) = \beta_{\mathbf{k}}(t)a_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}}^*(t)b_{-\mathbf{k}}^\dagger. \tag{415}$$

Ezeket a kifejezéseket hívják *Bogoljubov-transzformációnak*. Az együtthatókra vonatkozó differenciálegyenletek:

$$\partial_t\alpha_{\mathbf{k}} = -i\omega_k\alpha_{\mathbf{k}} + \frac{\dot\omega_k}{2\omega_k}\beta_{\mathbf{k}}, \qquad \partial_t\beta_{\mathbf{k}} = i\omega_k\beta_{\mathbf{k}} + \frac{\dot\omega_k}{2\omega_k}\alpha_{\mathbf{k}}. \tag{416}$$

Ha a Bogoljubov-transzformált alakot visszaírjuk a téroprátorba, akkor

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(f_{\mathbf{k}}(t) a_{\mathbf{k}} + f^*_{\mathbf{k}}(t) b^\dagger_{-\mathbf{k}} \right) e^{-i\mathbf{kx}}, \tag{417}$$

ahol

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{\alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}; \tag{418}$$

ezt az alakot hívják móduskifejtésnek. A kanonikusan konjugált tér:

$$\Pi^\dagger(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (-i) \left(g_{\mathbf{k}}(t) a_{\mathbf{k}} - g^*_{\mathbf{k}}(t) b^\dagger_{-\mathbf{k}} \right) e^{-i\mathbf{kx}}, \tag{419}$$

ahol $g_k = (\alpha_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{k}})\sqrt{\omega_k/2}$. Másrészt azonban $\Pi^\dagger = \dot{\Phi}$, azaz $g_k = i\dot{f}_{\mathbf{k}}$. Ennek alapján

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(\dot{f}_{\mathbf{k}} - i\omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}), \qquad \beta_{\mathbf{k}} = \frac{-i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(\dot{f}_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}). \tag{420}$$

Észrevehetjük, hogy a $i\partial_t \mp \omega_k$ a pozitív/negatív energiás időfejlődésre vetít.

A Φ mozgásegyenletéből következően

$$\ddot{f}_{\mathbf{k}}(t) + \omega^2_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(t) = 0. \tag{421}$$

Praktikusan az ember először $f_{\mathbf{k}}$-t határozza meg, ebből lehet $\alpha_{\mathbf{k}}$-t és $\beta_{\mathbf{k}}$-t kiszámolni.

Most számoljuk ki a részecskeszámot! Amennyiben H időfüggő, akkor a H-val való felcserélhetőség nem jelent megmaradást. Azonban ha H időfejlődése megáll, akkor már értelmes ez a kérdés. Vagyis ha egy stabil helyzetből valamilyen időfejlődés után ismét stabil helyzetbe kerülünk, meghatározhatjuk a részecskeszám változást. A részecskékre:

$$\left\langle 0 \left| a^\dagger_{\mathbf{k}}(t) a_{\mathbf{k}}(t) \right| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \left| (\alpha^*_{\mathbf{k}}(t) a^\dagger_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}(t) b_{-\mathbf{k}})(\alpha_{\mathbf{k}}(t) a_{\mathbf{k}} + \beta^*_{\mathbf{k}}(t) b^\dagger_{-\mathbf{k}}) \right| 0 \right\rangle. \tag{422}$$

Mivel $\langle 0|a^\dagger_{\mathbf{k}}(t) a_{\mathbf{k}}(t)|0\rangle = V n_{a\mathbf{k}}$, így a sűrűségekre kapjuk:

$$n_{a\mathbf{k}}(t) = |\alpha_{\mathbf{k}}(t)|^2 n_{a\mathbf{k}} + |\beta_{\mathbf{k}}(t)|^2 (1 + n_{a\mathbf{k}} + n_{b\mathbf{k}}). \tag{423}$$

Speciálisan, ha vákuumból indultunk:

$$n_{a\mathbf{k}}(t) = |\beta_{\mathbf{k}}(t)|^2 = \frac{\dot{f}^2_{\mathbf{k}} + \omega^2_{\mathbf{k}} f^2_{\mathbf{k}}}{2\omega_{\mathbf{k}}}. \tag{424}$$

8.2 Unruh sugárzás

Tekintsünk egy egyenletesen gyorsuló relativisztikus megfigyelőt. A négyesgyorsulás kifejezése

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = g^\mu, \tag{425}$$

ahol u^μ a négyessebesség, τ a sajátidő, g^μ a négysgyorsulás, mind négyesvektorok. Akkor egyenletes a gyorsulás, ha g^μ egy rögzített négyesvektor adott koordinátarendszerbe való transzformációja. A négyessebesség valamely külső vonatkoztatási rendszerből ($c = 1$ egységrendszert használva)

$$u^\mu = (\gamma, \gamma v), \qquad \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2}, \tag{426}$$

a sajátidő pedig

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2}\, dt = \frac{dt}{\gamma}. \tag{427}$$

Mivel

$$-2\gamma^{-3}d\gamma = -2d\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \tag{428}$$

így

$$g^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{du^\mu}{dt} = (\gamma^4 \boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}}, \gamma^2\dot{\boldsymbol{v}} + \gamma^4\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})). \tag{429}$$

Tehát $\boldsymbol{v} = 0$ mellett

$$g_0^\mu = (0, \boldsymbol{g}). \tag{430}$$

Ha egyenletes a gyorsulás, akkor más koordinátarendszerben ennek a g_0-nak a Lorentz transzformáltját kell látnunk. 1D-s esetet tekintve

$$g_0' = (\gamma v g, \gamma g), \tag{431}$$

vagyis a 0. komponensre felírt differenciálegyenlet:

$$\gamma^4 v\dot{v} = \gamma g \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g(1-v^2)^{3/2} \tag{432}$$

Ennek megoldása

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = g(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{g(t-t_0)}{\sqrt{1+g^2(t-t_0)^2}}. \tag{433}$$

Ezt a kifejezést is fel lehet integrálni. Az eredmény

$$t = \frac{1}{g}\sinh g\tau + t_0, \qquad x = \frac{1}{g}(\cosh g\tau - 1) + x_0, \tag{434}$$

hiszen

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{\sinh g\tau}{\cosh g\tau} = \frac{\sinh g\tau}{\sqrt{1+\sinh^2 g\tau}}, \tag{435}$$

ahonnan t kifejezését felhasználva adódik az eredmény. Mellesleg expliciten is ki lehet fejezni

$$x = x_0 + \sqrt{\frac{1}{g^2} + t^2} - \frac{1}{g}. \tag{436}$$

A fenti képletek egyetlen gyorsuló tömegpontra vonatkoznak. Ebből gyorsuló megfigyelőt sokféleképpen csinálhatunk. Szokásosan a következő választással élnek:

$$(\tau, \xi) \mapsto (t, x), \qquad \begin{cases} t = \dfrac{1}{g}e^{g\xi}\sinh g\tau \\ x = \dfrac{1}{g}e^{g\xi}\cosh g\tau, \end{cases} \tag{437}$$

ezek a *Rindler-koordináták*. Ez a koordinátázás konform, azaz szögtartó. Az új bázisvektorok az eredeti rendszerből nézve

$$e_\mu^0 = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} = \begin{pmatrix} e^{g\xi}\cosh g\tau \\ e^{g\xi}\sinh g\tau \end{pmatrix}, \qquad e_\mu^1 = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\xi} = \begin{pmatrix} e^{g\xi}\sinh g\tau \\ e^{g\xi}\cosh g\tau \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e_\mu^0 e^{1\mu} = 0, \tag{438}$$

azaz merőleges koordinátázás. A fenti paraméterezés a Minkowski térbeli polárkoordinátáknak felelnek meg. Most azonban nem fedik le a teljes téridőt, annak csupán a negyedében vannak értelmezve. Ennek ellenére ebben a negyedben teljes kvantumtérelméletet építhetünk fel.

Azt kérdezzük, hogy ha egy Rindler-megfigyelőnk van, akkor milyen lesz a vákuumállapota az eredeti, Minkowski megfigyelő számára. Fizikailag kvalitatíve az történik, hogy a vákuumból rövid időre "kölcsön lehet venni" energiát, δt ideig $\delta E = 1/\delta t$ energia vehető el. Ennyi idő alatt egy álló rendszer $\delta v = \delta t g$ sebességre tesz szert, azaz a mozgási energiája $\frac{1}{2}m\delta t^2 g^2$ lesz. Ha ez fedezni képes a kölcsönvett energiát, azaz $E^3 = \frac{1}{2}mg^2$, akkor a részecske valódi lehet.

Világos módon itt időfüggő esetről van szó, azaz a Bogoljubov-módszert használhatjuk. A tér, skalártér lévén, nem transzformálódik a gyorsulás hatására, azaz a Rindler megfigyelő által felírt skalártér a Minkowski tér átkoordinátázása. Most használjunk valós skalárteret az egyszerűség kedvéért.

A Minkowski térben a mozgásegyenletek megoldása

$$\hat{\Phi}_M(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_k e^{-i\omega_k t + ikx} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t - ikx} \right). \tag{439}$$

Emiatt a Rindler megfigyelő téroperátora:

$$\hat{\Phi}_g(\tau,\xi) = \hat{\Phi}_M(t(\tau,\xi), x(\tau,\xi)). \tag{440}$$

A vákuum analíziséhez Fourier transzformációt végzünk

$$\hat{\Phi}_g(\tau,\xi) = \int \frac{d\ell}{2\pi} B_\ell(\tau) e^{i\ell\xi}, \tag{441}$$

azaz

$$B_\ell(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-i\ell\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_k e^{-i\omega_k t(\tau,\xi) + ikx(\tau,\xi)} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t(\tau,\xi) - ikx(\tau,\xi)} \right). \tag{442}$$

Az analízist $m = 0$ esetre végezzük, de a véges tömegű esetre is hasonló eredményeket kapunk. A k integrált bontsuk fel pozitív és negatív részekre.

$$B_\ell(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-i\ell\xi} \int_{0}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(a_k e^{ik(x-t)} + a_k^\dagger e^{-ik(x-t)} + a_{-k} e^{-ik(x+t)} + a_k^\dagger e^{ik(x+t)} \right). \tag{443}$$

Ez a felírás megfelel balra futó $e^{ik(x+t)}$ és jobbra futó $e^{ik(x-t)}$ síkhullámok szerinti kifejtésnek (fénykúp koordinátázás). Mivel

$$x \pm t = \frac{1}{g} e^{g(\xi \pm \tau)}, \tag{444}$$

ezért a jobbra illetve balra futó hullámok a Rindler rendszerben is megjelennek. Visszaírva

$$B_\ell(\tau) = \int_{0}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[G_{R,\ell}(\tau) a_k + \bar{G}_{R,\ell}(\tau) a_k^\dagger + G_{L,\ell}(\tau) a_{-k} + \bar{G}_{L,\ell}(\tau) a_{-k}^\dagger \right], \tag{445}$$

ahol az együtthatók kiszámíthatók a következő formula segítségével

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-i\ell\xi} e^{ise^{g\xi}} &= \left\{ \begin{array}{l} z = e^{g\xi},\ \xi = \frac{1}{g}\ln z, \\ z \in [0,\infty], \\ dz/(gz) = d\xi \end{array} \right\} = \frac{1}{g} \int_0^\infty dz z^{-i\frac{\ell}{g}-1} e^{isz} = \frac{1}{g}(-is)^{i\frac{\ell}{g}} \int_0^\infty dv v^{-i\frac{\ell}{g}-1} e^{-v} \Gamma(\frac{-i\ell}{g}) = \\ &= \frac{1}{g}(-is)^{i\frac{\ell}{g}} \Gamma(\frac{-i\ell}{g}) = \frac{1}{g} e^{\frac{\ell\pi}{2g}} s^{i\frac{\ell}{g}} \Gamma(\frac{-i\ell}{g}). \end{aligned} \tag{446}$$

Amit kapunk

$$\begin{aligned} G_{R,\ell}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-i\ell\xi} e^{i\frac{k}{g} e^{g(\xi-\tau)}} = g^{-i\frac{\ell}{g}-1} e^{\frac{\ell\pi}{2g} - i\ell\tau} k^{i\frac{\ell}{g}} \Gamma(\frac{-i\ell}{g}), \\ \bar{G}_{R,\ell}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-i\ell\xi} e^{-i\frac{k}{g} e^{g(\xi-\tau)}} = g^{-i\frac{\ell}{g}-1} e^{-\frac{\ell\pi}{2g} - i\ell\tau} k^{i\frac{\ell}{g}} \Gamma(\frac{-i\ell}{g}), \\ G_{L,\ell}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-i\ell\xi} e^{-i\frac{k}{g} e^{g(\xi+\tau)}} = g^{-i\frac{\ell}{g}-1} e^{-\frac{\ell\pi}{2g} + i\ell\tau} k^{i\frac{\ell}{g}} \Gamma(\frac{-i\ell}{g}), \\ \bar{G}_{L,\ell}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-i\ell\xi} e^{i\frac{k}{g} e^{g(\xi+\tau)}} = g^{-i\frac{\ell}{g}-1} e^{\frac{\ell\pi}{2g} + i\ell\tau} k^{i\frac{\ell}{g}} \Gamma(\frac{-i\ell}{g}). \end{aligned} \tag{447}$$

Bevezethetünk új keltő- és eltüntető operátorokat

$$d_\ell = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2\pi k g}}\, k^{i\frac{\ell}{g}} a_k, \qquad h_\ell = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2\pi k g}}\, k^{i\frac{\ell}{g}} a_{-k}, \tag{448}$$

ezekre

$$[d_\ell, d_r^\dagger] = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2\pi k g}} \int_0^\infty \frac{dq}{\sqrt{2\pi q g}} k^{i\frac{\ell}{g}} q^{-i\frac{r}{g}} [a_k, a_q^\dagger] = \frac{1}{g}\int_0^\infty \frac{dk}{k}\, k^{-\frac{i}{g}(r-\ell)} = \int_{-\infty}^\infty dz\, e^{-i(r-\ell)z} = 2\pi\delta(r-\ell), \tag{449}$$

ahol bevezettük a $gz = \ln k$ változót. A d és h változók egymással kommutálnak, mert az egyik pozitív, a másik negatív impulzusokat használ. Ugyanakkor d és h vákuuma még mindig a Minkowski vákuum.

Ezek után

$$B_\ell(\tau) = \frac{g^{-i\frac{\ell}{g}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi}}\Gamma(\frac{-i\ell}{g})\left[e^{\frac{\ell\pi}{2g}-i\ell\tau} d_\ell + e^{-\frac{\ell\pi}{2g}-i\ell\tau} d_{-\ell}^\dagger + e^{-\frac{\ell\pi}{2g}+i\ell\tau} h_\ell + e^{\frac{\ell\pi}{2g}+i\ell\tau} h_{-\ell}^\dagger\right]. \tag{450}$$

Vagyis a teljes kifejezés Rindler koordinátákban

$$\hat\Phi_g(\tau,\xi) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\ell}{2\pi}\left[R_\ell e^{\frac{\ell\pi}{2g}} d_\ell e^{i\ell(\xi-\tau)} + R_\ell^* e^{\frac{\ell\pi}{2g}} d_\ell^\dagger e^{-i\ell(\xi-\tau)} + R_\ell e^{-\frac{\ell\pi}{2g}} h_\ell e^{i\ell(\xi+\tau)} + R_\ell^* e^{-\frac{\ell\pi}{2g}} h_\ell^\dagger e^{-i\ell(\xi+\tau)}\right] \tag{451}$$

ahol

$$R_\ell = \frac{g^{-i\frac{\ell}{g}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi}}\Gamma(\frac{-i\ell}{g}). \tag{452}$$

Érdekes megfigyelni, hogy megmaradt a síkhullám alak, azaz $\sim e^{i\ell(\xi\pm t)}$ marad az időfüggés: ez annak a következménye, hogy a koordináta-transzformáció ortogonális volt, azaz

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \;\to\; \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}, \tag{453}$$

így a megoldás továbbra is síkhullámok szerint kifejthető. Azonban a pozitív és negatív energiák összekeverednek, ami onnan is látszik, hogy a normálás nem $1/\sqrt{2\ell}$, mint a közönséges Minkowski esetben. A síkhullám kifejezés miatt azonban amikor ki akarjuk számolni α-t és β-t a (420) képletben, akkor a τ szerinti időderivált egyszerűen $\pm i\ell$-et ad. Amit kapunk a d_ℓ és $d_\ell^\dagger$ együtthatóiból

$$\alpha_\ell = \sqrt{2\ell} e^{\frac{\ell\pi}{2g}} R_\ell, \qquad \beta_\ell = -\sqrt{2\ell} e^{-\frac{\ell\pi}{2g}} R_\ell^*. \tag{454}$$

Innen

$$|\beta_\ell|^2 = \frac{\ell}{2\pi g} e^{-\frac{\ell\pi}{g}} \Gamma(\frac{i\ell}{g})\Gamma(\frac{-i\ell}{g}). \tag{455}$$

A Gamma-függvények speciális tulajdonságait felhasználva

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \quad\Rightarrow\quad \Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z\sin\pi z}, \tag{456}$$

azaz

$$|\beta_\ell|^2 = \frac{\ell}{2\pi g} e^{-\frac{\ell\pi}{g}} \frac{-\pi}{\frac{i\ell}{g}\sin\frac{i\ell\pi}{g}} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\ell}{g}} - 1}. \tag{457}$$

Mivel a fenti kifejezés a vákuumban található részecskék számát jelenti, a fenti képlet alapján azt kaptuk, hogy a gyorsuló rendszer vákuuma valójában úgy néz ki, mintha

$$T_U = \frac{g}{2\pi} \tag{458}$$

hőmérsékletű fekete test lenne! Ez az Unruh effektus.

A keltő és eltüntető operátorok viszonyát is lehet elemezni, ehhez ℓ-ben is pozitív és negatív tengelyt kell választani. Bevezethetők a következő operátorok:

$$b_\ell = R_\ell e^{\frac{\ell\pi}{2g}} d_\ell + R_\ell^* e^{-\frac{\ell\pi}{2g}} h_\ell^\dagger, \qquad \bar{b}_\ell = R_\ell e^{\frac{\ell\pi}{2g}} h_\ell + R_\ell^* e^{-\frac{\ell\pi}{2g}} d_\ell^\dagger. \tag{459}$$

Innen

$$d_\ell \sim e^{\frac{\ell\pi}{2g}} b_\ell - e^{-\frac{\ell\pi}{2g}} \bar{b}_\ell^\dagger, \qquad h_\ell \sim e^{\frac{\ell\pi}{2g}} \bar{b}_\ell - e^{-\frac{\ell\pi}{2g}} b_\ell^\dagger. \tag{460}$$

A Minkowski vákuumot eltünteti d és h, ezért

$$(b_\ell - e^{-\frac{\ell\pi}{2g}} \bar{b}_\ell^\dagger) \left|0\right\rangle_M = 0, \qquad (\bar{b}_\ell - e^{-\frac{\ell\pi}{2g}} b_\ell^\dagger) \left|0\right\rangle_M = 0. \tag{461}$$

Innen a Minkowski vákuum rövid számolás után (l. 0710.5373 cikk az arxiv.org honlapon)

$$\left|0\right\rangle_M = \prod_i C_i \sum_{n_i} e^{-\pi n_i \ell_i / g} \left|n_i\right\rangle \otimes \overline{\left|n_i\right\rangle}, \qquad C_i = \sqrt{1 - e^{-2\pi\ell_i/g}}. \tag{462}$$

Kiküszöbölve a $\overline{\left|n_i\right\rangle}$ állapotokat egy tisztán termikus alapállapotot kapunk.

A gravitáció egyik alapelve (ekvivalencia-elv), hogy a gravitációs gyorsulás megkülönböztethetetlen az inerciális gyorsulástól. Emiatt amit itt elmondtunk alkalmazható gravitációs erőtérre is. A gravitációs tér tehát a sík vákuumhoz képest részecskékkel van teli, amit ki is sugároz. Mivel a gravitációs gyorsulás

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad T_U = \frac{2\pi R^2}{GM}. \tag{463}$$

A Földről ez a sugárzás rendkívül kicsi.

Fekete lyukak esetén a gravitációs tér akkora, hogy az eseményhorizontról a fénysebesség kellene a szökési sebességhez. Nemrelativisztikus közelítéssel a szökési sebesség

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{mMG}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2MG}{v^2} \quad \Rightarrow \quad R_{hor} = \frac{2MG}{c^2} \overset{c=1}{\longrightarrow} 2MG. \tag{464}$$

Annak ellenére, hogy a nemrelativisztikus képlet teljesen alkalmatlan ennek a számítására, a képlet mégis helyes. A gravitációs tér az eseményhorizonton

$$g_{hor} = \frac{1}{4GM} = \frac{1}{2R}. \tag{465}$$

Emiatt a fekete lyuk hőmérséklete

$$T_H = \frac{g}{2\pi} = \frac{1}{4\pi R}. \tag{466}$$

Ez a *Hawking-sugárzás.*

Az, hogy a fekete lyuk valójában egyben egy termodinamikai fekete test, a gyorsulás és a hőmérséklet pedig lényegében ugyanaz a fogalom, messzire vezető következtetéseket eredményez. Ha ugyanis a tömeget az energiával azonosítjuk, akkor a fenti reláció alapján

$$T = \frac{1}{8\pi GM} \quad \Rightarrow \quad E = M = \frac{1}{8\pi GT}. \tag{467}$$

A szabadenergia ($\beta = 1/T$ jelöléssel

$$E = \frac{\partial \beta F}{\partial \beta} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{16\pi GT}. \tag{468}$$

az entrópia pedig

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{1}{16\pi G T^2} = \frac{\pi R^2}{G} = \frac{A}{4G}, \tag{469}$$

ahol A a fekete lyuk horizontjának felülete. Ez a Bekenstein-Hawking entrópia képlete.

A fekete lyuk fajhője negatív $c = \partial S/\partial T \sim -1/T^3$, ezért a fekete lyuk nem stabil képződmény, tömegét elsugározza. Ugyanakkor csillag méretű fekete lyukak sugárzás által gyakorlatilag nem tudnak eltűnni.

9 Parametrikus rezonancia

Vizsgáljuk meg azt a Lagrange-függvényt, amely nem szabad részecskéket ír le, azaz nem kvadratikus, hanem a részecskék kölcsönhatását is tartalmazza. A legegyszerűbb ilyen választás a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi(-\partial^2 - m^2)\Phi - \frac{\lambda}{24}\Phi^4 \tag{470}$$

Lagrange-függvénnyel leírható Φ^4-modell. A modell igen gazdag jelenségkör leírására alkalmazható, mi most egy speciális részletre vegyunk kíváncsiak: indítsuk el a rendszert térben homogén koherens állapotából, és vizsgáljuk meg, mi történik vele az idő múlásával. Ehhez a mindig a legegyszerűbb közelítést, azaz az effektusokat még visszaadó legalacsonyabb rendű alak megtartását alkalmazzuk.

Mint láttuk, a térben homogén koherens állapot egy Φ_0 klasszikus mezővel ekvivalens. Ekkor a kvantum mező a $\Phi = \varphi + \Phi_0$ felbontásból kapható. A kezdeti feltétel szerint tehát φ vákuumából indulunk. Feltételezhetjük, hogy a klasszikus háttér, mivel térfüggetlen módon indult, később is térfüggetlen marad. A hatásfüggvénybe visszaírva a háttér + fluktuácó alakot:

$$S[\Phi_0 + \varphi] = S[\Phi_0] + \int \varphi \frac{\delta S}{\delta \Phi_0} + \tilde{S}[\Phi_0, \varphi]. \tag{471}$$

Az első tag csak a klasszikus teret tartalmazza, ezért a fluktuáció szempontjából konstans. A második tag nulla lesz, ha Φ_0 a klasszikus mozgásegyenleteket teljesíti, azaz

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \Phi_0} = \left(-\partial^2 - m^2 - \frac{\lambda}{6}\Phi_0^2\right)\Phi_0. \tag{472}$$

A fluktuációkra tehát csak a harmadik tag vonatkozik:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}[\Phi_0, \varphi] &= \frac{1}{2}\varphi(-\partial^2 - m^2)\varphi - \frac{\lambda}{24}\varphi^4 - \frac{\lambda}{24}\left[(\Phi_0+\varphi)^4 - \Phi_0^4 - 4\varphi\Phi_0^3\right] = \\ &= \frac{1}{2}\varphi(-\partial^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\Phi_0^2)\varphi - \frac{\lambda}{6}\Phi_0\varphi^3 - \frac{\lambda}{24}\varphi^4.\end{aligned} \tag{473}$$

Most mindenütt, ahol lehet, kvadratikus közelítést alkalmazunk. A Φ_0 mozgásegyenlete eszerint

$$\ddot{\Phi}_0 = -m^2\Phi_0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_0(t) = \Phi_0 \cos mt, \tag{474}$$

a fluktuációkra vonatkozó operátor egyenlet pedig

$$(\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\Phi_0^2)\varphi = 0. \tag{475}$$

A fluktuációkat a kezdeti időpontban felvett keltő-eltüntető operátorok segítségével fejezzük ki, azaz módusfüggvény kifejtést alkalmazunk (417)

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(f_{\mathbf{k}}(t)a_{\mathbf{k}} + f^*_{\mathbf{k}}(t)a^\dagger_{-\mathbf{k}}\right)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \tag{476}$$

Az együtthatókra vonatkozó egyenletek:

$$\ddot{f}_{\mathbf{k}}(t) + \left(k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\Phi_0^2(t)\right)f_{\mathbf{k}}(t) = 0. \tag{477}$$

Beírva ide a Φ_0 konkrét alakját (474)-ból:

$$\ddot{f}_{\mathbf{k}}(t) + \left(k^2 + m^2 + \frac{\lambda\Phi_0^2}{2}\cos^2(mt)\right)f_{\mathbf{k}}(t) = 0, \tag{478}$$

ami, felhasználva a $\cos 2mt = 2\cos^2 mt - 1$ azonosságot, írható úgy, mint

$$\ddot{f}_{\mathbf{k}}(t) + \left(k^2 + m^2 + \frac{\lambda\Phi_0^2}{4} + \frac{\lambda\Phi_0^2}{4}\cos(2mt)\right)f_{\mathbf{k}}(t) = 0. \tag{479}$$

Ezek után a

$$z = mt, \qquad M = \frac{1}{m^2}\left(k^2 + m^2 + \frac{\lambda\Phi_0^2}{4}\right), \qquad 2q = \frac{\lambda\Phi_0^2}{4m^2} \tag{480}$$

helyettesítéssel kapjuk a

$$f''_{\mathbf{k}}(z) + (M + 2q\cos(2z))\, f_{\mathbf{k}}(z) = 0 \tag{481}$$

egyenletet. Ez a *Mathieu-egyenlet*.

9.1 Stabilitás analízis

Nézzük meg röviden, mit is tudunk mondani egy ilyen jellegű egyenletről. Részeletesebb információt kaphatunk

- `www.emba.uvm.edu/~jyang/teaching/Floquet_theory_Ward.pdf` oldalon
- `tesi.cab.unipd.it/47187/1/Tesi_Ilaria_Panardo.pdf` oldalon
- `http://dlmf.nist.gov/28` oldalon
- a google-ba beírva a "matthieu equation floquet analysis" szavakat.

Az egyik legfontosabb gondolat Floquet nevéhez fűződik. Röviden az elv az, hogy ha a potenciál periodikus $z \to z + \pi$ szerint, akkor a differenciálegyenletnek van egy $n\pi$-vel való diszkrét eltolási invarianciája. Ez a diszkrét csoport ábrázolódik a megoldásokon, a sajátértékek jellemzik a megoldásokat.

Részletesebben: tegyük fel, hogy f_1 és f_2 két lineárisan független megoldás, amelyeket a célszerűség kedvéért úgy inicializálunk, hogy

$$f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = 0, \quad f_2(0) = 0, \quad f_2'(0) = 1. \tag{482}$$

Ekkor minden megoldás felírható mint

$$f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z). \tag{483}$$

Viszont a differenciálegyenlet ugyanúgy néz ki $z + \pi$-t berírva, azaz $f(z + \pi)$ is megoldás, ami kifejthető többféle módon:

$$\begin{aligned}
f(z+\pi) &= c_1 f_1(z+\pi) + c_2 f_2(z+\pi),\\
f(z+\pi) &= h_1 f_1(z) + h_2 f_2(z),\\
f_1(z+\pi) &= A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z),\\
f_2(z+\pi) &= B_1 f_1(z) + B_2 f_2(z).
\end{aligned} \tag{484}$$

Az utolsó két egyenlet $z = 0$-ban azt adja, felhasználva $f_{1,2}$-re vonatkozó kezdeti feltételeket, hogy

$$f_1(\pi) = A_1, \quad f_1'(\pi) = A_2, \quad f_2(\pi) = B_1, \quad f_2'(\pi) = B_2. \tag{485}$$

A fenti egyenletek egymásba helyettesítve azt adják, hogy

$$\begin{pmatrix} f_1(\pi) & f_1'(\pi) \\ f_2(\pi) & f_2'(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \tag{486}$$

Keressünk olyan megoldást, amelyre $h_1 = \mu c_1$ és $h_2 = \mu c_2$ igaz. Ekkor

$$f(z+\pi) = \mu f(z) \quad \Rightarrow \quad f(z + n\pi) = \mu^n f(z), \tag{487}$$

és μ a fenti mátrix sajátértéke. A megoldás tehát stabil, ha $|\mu| = 1$, lecseng, ha $|\mu| < 1$, és felrobban, ha $|\mu| > 1$.

Felírva a sajátértékegyenletet

$$0 = \begin{vmatrix} f_1(\pi) - \mu & f_1'(\pi) \\ f_2(\pi) & f_2'(\pi) - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - \mu(f_1(\pi) + f_2'(\pi)) + W(\pi), \tag{488}$$

ahol $W(z)$ a mátrix determinánsa z időben:

$$W(z) = f_1(z)f_2'(z) - f_2(z)f_1'(z). \tag{489}$$

Megfigyelhetjük, hogy ha $f'' + X(z)f = 0$, ahol $X(z)$ tetszőleges függvény, akkor

$$W'(z) = f_1(z)f_2''(z) - f_2(z)f_1''(z) = 0, \tag{490}$$

emiatt $W(z) = W(0) = 1$. Emiatt a sajátértékegyenlet

$$\mu^2 - 2\phi\mu + 1 = 0, \qquad \text{ahol} \quad 2\phi = f_1(\pi) + f_2'(\pi). \tag{491}$$

Bár ϕ értéke a konkrét megoldásoktól függ, azt elmondhatjuk általánosan, hogy két sajátérték lesz: μ_1 és μ_2. Ezekre igaz

$$\mu_1\mu_2 = 1, \qquad \mu_1 + \mu_2 = 2\phi. \tag{492}$$

Írjuk a két sajátértéket exponenciális alakba

$$\mu_{1,2} = e^{\nu_{1,2}\pi}, \tag{493}$$

ekkor

$$\nu_1 + \nu_2 = 0, \qquad \cosh\nu_1 = \phi. \tag{494}$$

Tehát:

$|\phi| < 1$ esetben $\nu_{1,2}$ tisztán képzetes, azaz $\mu_1 = e^{i|\nu_1|\pi}$ és $\mu_2 = \mu_1^*$. Ekkor $|\mu_{1,2}| = 1$ és a megoldás stabil.

$|\phi| > 1$ esetben ν_1 valós és $\nu_2 = -\nu_1$. Emiatt $\mu_2 = 1/\mu_1$, és mindkettő valós: az egyik megoldás tehát lecseng, a másik exponenciálisan nő, azaz instabil megoldást kapunk.

$|\phi| = 1$ esetben $\nu_1 = \nu_2 = 0$ vagy $\pm i$, azaz $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$. Ekkor a megoldás (487) alapján π-ben periodikus vagy antiperiodikus.

Mivel a Mathieu-egyenletben az egyenlet folytonosan függ q-tól, így elvárható, hogy $\phi(q)$ is folytonos függvény legyen. Ez viszont azt jelenti, hogy a stabilitási és instabilitási tartományokat a π-ben periodikus megoldások választják el egymástól!

Emiatt elegendő először a π-ben periodikus megoldásokat tárgyalni. Ezekre felírható egy Fourier-sor:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}e^{2inz}, \qquad \tilde{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n+1}e^{i(2n+1)z}. \tag{495}$$

Most csak az első esetet nézzük, a másodikra ugyanez elmondható. Beírjuk a Mathieu-egyenletbe, és felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned} f''(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-4n^2)c_{2n}e^{2inz}, \\ 2q\cos 2z f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} qc_{2n}\left(e^{2i(n+1)z} + e^{2i(n-1)z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(c_{2(n-1)} + c_{2(n+1)})e^{2inz}, \end{aligned} \tag{496}$$

vagyis a c együtthatók kielégítik a

$$(M - 4n^2)c_{2n} + q(c_{2(n-1)} + c_{2(n+1)}) = 0 \tag{497}$$

egyenletet, mégpedig úgy, hogy a megoldásul kapott függvények L_2 térben legyenek. Ez a szokásos sajátértékproblémáknak megfelelően bizonyos $M(q)$ értékeknél teljesül csak. Numerikusan eljárhatunk úgy, hogy a fenti rekurziót egy véges $n = N$ számnál befejezzük, és kiértékeljük a lehetséges sajátértékeket, majd N-t növeljük.

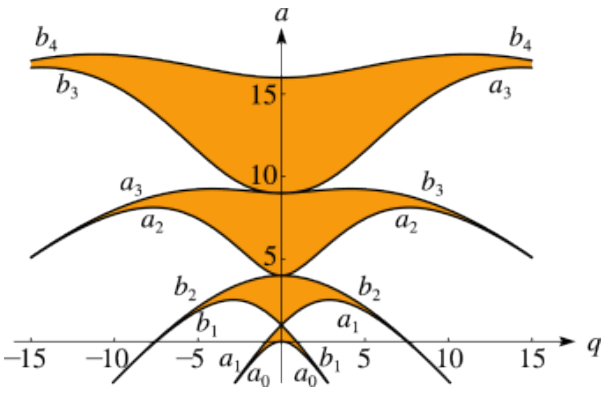

Figure 3: A Mathieu-egyenlet π szerint (anti)periodikus megoldásaihoz tartozó sajátértékek, és a stabilitási tartományok. Forrás: "http://dlmf.nist.gov/28.17".

Az eredményül kapott függvényeket z-ben való periodikusságuk illetve antiperiodikusságuk szerint nevezik el. Az f-ből kapott sajátvüggvényeket $ce_{2m}(z,q)$ (elliptikus koszinusz) illetve $se_{2m}(z,q)$ (elliptikus szinusz), az $\tilde{f}$-ből kapottakat pedig $ce_{2m+1}(z,q)$ illetve $se_{2m+1}(z,q)$ módon jelölik. Ezek, ahogy fent mondtuk, π szerint periodikusak illetve antiperiodikusak, és $ce_m(z,q=0)=\cos mz$ és $se_m(z,q=0)=\sin mz$ határesetek igazak rájuk. A megfelelő sajátértékek jelölése: ce_m-hez a_m és se_m-hez b_m sajátértékek tartoznak. A sajátértékek q-függése látható a 3 ábrán.

A sajátértékek $q=0$-nál $M=a_m=b_m=4m^2$, ami leolvasható a (497) egyenletből, vagy közvetlenül a (481) Mathieu-egyenletből, amely ekkor a harmonikus oszcillátor egyenlete lesz. Az is látható innen, hogy a $q=0$ vonal mindig stabil megoldásokat ad. Hozzávéve azt, hogy a π-ben periodikus megoldások a stabil és az instabil tartományokat választják el, kapjuk a 3 ábrán látható stabilitási tartományokat.

9.2 Részecskekeltés

Ha stabil megoldásaink vannak, akkor ez megfelel valamilyen megváltozott diszperziós relációval rendelkező részecskének. Ha a β Bogoljubov-együttható nem is lesz nulla, hiszen ott az eredeti diszerpziós relációt használjuk, de $|\beta|^2$ korlátos marad, és periodikusan nullába tér vissza. Ilyenkor az eredeti vákuum közelítőleg vákuum marad továbbra is.

Ha azonban instabil megoldásunk van, azaz $f_{\mathbf{k}}(t)\sim e^{\nu t}$, akkor $\beta\sim e^{\nu t}$ és a részecskeszám exponenciálisan növekszik $n_{\mathbf{k}}(t)=|\beta_{\mathbf{k}}|^2\sim e^{2\nu t}$. A numerikus szimulációk szerint (l. [4]) kis q mellett a részecskeszám logaritmusa folytonosan nő, míg nagy q-k mellett időnként megugrik.

9.3 Kozmológiai alkalmazás

A kozmológiai infláció több kozmológiai paradoxon feloldására született konstrukció (l. [5]). Nagy vonalakban a homogén izotróp Univerzumot a Robertson-Walker metrika írja le

$$ds^2=dt^2-R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2d\Omega\right), \tag{498}$$

amely geometriailag egy 4-es gömbnek ($k=1$), hiperboloidnak ($k=-1$) illetve síknak ($k=0$) felel meg. A skálaparamétert jelentő $R(t)$ függvényt az Einstein egyenletek határozzák meg (Friedmann-egyenletek):

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi G}{3}\varepsilon,\qquad \frac{\ddot{R}}{R}=-\frac{4\pi G}{3}(\varepsilon+3p), \tag{499}$$

ahol G a gravitációs konstant, ε az energiasűrűség és p a nyomás, amely az energia-impulzus tenzor főátlójában elhelyezkedő elemeknek felelnek meg, azaz $T_{00}=\varepsilon$ és $T_{ii}=p$ (az izotropitás miatt ez i-független, és nincsenek nem diagonális elemek).

Amennyiben az energia-impulzus tenzor egy klasszikus skalártérből származik, ahol konstans Φ_0 klasszikus mezőnk van, akkor (534) alapján

$$T_{\mu\nu} = \partial_\nu \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi)} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} V(\Phi_0). \tag{500}$$

Innen az adódik, hogy $\varepsilon = V(\Phi_0)$, de $p = -V(\Phi_0)$ (azaz negatív nyomást képvisel), emiatt $\varepsilon + 3p = -2V(\Phi_0) < 0$. Tehát a második Friedmann-egyenlet alapján

$$\ddot{R} = H^2 R \quad \Rightarrow \quad R(t) = R(0)e^{Ht}, \qquad \text{ahol} \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\Phi_0). \tag{501}$$

Az Univerzum tehát exponenciálisan felfúvódik: ez az infláció.

A fenti elemzés szigorúan véve csak akkor érvényes, ha Φ_0 konstans, ekkor az exponenciálisan felfúvódó szakasz soha nem érne véget. Ezért a legtöbb infláció modellben a skalártérnek valami dinamikája van. A. Linde új inflációs modellje szerint [6] például elegendő, ha a skalártér egyszerűen egy négyzetes potenciálban legördül. Ha van egy csekély negyedfokú tag is, akkor éppen a korábban tárgyalt modellt kapjuk. Ekkor az oszcilláló skalártér saját (és egyéb) részecskéihez kapcsolódva energiáját részecskekeltésre fordítja, és ilymódon az infláció időszak úgy ér véget, hogy a skalártér a potenciálja minimumában megnyugszik, míg az Univerzum megtelik a parametrikus rezonancia által keltett részecskékkel (újrafűtés, *reheating*).

10 Schwinger effects and related staff

We want to study the complex scalar field theory in external electromagnetic field

$$\mathcal{L} = (iD_\mu \Phi)^*(iD^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi, \qquad iD_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu. \tag{502}$$

Under an $U(1)$ rotation the fields transform as

$$\Phi' = e^{ie\alpha}\Phi, \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha. \tag{503}$$

Then

$$iD'_\mu \Phi' = (i\partial_\mu - eA'_\mu)e^{ie\alpha}\Phi = e^{ie\alpha}(i\partial_\mu - e\partial_\mu\alpha - eA_\mu + e\partial_\mu\alpha)\Phi = e^{ie\alpha} iD_\mu \Phi, \tag{504}$$

and so the Lagrangian is invariant. Reorganizing the above Lagrangian we find

$$\mathcal{L} = [-i\partial_\mu \Phi^* - eA_\mu \Phi^*][i\partial_\mu \Phi - eA_\mu \Phi] - m^2\Phi^*\Phi = \Phi^*(-\partial^2 - m^2 - 2ieA_\mu \partial^\mu - ie(\partial_\mu A^\mu) + e^2 A_\mu A^\mu)\Phi. \tag{505}$$

We will use Lorenz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$, then

$$\mathcal{L} = \Phi^*(-\partial^2 - m^2 - 2ieA_\mu \partial^\mu + e^2 A_\mu A^\mu)\Phi. \tag{506}$$

The equations of motion

$$(-\partial^2 - m^2 - 2ieA_\mu \partial^\mu + e^2 A_\mu A^\mu)\Phi = 0, \tag{507}$$

and initial conditions.

Let us take a pure electric E field on the z direction. The corresponding gauge field is $A_3 = -Et$, the others are zero. This laso satisfies the Lorenz gauge condition, since $\partial_3 t = 0$. Then we find

$$(\partial^2 + m^2 + 2ieEt\partial_3 + e^2E^2t^2)\Phi(x) = 0. \tag{508}$$

Perform Fourier transformation in the spatial momenta, where we effectively have $\partial_i \to ip_i$:

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 + p^2 + m^2 - 2eEtp_3 + e^2E^2t^2)\Phi(t,\mathbf{p}) = 0,\\ (\partial_t^2 + p_\perp^2 + m^2 + (eEt - p_3)^2)\Phi(t,\mathbf{p}) = 0.\end{aligned} \tag{509}$$

In this differential equation p_3 is a parameter. We can make a shift in time $t \to t + eE/p_3$, while the time derivative remains the same. Then we arrive

$$(\partial_t^2 + p_\perp^2 + m^2 + e^2E^2t^2)\Phi(t,\mathbf{p}) = 0. \tag{510}$$

We will denote

$$\omega_\perp^2 = p_\perp^2 + m^2, \qquad \Omega^2(t) = p_\perp^2 + m^2 + e^2E^2t^2, \tag{511}$$

and find

$$(\partial_t^2 + \Omega(t)^2)\Phi(t,\mathbf{p}) = 0. \tag{512}$$

Függelékek

A Klasszikus térelméletek

A rezgő húr rendszerében az az érdekes, hogy nem raktunk bele szabad részecskéket, végül mégis megjelentek, mint az energia sajátállapotai. Ráadásul önműködően, minden külön feltétel nélkül tudták teljesíteni a részecskék permutációjára vonatkozó elvárásunkat, amit a kvantummechanikában csak a többrészecske hulámfüggvényre kirótt konstrukciókkal (l. Slater determináns) lehetett megkapni. Emiatt természetes arra gondolni, hogy a valóságban megfigyelhető részecskék valamilyen folytonos "közeg", azaz mező kvantálásánál megjelenő állapotok. Nézzük meg tehát általánosan a mezők elméletét és a mezők kvantálásának feltételeit a húrnál látottak alapján.

A klasszikus térelmélet alapobjektuma a *mező*:

def.: Mező: $\Psi : \mathbf{M} \to \mathbf{V}$, a Minkowski-térről valamilyen vektortérbe képező függvény; valamely alkalmas koordinátázással komponensei: $\Psi_i(x) \equiv \Psi_i(t, \mathbf{x})$.

Példák:

- $p(t, \mathbf{x})$ illetve $T(t, \mathbf{x})$ nyomás illetve hőmérséklet-mező: itt $\mathbf{V} \equiv \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ skalár mező
- $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ elektromos mező és mágneses indukció mező, vagy $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ sebesség-mező: itt $\mathbf{V} \equiv \mathbf{R}^3$ $\Rightarrow$ vektormező.

A.1 Lagrange-sűrűség

Hogy az általános térelmélet leírását megkapjuk, először felosztjuk a teret kis cellákra, középpontjukat jelölje $\mathbf{x}_i$, és vesszük a cella középpontjának értékét: $\Psi_i(t) = \Psi(t, \mathbf{x}_i)$. Ezzel egy véges sok szabadsági fokú rendszert kapunk, amelyet a mechanika elvei szerint építünk fel. L Lagrange függvény több szabadsági fok esetén $L(\dot{q}_i, q_i, t)$ függvény, ahol $i = 1 \dots N$. Ez még túl általános. *Lokálisnak* nevezzük a sok szabadsági fokú rendszert, ha q_i csak a szomszédaival hat kölcsön, és a Lagrange-függvény felírható mint

$$L = \sum_{\langle i,j \rangle} L_i^{(2)}(q_i, q_j, t) + \sum_i L_i^{(1)}(\dot{q}_i, q_i, t), \tag{513}$$

ahol $\langle i, j \rangle \equiv$ szomszédok, és $i > j$ (hogy ne számoljunk duplán). Ha i, j térbeli cellákat jelöl, mint előbb, akkor írhatjuk a térbeli felosztást finomítva $q_j - q_i = \mathbf{a}\boldsymbol{\nabla} q(\mathbf{x}_i) + \dots$. A magasabbrendű tagokat elhagyva tehát $L_2(q_i, \boldsymbol{\nabla} q_i, t)$. Összefoglaló jelöléssel bevezetjök a négyes deriváltat: $\partial_\mu = (\partial_t, \boldsymbol{\nabla})$.

A felosztás finomításával a szummák integrálokká írhatók át: $\sum_i F_i$ esetében bevezetjük az $F(\mathbf{x}) = F_i$, $\mathbf{x} \in \delta V_i$ lépcsőfüggvényt, amelyre

$$\sum_i F_i = \frac{1}{\delta V} \int d^3\mathbf{x}\, F(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{F}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V \to 0} \frac{F(\mathbf{x})}{\delta V} \tag{514}$$

sűrűség. Így lokális térelméleteket jellemző Lagrange-függvény felírható mint

$$L = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{L}(\Psi(t, \mathbf{x}), \partial_\mu \Psi(t, \mathbf{x}), t, \mathbf{x}) \tag{515}$$

Lagrange sűrűség integrálja $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ csak *első deriváltakat* tartalmaz.

A hatás alakja

$$S = \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), x) \tag{516}$$

t-ben és $\mathbf{x}$-ben teljesen szimmetrikus alakba írható.

A.2 Mozgásegyenletek

Legkisebb hatás elve: a megvalósuló pályánál a hatás minimális, vagyis a hatás variációja nulla. Vizsgáljuk ezért a Lagrange sűrűség mezők szerinti variációját:

$$S[\Psi+\delta\Psi] = \int d^4x\,\mathcal{L}(\Psi+\delta\Psi,\partial_\mu\Psi+\partial_\mu\delta\Psi,x) = S[\Psi]+\int d^4x\,\left[\delta\Psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}+\partial_\mu\Psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\right] =$$
$$= S[\Psi]+\int d^4x\,\delta\Psi\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\right], \tag{517}$$

ahol az utolsó lépésnél parciálisan integráltunk, és eldobtuk a végtelenben fellépő felületi tagokat. A hatás szélsőértéke ott van, ahol $\delta S=0$ *minden* variációra. Ekkor az integrálban $\delta\Psi$ együtthatója el kell tűnjön

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}=0, \tag{518}$$

megegyezik a másik eredménnyel.

A.3 Megmaradó áramok

Míg mechanikában egy Q mennyiség megmaradása azt jelentette, hogy $Q(t)=Q(0)$, egy ϱ mező esetén a lokális mennyiségek nem maradnak meg, mert más helyre átmehetnek. Mégis megmaradásról beszélhetünk olyan értelemben, hogy egy tetszőleges V térfogatban

$$\int\limits_V d^3\mathbf{x}\varrho(t+dt,\mathbf{x}) = \int\limits_V d^3\mathbf{x}\varrho(t,\mathbf{x}) + \text{ (falon távozó } \varrho).$$

Bevezetve $j^\mu=(\varrho,\mathbf{j})$ jelölést, ahol $\mathbf{j}$ a ϱ-hoz tartozó áram, $V\to 0$ limeszben a következő mérlegegyenlethez jutunk:

$$\dot\varrho+\boldsymbol{\nabla}\mathbf{j}=0 \quad\Rightarrow\quad \partial_\mu j^\mu=0. \tag{519}$$

j^μ neve megmaradó áram. A ténylegesen megmaradó mennyiség $Q=\int dV\,j^0$, a teljes térre integrálva, hiszen

$$\dot Q=\int dV\,\partial_0 j^0=-\int dV\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}=-\oint\limits_\infty d\mathbf{F}\,\mathbf{j}=0, \tag{520}$$

mert a végtelenben nincsenek áramok.

A.4 Szimmetria és megmaradás

A mechanikában láttuk, hogy egy szimmetria követelmény mennyire megszorítja a hatás lehetséges alakját. A téridő relativisztikus invariáns: milyen hatás-funkcionálok konzisztensek ezzel? Hogy ezt megválaszoljuk, először a Lorentz-transzformációk hatását nézzük meg mezőkön.

Kezdjük egy szemléletes példával: ha adott egy sebességmező (pl. áramlásnál), és forgatást végzek a rendszeren, mi történik a mezővel? Egyrészt a sebességek helye megváltozik, másrészt viszont a sebességek iránya is változik! Ez azt mutatja, hogy egy általános R transzformáció hatása két részből tevődik össze: egyrészt a téridő transzformációjából, $R_M:\mathbf{M}\to\mathbf{M}$, másrészt a "belső tér" $\mathbf{V}$ transzformációjából $R_V:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ $\Rightarrow$ $R=R_M\times R_V$. A Fig. 4 ábrán látható, hogy a teljes hatás úgy állítható elő, hogy először $x\mapsto x'$, majd az *új helyen* $\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}'$. Tehát

$$\mathbf{v}'(R_M(x))=R_V(\mathbf{v}(x)) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}'(x)=R_V(\mathbf{v}(R_M^{-1}(x))). \tag{521}$$

A későbbiekben nem különböztetjük meg jelölésben R_V-t és R_M-et, és az írásmód: $\mathbf{v}'(x)=R(\mathbf{v}(R^{-1}(x)))$ lesz.

def.: Lineáris transzformáció: R_M és $R_\mathbf{V}$ is lineáris. Ekkor mindkettő egy-egy mátrixxal írható fel, ekkor $\mathbf{v}'(x)=R\mathbf{v}(R^{-1}x)$.

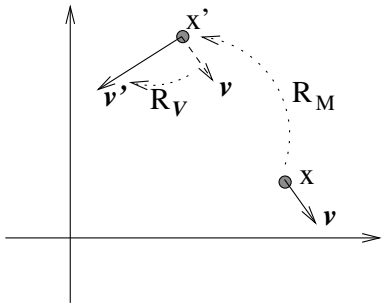

Figure 4: Vektormező általános transzformációja

A Lorentz csoport elemei folytonos lineáris transzformációk.

Egy transzformáció akkor szimmetria, ha a transzformált mezőhöz az eredetivel azonos hatásfüggvény tartozik: $S[\Psi] = S[R(\Psi)]$. Ekkor a transzformált mező körüli variációra igaz

$$\delta S[R(\Psi)] = S[R(\Psi) + \delta\Psi] - S[R(\Psi)] = S[R(\Psi + \bar{\delta}\Psi)] - S[R(\Psi)] = S[\Psi + \bar{\delta}\Psi] - S[\Psi] = \delta S\bar{\delta}\Psi, \qquad (522)$$

itt $\delta R(\Psi)\bar{\delta}\Psi = \delta\Psi$ módon vezettük be $\bar{\delta}\Psi$-t. Ha tehát Ψ kielégítette a mozgásegyenleteket, akkor $\delta S = 0$, ekkor viszont $\delta S[R(\Psi)] = 0$ is igaz, azaz $R(\Psi)$ is kielégíti a mozgásegyenleteket.

Tétel: (Noether-tétel) Minden folytonos szimmetriához tartozik egy megmaradó áram.

Bizonyítás.: Jelöljük a folytonos transzformációt R_τ-val. $R_0 \equiv 1$ az egységtranszformáció legyen. Infinitezimális transzformációnál ($R_{\delta\tau}$) a változás lineáris $\delta\tau$-ban. Ezért a mezőkön hatva felírható:

$$R_{\delta\tau}: \ \Psi(x) \mapsto \Psi'(x) = \Psi(x) + \delta\Psi(x) = \Psi(x) + \delta\tau\Delta\Psi(x). \qquad (523)$$

Szimmetriatranszformáció esetén $S[\Psi'] = S[\Psi]$.

Módosítsuk a fenti transzformációt úgy, hogy $\delta\tau$-t *helyfüggővé* tesszük! Ekkor tehát

$$\delta\Psi(x) = \delta\tau(x)\Delta\Psi(x). \qquad (524)$$

Az így kapott transzformációra kétféleképpen nézhetünk rá. Egyrészt $\Psi(x)$ infinitezimális változás a "pályán", így annak variációját adja. Mivel a hatás a valódi mozgások körüli kis variációkra (első rendben) nem változik, így *minden* transzformációra igaz, hogy

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\tau}\right|_{\Psi_0} = 0, \qquad (525)$$

ahol Ψ_0 a mozgásegyenlet megoldása.

Másrészt felírhatjuk a hatás változását. Tudjuk azonban azt is, hogy ha $\delta\tau(x) \to \delta\tau$ helyfüggetlen lenne, akkor a hatás nem változna (szimmetria!). Emiatt δS arányos lesz $\delta\tau$ deriváltjaival. Parciális integrálásokkal azonban minden $\delta\tau$-ra ható derivált áthárítható az együtthatójára, míg végül az első derivált marad

$$\delta S = -\int d^4x K^\mu(x)\partial_\mu\delta\tau(x) = \int d^4x \partial_\mu K^\mu(x)\delta\tau(x). \qquad (526)$$

Ezt összevetve (525) egyenlettel:

$$\frac{\delta S}{\delta\tau(x)} = \partial_\mu K^\mu(x) \quad \Rightarrow \quad \left.\partial_\mu K^\mu(x)\right|_{\Psi_0} = 0, \qquad (527)$$

vagyis K^μ megmaradó áram.

A.5 Energia-impulzus tenzor

Speciális példaként tekintsük a téridő eltolásokat: $x \to x + a$, ahol a =const, valamint $R_{\mathbf{V}} = 1$. Mezőre hatva $\Psi'(x + a) = \Psi(x) \quad \Rightarrow \quad \Psi'(x) = \Psi(x - a)$.

Mikor szimmetria? Ha $S[\Psi] = S[\Psi']$! Válasszuk az integrálási változónak x'-t:

$$S[\Psi'] = \int d^4x' \, \mathcal{L}(\Psi'(x'), \partial'_\mu \Psi'(x'), x') = \int d^4x \, \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), x + a). \tag{528}$$

Ez akkor egyezik $S[\Psi]$-vel $\forall\, \Psi$-re, ha $\mathcal{L}$ nem függ expliciten x-től.

Mi a megmaradó mennyiség? Ehhez $x' = x + a(x)$, és vizsgáljuk $S[\Psi']$-t:

$$S[\Psi'] = \int d^4x' \, \mathcal{L}(\Psi'(x'), \partial'_\mu \Psi'(x'), x') = \int d^4x \, \det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \, \mathcal{L}(\Psi(x), \partial'_\mu \Psi(x)). \tag{529}$$

Ehhez:

$$\partial'_\mu \Psi(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \Psi(x). \tag{530}$$

A derivált mátrix $x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x)$ illetve $x^\mu \approx x'^\mu - a^\mu(x')$ alapján:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu a^\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\mu a^\nu + \mathcal{O}(a^2). \tag{531}$$

A determinánshoz

$$\begin{vmatrix} 1 + \partial_0 a^0 & \partial_1 a^0 & \dots \\ \partial_0 a^1 & 1 + \partial_1 a^1 & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = (1 + \partial_0 a^0)(1 + \partial_1 a^1) \dots + \mathcal{O}(a^2) = 1 + \partial_\mu a^\mu + \mathcal{O}(a^2). \tag{532}$$

Végül tehát

$$S[\Psi'] = \int d^4x \, (1 + \partial_\mu a^\mu) \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x) - \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \Psi(x)) = S[\Psi] + \int d^4x \, \left[\partial_\mu a^\mu \mathcal{L} - \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \Psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \right]. \tag{533}$$

Valóban csak ∂a-tól függ! A korábbiak alapján a megmaradó áram

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu a^\nu T^\mu_{\cdot\nu} \quad \Rightarrow \quad T_{\mu\nu} = \partial_\nu \Psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Psi)} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{534}$$

vagyis minden μ-re van egy megmaradó áram, ez az *energia-impulzus tenzor*. A fenti formában nem minden esetben garantált a szimmetrikussága, azonban minden esetben szimmetrikussá tehető.

Energia Energia ≡ időeltolás generátora ≡ az időeltolásra megmaradó mennyiség, emiatt

$$E = \int d^3\mathbf{x} \, T^{00}(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x} \, \varepsilon(t, \mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(t, \mathbf{x}) = T^{00}(t, \mathbf{x}) \tag{535}$$

az energiasűrűség. Bevezetve a kanonikusan konjugált impulzust a szokásos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}(x)} = \Pi(x) \tag{536}$$

képlettel, az energiasáráség írható úgy, mint

$$\varepsilon = \Pi \dot{\Psi} - \mathcal{L}, \tag{537}$$

ami teljesen analóg a klasszikus mechanika képletével.

Impulzus Impulzus ≡ téreltolás generátora ≡ a téreltolásra megmaradó mennyiség, ezzel

$$\mathbf{P}^i = \int d^3\mathbf{x}\, T^{0i}(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}\, \mathbf{p}(t,\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = T^{0i} = \Pi\partial^i\Psi, \tag{538}$$

ahol $\mathbf{p}$ az impulzussűrűség.

B Relativisztikus térelméletek

A természetben előforduló térelméleteket leginkább a szimmetriái korlátozzák. Mivel a téridő Lorentz-invariáns, ezért a térelméletek is Lorentz-invariáns alakúak kell legyenek.

B.1 Relativitáselmélet ismétlés

def.: $\mathbf{M}$ Minkowski tér 4 dimenziós valós vekortér, elemei az események. Koordinátázás (megfigyelő) felbontja térre és időre: $x = (t,\mathbf{x}) \equiv x^\mu$.
A rajta értelmezett skaláris szorzat $u\cdot v = u_0v_0 - \mathbf{uv}$. Innen származó metrika $|x|^2 \equiv x^2 = t^2 - \mathbf{x}^2$.

def.: $\mathbf{M}$-en értelmezett metrikus tenzor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u\cdot v = \sum_{\mu\nu} u^\mu g_{\mu\nu} v^\nu \equiv ugv. \tag{539}$$

def.: $\mathbf{M}^*$ duális tér elemei $\bar v : \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ lineáris leképzések. $\mathbf{M}^*$ is 4D vektortér, koordinátázáskor elemeit alsó indexxel jelöljük $\bar v_\mu$.

def.: Einstein konvenció: alsó és felső indexeket automatikusan szummázzuk: $a^\mu b_\mu \equiv \sum_\mu a^\mu b_\mu$.

$\mathbf{M}^*$ azonosítható $\mathbf{M}$-mel:

$$\bar g : M \to M^*, \quad v \mapsto \bar v, \quad \text{hogy} \quad \bar v(x) = v\cdot x \quad \forall x \in \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \bar u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu, \tag{540}$$

vagyis $\bar g \equiv g$, a metrikus tenzorral lehet azonosítani $\mathbf{M}$-et és $\mathbf{M}^*$-ot.

Inverz leképzés:

$$g^{-1} : M^* \to M, \quad \bar v \mapsto v, \qquad v^\mu = g^{\mu\nu}\bar v_\nu \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\mu'}g^{\mu'\nu} = \delta^\nu_\mu. \tag{541}$$

Ha van egy lineáris $X : M \to M$ leképzés, annak inverze is $X^{-1} : M \to M$, transzponáltja $X^T : M^* \to M^*$, definíció szerint

$$\bar v M x = (M^T v)\, x \quad \Rightarrow \quad \bar v_\mu M^\mu_{\cdot\nu} x^\nu = (M^T)^{\cdot\mu}_\nu v_\mu x^\nu \quad \Rightarrow \quad (M^T)^\mu_{\cdot\nu} = M^{\cdot\mu}_\nu. \tag{542}$$

B.1.1 Szimmetria

A Minkowski tér szimmetriája olyan lineáris $\Lambda : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, ahol $x \mapsto x' = \mathbf{\Lambda}x$ leképzés (Lorentz-transzformáció), komponensekben

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\nu} x^\nu \tag{543}$$

amely a skalár szorzatot békén hagyja:

$$u'\cdot v' = u\cdot v \qquad \forall\, u,v \in \mathbf{M}, \qquad \text{azaz} \qquad u\mathbf{\Lambda}^T g\mathbf{\Lambda} v = ugv. \tag{544}$$

Ha ez igaz minden u,v-re, akkor írhatjuk

$$\mathbf{\Lambda}^T g\mathbf{\Lambda} = g \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{\Lambda}^{-1} = g\mathbf{\Lambda}^T g. \tag{545}$$

Komponens jelölésben

$$\Lambda^{\mu}_{\cdot\,\rho}\Lambda^{\nu}_{\cdot\,\sigma}g_{\mu\nu}=g_{\rho\sigma},\qquad \Lambda_{\cdot\,\nu}^{\varrho}\Lambda^{\nu}_{\cdot\,\sigma}=\delta^{\varrho}_{\sigma},\qquad (\Lambda^{-1})^{\varrho}_{\cdot\,\nu}=\Lambda_{\cdot\,\nu}^{\varrho} \tag{546}$$

A duális téren generálódó transzformáció

$$\bar{x}'=gx'=g\mathbf{\Lambda}x=g\mathbf{\Lambda}g\bar{x}\qquad \text{vagy}\qquad \bar{x}_{\mu}=\Lambda_{\mu}^{\cdot\,\nu}x_{\nu}, \tag{547}$$

azaz az index g-vel való húzásával konzisztens.

A Lorentz-trf-k paramétereinek száma: 4×4-es valós mátrixban 16 szabad paraméter van, a fenti megkötés egy szimmetrikus mátrixot ad, ebben 10 paraméter van $\Rightarrow$ 6 szabad valós paraméter van. Ebből 3 forgatás, 3 boost.

B.1.2 Példák Lorentz-transzformációkra

A következő mátrix

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}\cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0\\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{548}$$

Lorentz-transzformáció, mert (csak a 2×2-es részt kiírva)

$$g\mathbf{\Lambda}^{T}g=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\eta & \sinh\eta\\ \sinh\eta & \cosh\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\eta & -\sinh\eta\\ -\sinh\eta & \cosh\eta\end{pmatrix}=\mathbf{\Lambda}^{-1}. \tag{549}$$

Mint téridő transzformáció ez úgy hat, hogy

$$\begin{pmatrix}t'\\ x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\eta & \sinh\eta\\ \sinh\eta & \cosh\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\cosh\eta+x\sinh\eta\\ x\cosh\eta+t\sinh\eta\end{pmatrix}. \tag{550}$$

Fizikailag: K' koordinátarendszer, amely a téridőt (t',x') koordinátákkal jellemzi, és K koordinátarendszer, amelyben a koordináták (t,x), a világot (azaz a fizikai törvényeket) ugyanolyannak látja. K' koordinátarendszer középpontjának mozgása K'-ből leírva $x'=0$, K-ból leírva $x=vt$, ahol v a K' rendszer sebessége K-hoz képest. A fentiek miatt

$$x'=0=x\cosh\eta+t\sinh\eta\quad\Rightarrow\quad x=-t\tanh\eta=vt\quad\Rightarrow\quad \tanh\eta=-v,\qquad \cosh\eta=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\qquad \sinh\eta=\frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{551}$$

azaz

$$\mathbf{\Lambda}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix}1 & -v\\ -v & 1\end{pmatrix}. \tag{552}$$

Másik speciális példa a $\mathbf{\Lambda}=g$, hiszen erre fennáll $g\mathbf{\Lambda}^{T}g=ggg=g=\mathbf{\Lambda}^{-1}$. Fizikailag ez $t'=t$, $\mathbf{x}'=-\mathbf{x}$ transzformációt jelenti, azaz tértükrözés. Hasonlóan $\mathbf{\Lambda}=-g$ az időtükrözés, szintén Lorentz-trf. Végül $\mathbf{\Lambda}=1$ egységtrf és $\mathbf{\Lambda}=-1$ téridő tükrözés is speciális Lorentz-trf.

B.1.3 Csoport-szerkezet

A Lorentz-trf-k csoportot alkotnak jelöljük $\mathcal{L}$-lel. Bizonyításhoz $\mathbf{\Lambda}=1$ Lorentz-trf, ha $\mathbf{\Lambda}\in\mathcal{L}$, azaz $g\mathbf{\Lambda}^{T}g=\mathbf{\Lambda}^{-1}$, akkor inverzet véve $g(\mathbf{\Lambda}^{-1})^{T}g=\mathbf{\Lambda}$, azaz $\mathbf{\Lambda}^{-1}\in\mathcal{L}$. Ha $\mathbf{\Lambda}_1,\mathbf{\Lambda}_2\in\mathcal{L}$, akkor

$$g(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2)^{T}g=g\mathbf{\Lambda}_2{}^{T}g\,g\mathbf{\Lambda}_1{}^{T}g=\mathbf{\Lambda}_2{}^{-1}\mathbf{\Lambda}_1{}^{-1}=(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2)^{-1}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2\in\mathcal{L}. \tag{553}$$

$\mathcal{L}$ 6 paraméteres folytonos csoport (Lie-csoport), azonban nem összefüggő. Ugyanis

$$\det(\mathbf{\Lambda}^{T}g\mathbf{\Lambda})=-(\det\mathbf{\Lambda})^{2}=\det g=-1\quad\Rightarrow\quad\det\mathbf{\Lambda}=\pm1. \tag{554}$$

A $+1$ és -1 elemek nem köthetők folytonosan össze. Másrészt

$$g_{00} = 1 = \Lambda^{\mu}_{.0}\Lambda^{\nu}_{.0}g_{\mu\nu} = (\Lambda^{0}_{.0})^2 - (\Lambda^{i}_{.0})^2 \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{0}_{.0})^2 = 1 + (\Lambda^{i}_{.0})^2 \quad \Rightarrow \quad |\Lambda^{0}_{.0}| \geq 1, \quad \text{valamint} \quad |\Lambda^{0}_{.0}| \geq |\Lambda^{i}_{.0}| \tag{555}$$

ismét a $\Lambda^0_{.0} > 1$ és a $\Lambda^0_{.0} < -1$ elemek nem köthetők össze folytonosan.

A szétesők részeket $\mathcal{L}^{\alpha\beta}$-val jelöljük, ahol $\alpha = \operatorname{sgn}\det\mathbf{\Lambda}$, és $\beta = \operatorname{sgn}\Lambda^0_{.0}$. Ha $\mathbf{\Lambda}_1 \in \mathcal{L}^{\alpha_1\beta_1}$ és $\mathbf{\Lambda}_2 \in \mathcal{L}^{\alpha_2\beta_2}$, akkor $\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2 \in \mathcal{L}^{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}$. Bizonyításhoz $\det\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2 = \det\mathbf{\Lambda}_1\det\mathbf{\Lambda}_2 = \alpha_1\alpha_2$. Másrészt,

$$\begin{aligned} &|\Lambda^0_{.0}| \ = |(\Lambda^{-1})^0_{.0}| \geq |(\Lambda^{-1})^i_{.0}| = |\Lambda^0_{.i}| \\ &\quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2)^0_{.0} = \operatorname{sgn}\left[(\Lambda_1)^0_{.0}(\Lambda_2)^0_{.0} + (\Lambda_1)^0_{.i}(\Lambda_2)^i_{.0}\right] = \operatorname{sgn}(\Lambda_1)^0_{.0}(\Lambda_2)^0_{.0} = \operatorname{sgn}(\Lambda_1)^0_{.0}\operatorname{sgn}(\Lambda_2)^0_{.0} = \alpha_1\alpha_2 \end{aligned} \tag{556}$$

Ezért $\mathcal{L}^{++}$ valódi részcsoport.

B.1.4 Relativisztikus mechanika

Mechanika megfogalmazásához a legkisebb hatás elvét tartjuk szem előtt. Vizsgáljunk két rögzített végpont ($x_1 = (t_1, \mathbf{x}_1)$ és $x_2 = (t_2, \mathbf{x}_2)$) között mozgó (általánosított) tömegpontot. Felveszünk egy tetszőleges pályát a két végpont között: $\mathbf{x} = q(t)$. Ehhez hozzásrendelünk egy skalár függvényt $S[q; x_1, x_2]$, mely a pálya funkcionálja. Fizikai mozgásra a legkisebb hatás elve szerint $S[q]$ minimális.

Reális (kauzális) fizikai rendszerekre $\exists L(q(t), \dot{q}(t), t)$ Lagrange-függvény, hogy

$$S[q; x_1, x_2] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t), \dot{q}(t), t). \tag{557}$$

Szimmetria: vagyünk $R : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ leképzést, amely $t \mapsto t' \equiv R_0(t)$ és $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{x})$. Ezt kiterjeszthetjük a pályákra $R[q](t') = \mathbf{R}(q(t))$ módon. Ez a leképzés szimmetriája a mechanikai rendszernek, ha bármely pályára $S[q] = S[R[q]]$. Ebből következik, hogy ha $q(t)$ megvalósuló mozgást ír le, akkor $R[q](t)$ is megvalósuló pálya. Példa: centrális erőtérben egy pálya elforgatottja ugyanazt a hatásfüggvényt adja (szimmetria), ezért az elforgatott megoldás továbbra is megoldás marad. Az eltolt megoldásra ez nem igaz.

Fizikai elv: valódi fizikai rendszerekben nem lehet több külső struktúra, mint a téridőben magában $\Rightarrow$ a fizikai rendszereknek szimmetriája lesz a téridő szimmetriája. Relativitáselméletre: minden valódi fizikai rendszer Lorentz-invariáns kell legyen, azaz $S[q] = S[\mathbf{\Lambda}q]$ igaz kell maradjon. Szabad tömegpontra ez lénygében lerögzíti a hatásfüggvény lehetséges alakját: arányos a pálya ívhosszával:

$$S[q] = -m\int ds[q] = -m\int dt\,\sqrt{1-v^2}, \tag{558}$$

ahol $v_i = \dot{q}_i$. Az impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{559}$$

A mechanikára megfogalmazott elvek, kis módosításokkal, átvihetők a kvantumtérelméleti rendszerekre.

B.2 Lorentz-csoport ábrázolása mezőkön

Mezőkön a transzformációk külső és belső részre bomlanak. Legyen $\Psi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{V}$, ekkor $\Lambda\Psi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{V}$, ahol

$$(\Lambda\Psi)(x) = D(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x). \tag{560}$$

El fogjuk várni a hatástól, hogy ez a transzformáció szimmetria legyen, azaz

$$S[\Lambda\Psi] = S[\Psi]. \tag{561}$$

Mivel két Lorentz-transzformáció egymás után hattatva is Lorentz transzformációt ad $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_3$, ezért

$$(\Lambda_1\Lambda_2\Psi)(x) = D(\Lambda_1\Lambda_2)\Psi((\Lambda_1\Lambda_2)^{-1}x) = (\Lambda_3\Psi)(x) = D(\Lambda_3)\Psi(\Lambda_3^{-1}x), \tag{562}$$

azaz

$$D(\Lambda_1\Lambda_2) = D(\Lambda_3), \tag{563}$$

a D leképzés a Lorenzt-csoport ábrázolását adja.

A Lorentz-csoportnak két ábrázolása viszonylag magától értetődő: amikor $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}$, ekkor $D \equiv 1$. Ez a skalár ábrázolás, a megfelelő mező a *skalármező*

$$\Phi \,:\, \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{R}. \tag{564}$$

Az ebből képezhető invariánsok Φ hatványai, valamint a ∂_μ deriváltakból mint négyesvektorokból képzett invariáns kombinációk. Kvadratikus szintig a tér két lehetőségünk van (teljes divergenciákat nem számítva): Φ^2 és $(\partial_\mu\Phi)^2$. Ezek tetszőleges együtthatóval szerepelhetnek a Lagrange függvényben. A tér normálásával az egyik együttható egységnyivé tehető, azaz a legáltalánosabb Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{m^2}{2}\Phi^2. \tag{565}$$

A másik ábrázolás a definiáló ábrázolás, amikor $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}$ (legalábbis izomorf, azaz $\boldsymbol{V} \sim \boldsymbol{R}^4$), akkor $D(\Lambda) = \Lambda$. Ez adja a *(négyes)vektor mezőt*; komponensekben:

$$A^\mu \,:\, \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{R}^4. \tag{566}$$

Erre később még visszatérünk.

Ezen felül, csakúgy, mint a 3D forgatások esetében, vannak spinorábrázolások. Ennek megkonstruálása a forgások spinorábárzolásának kidolgozásával analóg. Az alaptér a 2×2-es hermitikus mátrixok tere lesz, jelöljük ezt H_2-vel. Ez négy dimenziós, bázisnak vehetjük a

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{567}$$

azaz a Pauli-mátrixok ($i = 1, 2, 3$) mellé bevesszük az egységmátrixot. Mivel a Minkowsi-tér is négy dimenzió, létezik a két tér között egy bijekció

$$x^\mu \mapsto x^\mu\sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \tag{568}$$

Mivel $\operatorname{Tr}\sigma_\mu\sigma_\nu = 2\delta_{\mu\nu}$, így a fordított reláció $h \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{Tr} h\sigma_\mu$. Ennek a bijekciónak érdekes tulajdonsága, hogy $\det(x^\mu\sigma_\mu) = x^2$, a négyes-hossz.

Ha a Lorentz-csoport $\boldsymbol{M}$-en hatni tudott, a bijekció segítségével átvihetjük H_2-re is a hatását. Egy általános lineáris transzformáció H_2-n írható úgy, mint $h \mapsto LhR$, ahol L és R tetszőleges 2×2-es mátrixok. Ha hermitikusból hermitikus mátrixba kell képezzünk, akkor $R = L^\dagger$:

$$h \mapsto LhL^\dagger. \tag{569}$$

A Lorentz-transzformációk hossztartó leképzések, azaz ha $x' = \Lambda x$, akkor $x'^2 = x^2$. A bijekció után $\det h' = |\det L|^2 \det h$. Mivel egy fázisfaktor eltérés ugyanazt a transzformációt adja h-n, ezért választhatjuk $\det L = 1$-et. Vagyis a Lorentz-transzformációk megfelelnek olyan (569) leképzésnek, ahol L 2×2-es (invertálható), egységnyi determinánsú mátrixok. Az $N\times N$-es komplex mátrixok csoportja $L(N, C)$, az egységnyi determináns jele S (special), azaz a Lorentz-csoport izomorf az $SL(2, C)$-vel. A bijekció lehetőséget ad arra, hogy a fenti L-ből kitaláljuk a Lorentz-transzformációt:

$$h' = x'^\mu\sigma_\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}x^\nu\sigma_\mu = LhL^\dagger = x^\nu L\sigma_\nu L^\dagger \quad \Rightarrow \quad \Lambda^\mu_{\ \nu} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} L\sigma_\nu L^\dagger\sigma_\mu. \tag{570}$$

Egy 2×2 mátrix paraméterezéséhez választhatjuk $e^{-\frac{i}{2}(\omega_\mu + iu_\mu)\sigma_\mu}$ alakot, ami megfelel a mátrix logaritmusa kifejtésének a σ_μ bázisban. Ha az egységnyi determináns feltételét is teljesíteni akarjuk, akkor $\operatorname{Tr}\ln L = \ln\det L = 0$ miatt $\operatorname{Tr}\sigma_\mu = 0$ kell, azaz maradnak a Pauli-mátrixok. Vagyis

$$L = e^{-\frac{i}{2}(\omega_i + iu_i)\sigma_i}. \tag{571}$$

Fizikailag ω_i a három forgatást jelenti. Ezt láthatjuk onnan, hogy ha kihagyjuk a nulladik komponenst, minden ugyanígy végigvihető, csak $SL(2,C)$ helyett $SU(2)$ lesz a transzformáció. Az u_i-k nem unitér leképzést valósítanak meg: ez a boost hatására egymásba alakuló negyesvektorok transzformációjára jellemző. Vagyis u_i jellemzi a boost-ot.

Ez a fenti L természetes módon hat a 2D-ós komplex vektorokon. Tulajdonképpen egy L-ből kétfajta ábrázolás is adódik. Általában, ha V egy ábrázolás, akkor

$$V,\, V^*,\, V^{T\,-1},\, V^{\dagger\,-1} \tag{572}$$

mind ábrázolások. Most $L^{T\,-1}$ és L unitér ekvivalensek az egységnyi determináns miatt:

$$\varepsilon_{ij}\det L = \varepsilon_{i'j'}L_{ii'}L_{jj'} \quad \Rightarrow \quad (i\varepsilon)^\dagger_{ki}L_{ii'}(i\varepsilon)_{i'j'}L^T_{j'j} = \delta_{kj} \quad \Rightarrow \quad L^{T\,-1} = (i\varepsilon)^\dagger L(i\varepsilon), \tag{573}$$

hiszen $(i\varepsilon)^\dagger = (i\varepsilon)^{-1} = (i\varepsilon)$, unitér mátrix. Így két választásunk van: L vagy $L^{\dagger\,-1}$. Ez a két ábrázolás két C^2 téren hat: válasszunk Ψ_L és $\Psi_R \in C^2$ vektorokat, ezekre

$$\Psi'_R = L\Psi_R, \qquad \Psi'_L = L^{\dagger-1}\Psi_L. \tag{574}$$

Ezek a Weyl-spinorok. A két transzformáció viszonya:

$$L^{\dagger-1} = e^{-\frac{i}{2}(\omega_i - iu_i)\sigma_i} = L|_{\omega_i\to\omega_i, u_i\to -u_i}. \tag{575}$$

Ez pontosan a tértükrözés hatása: tehát P tértükrözés olyan kell legyen, hogy

$$PLP = L^{\dagger-1} \quad \Rightarrow \quad P\Psi_L = \Psi_R, \quad P\Psi_R = \Psi_L. \tag{576}$$

Ha tehát a tértükrözést is ábrázolni akarjuk, akkor a Ψ_L és Ψ_R terek együttesét kell kezelni. Ezek a bispinorok:

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_L\\ \Psi_R\end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix}0\ 1\\ 1\ 0\end{pmatrix}. \tag{577}$$

Valójában a fenti alak a Weyl-reprezentáció, a Dirac által eredetileg javasolt alak ennek unitér transzformáltja.

Hogy egy invariáns Lagrange-függvényt tudjunk felépíteni nézzük meg, először a következő kifejezést nézzük meg

$$(\Psi^*_R\Psi_L)' = \Psi^*_R L^\dagger L^{\dagger-1}\Psi_L = \Psi^*_R\Psi_L, \tag{578}$$

azaz elő tudtunk állítani egy Lorentz-invariáns kombinációt. Hasonlóan $\Psi^*_L\Psi_R$ is invariáns.

Nézzük most meg, mi lesz $L^\dagger\sigma_\mu L$. Mivel ez is egy hermitikus mátrix, kifejthető a σ_ν-k bázisában

$$L^\dagger\sigma_\mu L = f_{\mu\nu}\sigma_\nu \quad \Rightarrow \quad f_{\mu\nu} = \frac{1}{2}L^\dagger\sigma_\mu L\sigma_\nu = \Lambda^\mu_{\cdot\nu}. \tag{579}$$

Ez azt mutatja, hogy $\bar\sigma^\mu = \sigma_\mu$ négyesvektor-operátor:

$$L\bar\sigma^\mu L^\dagger = \Lambda^\mu_{\cdot\nu}\bar\sigma^\nu. \tag{580}$$

Másrészt (570)-ből következően

$$L\sigma_\nu L^\dagger = \Lambda^\mu_{\cdot\nu}\sigma_\mu \quad \Rightarrow \quad L^{-1}\sigma_\mu L^{\dagger-1} = \Lambda^{\cdot\nu}_{\mu}\sigma_\nu. \tag{581}$$

Vagyis azt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\Psi^*_R\bar\sigma^\mu\Psi_R)' &= \Psi^*_R L^\dagger\bar\sigma^\mu L\Psi_R = \Lambda^\mu_{\cdot\nu}\Psi^*_R\bar\sigma^\nu\Psi_R,\\ (\Psi^*_L\sigma_\mu\Psi_L)' &= \Psi^*_L L^{-1}\sigma_\mu(L^{-1})^\dagger\Psi_L = \Lambda^{\cdot\nu}_{\mu}\Psi^*_L\sigma_\nu\Psi_L,\end{aligned} \tag{582}$$

vagyis ezek a kombinációk négyesvektorok. Négyesvektorok összeejtése másik négyesvektorral skalárt ad; például

$$\Psi^*_R\bar\sigma^\mu i\partial_\mu\Psi_R, \qquad \Psi^*_L\sigma^\mu i\partial_\mu\Psi_L \tag{583}$$

invariánsok, azaz a Lagrange-függvény részét képezhetik.

Szokás bevezetni a Dirac-mátrixokat és a Dirac-adjungáltat

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0, \qquad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix} = P, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{584}$$

Ezekre igaz (Clifford-algebra)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{585}$$

Ilyen módon a L-R szimmetrikus, azaz tértükrözés-invariáns Lagrange-függvény úgy írható, mint

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \partial\!\!\!/ \Psi - m \bar{\Psi} \Psi, \tag{586}$$

a Dirac-féle Lagrange-függvény (valójában két együtthatót vezethettünk volna be, de a terek normálásával az egyiket 1-nek választhatjuk). Az ebből származó mozgásegyenlet a

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\Psi}} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = (i \partial\!\!\!/ - m)\Psi, \tag{587}$$

a Dirac-egyenlet.

C Megjegyzések

$\mathbf{C}^N$-en ható véges unitér csoport neve $U(N)$, ennek $n = N^2$ generátora van. Speciálisan megkövetelve a $\det U = 1$ feltételt kapjuk az $SU(N)$ csoportokat, $N^2 - 1$ generátorral. Ez esetben

$$0 = \ln \det U = \operatorname{Tr} \ln U = -i c_a \operatorname{Tr} T_a \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr} T_a = 0. \tag{588}$$

$N \times N$-es mátrixok esetén a spurtalan hermitikus mátrixok száma $N^2 - 1$, pont megfelelő.

References

[1] Geszti Tamás, Kvantummechanika (Typotex, 2014)

[2] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, Phys. Rev. Lett., 49, 1804 (1982).

[3] M. Giustina et. al., "Significant-loophole-free test of Bell's theorem with entangled photons", Phys. Rev. Lett. **115**, 250401 (2015), arXiv:1511.03190v2 [quant-ph]

[4] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D **56**, 3258 (1997) [hep-ph/9704452].

[5] E. W. Kolb and M. S. Turner, Front. Phys. **69**, 1 (1990).

[6] A.D. Linde, Phys. Lett. 108B, 389 (1982).