Mag- és részecskefizika II
Részecskefizika

Jakovác Antal

2005 – utolsó javítás: September 6, 2012

Contents

1 Bevezetés **3**
1.0.1 Skálák az Univerzumban . . . 3
1.0.2 Kis távolságok felbontása . . . 5

2 Fenomenológia **8**
2.1 A részecskefizikai Standard Model . . . 8
2.2 Az atomok alkotóelemei . . . 9
2.2.1 Katódsugárzás – elektron felfedezése . . . 9
2.2.2 Radioaktív sugárzás . . . 10
2.2.3 Rutherford kísérlet – atommag felfedezése . . . 11
2.2.4 Szóráskísérletek I. . . . 11
2.3 Elméleti jóslatok, új kölcsönhatások . . . 13
2.3.1 Pozitron felfedezése . . . 13
2.3.2 A neutron és az erős kölcsönhatás . . . 14
2.3.3 Izospin . . . 14
2.3.4 A pion megjósolása . . . 15
2.3.5 A neutrínó és a gyenge kölcsönhatás . . . 16
2.3.6 A kaon . . . 17
2.3.7 Téridő szimmetriák és paritássértés . . . 17
2.4 Részecskék rendszerezése . . . 19
2.4.1 Kölcsönhatások fajtája szerint . . . 19
2.4.2 Kvantumszámok . . . 20
2.4.3 Ritkaság . . . 20
2.4.4 Hadron multiplettek . . . 20
2.4.5 Kvarkok . . . 22
2.4.6 Az SU(3) csoport és ábrázolásai . . . 23
2.4.7 A kvarkok kvantumszámai . . . 25
2.4.8 Részecskék kvark-összetétele . . . 26
2.4.9 A kvarkok kísérleti bizonyítéka . . . 26
2.4.10 Új szabadsági fok: a szín . . . 27
2.4.11 Egyéb részecskék . . . 28
2.4.12 Mértékbozonok . . . 30
2.5 Részecskeforrások . . . 31
2.5.1 Természetes források . . . 31
2.5.2 Atomreaktor . . . 33
2.5.3 Részecskegyorsítók . . . 33
2.5.4 Detektorok . . . 38
2.5.5 Rezonanciák . . . 42

3 Térelmélet **44**
3.1 Ismétlés . . . 44
3.1.1 Relativitáselmélet . . . 44
3.1.2 Kvantummechanika . . . 46
3.2 Klasszikus térelméletek . . . 49
3.2.1 Lagrange-sűrűség . . . 49
3.2.2 Mozgásegyenletek . . . 49
3.2.3 Megmaradó áramok . . . 50
3.2.4 Szimmetria és megmaradás . . . 51
3.2.5 Energia-impulzus tenzor . . . 52
3.2.6 Térelméletek kvantálása . . . 53
3.3 Relativisztikus skalár térelmélet . . . 54
3.3.1 A kvadratikus skalár elmélet kvantálása . . . 55
3.3.2 Klasszikus mező . . . 59
3.3.3 Időfüggés . . . 59
3.3.4 Korrelátorok . . . 60
3.4 Fermionok . . . 63
3.4.1 A Lorentz csoport spinor ábrázolásai . . . 63
3.4.2 Tértükrözés . . . 65
3.4.3 Lagrange függvény . . . 66
3.4.4 A Dirac egyenlet kvantálása és a spin-statisztika tétel . . . 67
3.4.5 A Dirac-Hamilton operátor spektruma . . . 68
3.4.6 Időfüggés . . . 72
3.4.7 Korrelátorok . . . 72
3.5 Lorentz-vektor mezők . . . 73
3.6 Kölcsönhatások . . . 76
3.6.1 Szórási folyamat jellemzése . . . 76
3.6.2 Az átmeneti mátrixelem számítása . . . 79
3.7 Perturbációszámítás . . . 80
3.7.1 Szórási hatáskeresztmetszet a skalár modellben . . . 82
3.7.2 Feynman diagramok . . . 82
3.8 Az elektromágneses kölcsönhatás . . . 83
3.8.1 Az elektromágneses kölcsönhatás Lagrange függvénye . . . 83
3.8.2 Elektromágneses folyamatok . . . 84
3.8.3 Anomális mágneses momentum . . . 85
3.8.4 Az elektron-müon szórás . . . 87
3.8.5 Elektron-müon szórás . . . 89
3.9 Az erős kölcsönhatás mértékelmélete . . . 90
3.9.1 Az erős kölcsönhatás jellegzetességei . . . 91

A Appendix **95**
A.1 Klasszikus szórás centrális potenciálon . . . 95
A.2 Konstruktív eljárás a Dirac-egyenlet megoldásainak megkeresésére . . . 95
A.3 Lorentz-invariáns normálás . . . 97

Chapter 1

Bevezetés

bemutatkozás; ki milyen szakirányt választott

részecskefizika feladatai:

1. Részecskék fizikája – jelenségek
   - milyen részecskék
   - detektálás: hogyan fedezhetjük fel őket
   - milyen szimmetriák állnak mögöttük
   - hogyan hatnak kölcsön
   - (új problémák, új elméletek)

2. Matematikai formalizmus ("elméletek") – jelenségek leírása
   - kollektív jelenségek leírása (másodkvantálás, analicitás és kauzalitás, renormálás, ...)
   - részecskefizika-specifikus (kvantumtérelmélet, ábrázoláselmélet, szóráselmélet, mértékelmélet, ...)
   - Lagrange formalizmus

Kettős cél:

- Áttekintés a részecskefizikáról
- Bepillantás a formalizmusba

Könyvek, irodalom

- Patkós A., Polónyi J.: Sugárzás és részecskék (egyetemi tankönyv, TypoteX, 2000)
- Bíró T.: Bevezetés a térelméletbe (Műegyetemi kiadó, 2002)
- H. Fritzsch: Kvarkok (Gondolat, 1987)
- L. Ledermann: Az isteni a-tom (TypoteX, 1995)
- M.E. Peskin, D.V. Schröder: An introduction to QFT (Westview Press, 1995)
- M. Kaku: Quantum Field Theory: A Modern Introduction (Oxford Univ. Press, 1993)
- `http://cdsweb.cern.ch` summer student lectures, academic training lectures

1.0.1 Skálák az Univerzumban

Célunk az atommagnál kisebb struktúrák felderítése. Kérdés, hogyan jutunk el oda, és milyenek a tipikus idő-, hossz- energia- stb. viszonyok? Ha ezt megértettük, érdemes a használt mértékegységeket ezekhez a tipikus értékekhez igazítani.

Hogy van ez a többi jelenségkörnél?

A karakterisztikus távolságok (l. `http://en.wikipedia.org/wiki/Orders_of_magnitude_(length)`)

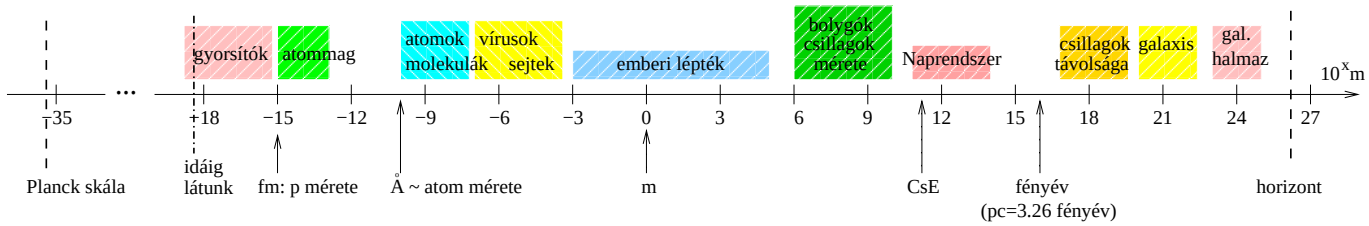


Figure 1.1: Skálák az Univerzumban. CsE≡ Csillagászati Egység (Au ≡ Astronomical Unit) $= 1.5 \cdot 10^{11}$ m, a Nap és a Föld átlagos távolsága.

- emberi lépték 0.1mm - 100 km. Szabványos mértékegységrendszer: SI: emberi léptékhez igazított. A megengedett egységek: J, kg, m, s, C, V, A, K, ... Ezeknek a többszörösét képezhetjük a következő szorzókkal (E: exa, Z: zetta, Y: yotta, a: atto, z: zecto, y: yocto):

Jelölés	k	M	G	T	P	E	Z	Y
Faktor	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
Jelölés	m	μ	n	p	f	a	z	y
Faktor	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}

Az SI egységeket használva viszont különböző állandókat kell bevezetnünk.
A természeti állandók értéke:

Jelölés	Érték	Elnevezés
c	$2.998 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	fénysebesség
h	$6.626 \cdot 10^{-34} \ \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}}$	Planck állandó
$\hbar$	$1.054 \cdot 10^{-34} \ \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}}$	Planck állandó
m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ kg	elektron tömeg
e	$1.602 \cdot 10^{-19}$ C	elemi töltés
k_B	$1.38 \cdot 10^{-23} \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$	Boltzmann állandó
ε_0	$8.85 \cdot 10^{-12} \ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}}$	vákuum-permittivitás
G	$6.67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\mathrm{N\ m}^2}{\mathrm{kg}^2}$	gravitációs állandó.

Ha más jelenségkört vizsgálunk, más mértékegységeket is használunk hozzájuk.

- csillagászatban 1 fényév (ly) = 1 év $\times 3 \cdot 10^8$ m/s $= 9.46 \cdot 10^{15}$ m (1 év $= 3.15 \cdot 10^7$ s). Másik standard jelölés: 1 pc = 3.26 lyr, parsec, azaz parallaxis másodperc. Definíciója mérési eljáráshoz kötődik: egy parsec távolságú objektum egy fél év alatti látszólagos elmozdulása 2" (szögmásodperc).
- Föld sugara: $\approx 6400\,\mathrm{km} = 6.4 \cdot 10^6$ m
- Nap sugara: $\approx 6.955 \cdot 10^8$ m
- Föld-Nap távolság (nagytengely: AU) $149,597,871\,\mathrm{km} \approx 1.50 \cdot 10^{11}$ m
- Naprendszer mérete (heliopause): ≈ 100 AU.
- legközelebbi csillagok (Proxima Centauri, α-Centauri): 4.2 - 4.3 ly $= 4.2 - 4.3 \cdot 10^{16}$ m
- Tejút átmérője: $\approx 100,000\,ly = 10^{21}$ m

- legközelebbi galaxisok $0.1 - 1\,Mly = 10^{21} - 10^{22}\,\mathrm{m}$
- galaxishalmazunk (local group) átmérője: $\approx 10\,Mly = 10^{23}\,\mathrm{m}$
- legközelebbi (nagy) galaxis cluster a Virgo cluster, távolsága $\approx 60\,Mly = 6 \cdot 10^{23}\,\mathrm{m}$
- horizont mérete $46.5\,Gly = 4.65 \cdot 10^{26}\,\mathrm{m}$ (Univerzum életkora 13.7 Gy).
- sejt mérete tipikusan $10\,\mu m = 10^{-5}\,\mathrm{m}$, emberi sejtek: $1 - 135\,\mu m$
- látható fény: $390 - 750\,\mathrm{nm} = 3.9 - 7.6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$
- vírusok mérete: $20 - 450\,\mathrm{nm} = 0.2 - 4.5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$
- atomok mérete: $0.3 - 3\,\text{Å} = 0.3 - 3 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$
- atommag mérete: $1 - 10\,\mathrm{fm} = 1 - 10 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$
- Planck skála: $1.65 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}$.

1.0.2 Kis távolságok felbontása

Hogy a kis méretekbe belelássunk, nagy nagyítású "mikroszkópra" van szükségünk. Azonban mikroszkópot még a felbontása is jellemzi.

- l. két réses kísérlet: egy vagy két rés van jelen? Heurisztikus érvelés: kioltást akkor látunk, ha $a \sin\varphi = \lambda/2$, ahol a a két rés távolsága, φ az eltérülés szöge. Akkor más az egy és a két rés, ha éppen $\varphi = \pi/2$-nél látunk kioltást $\Rightarrow$ $a = \lambda/2$.
- Mikroszkópra a legkisebb még megkülönböztethető távolság $R = \lambda/(2n\sin\theta)$, ahol $\tan\theta = D/(2f)$, D a lencse átmérője, f a fókusza. A legjobb lencsékre $n\sin\theta \approx 1$, vagyis a $R \approx \lambda/2$ (látható fény esetén $\sim 2 \cdot 10^{-7}$ m).

$\Rightarrow$ felbontóképesség $\equiv$ hullámszám. A részecskefizika világában $\sim 10^{-15} - 10^{-18}$ méter hullámhossz kellene!! $\Rightarrow$ Nincs ilyen természetes fényforrás, a fény hullámhosszát mesterségesen csökkenteni pedig nem lehet (lényegesen).

Ehelyett használjunk részecskéket, hiszen a de Broglie képlet alapján

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}. \tag{1.1}$$

$\Rightarrow$ kis hullámhosszakhoz nagy impulzusra van szükségünk. Töltött részecskék azonban gyorsíthatók $\Rightarrow$ bizonyos méretek alatt más csak töltött részecskéket használhatunk a mikroszkópunkban. Tipikus felbontóképességek:

Eszköz	forrás	max. felbontóképesség
mikroszkóp	látható fény	200 nm ($2 \cdot 10^{-7}$ m)
elektron-mikroszkóp	elektronok ($\sim$ 100 kV)	$1\,\mathring{A} = 10^{-10}$ m
radioaktív forrás	α részecskék	10^{-15} m (fm)
gyorsítók	200 GeV (LEP)	10^{-18} m
	20 TeV (LHC)	10^{-20} m

Töltött részecskék elektromos térrel való gyorsítása $\Rightarrow$ energia logikus egysége az az energimennyiség, amit egy elemi töltéssel rendelkező részecske 1V feszültségkülönbségen áthaladva felvesz. Ez az *elektronvolt* eV, értéke SI-ben

$$1\,\mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}, \tag{1.2}$$

a váltószám megegyezik az elemi töltés értékével.

A gyorítókban a hullámhossz $\sim 10^{-18}$ méter kell legyen, azaz $p \sim 0.66 \cdot 10^{-15}$ kg m/s. Ez sok vagy kevés? Ha egy részecskére jut, melynek nyugalmi tömege m_0, akkor

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \frac{p}{m_0 c} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.3}$$

Elektronra számolva $p/m_e c \approx 2.42 \cdot 10^6$ $\Rightarrow$ az elektron sebessége nagyon közel kell legyen a fénysebességhez, $v/c \sim 1 - 8.4 \cdot 10^{-14}$.

$\Rightarrow$ a gyorsítókban *ultrarelativisztikus* viszonyok uralkodnak, ami sok egyszerűsítést tesz lehetővé:

- ultrarelativisztikus viszonyok miatt az időt mérhetjük "méterben", azaz $t = x/c$ – ennyi idő alatt halad át a fény x távolságon: 1 m $\Leftrightarrow 0.33 \cdot 10^{-8}$ sec. Pontosabban fogalmazva ha az idő új mértékegysége $0.33 \cdot 10^{-8}$ sec, akkor a fénysebesség értéke $c = 1$.

- $E = mc^2$ képlet alapján a fénysebességgel azanosítható a tömeg és az energia: 1 kg $\Leftrightarrow 9 \cdot 10^{16}$ J, vagy 1 J $\Leftrightarrow 1.1 \cdot 10^{-17}$ kg. Ha az energiát a már említett eV-ban mérjük, akkor (1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J): 1 eV $\Leftrightarrow 1.78 \cdot 10^{-36}$ kg, az elektron tömege pedig $m_e \approx 511$ keV. Összehasonlításképpen a nagyfeszültségű távvezetékekben 110 kV feszültség van, esetenként azonban 245 kV-nál nagyobb feszültségeket is használnak.

  Másik értelmezés: ekkora energia befektetésével kelthetünk egy elektront a vákuumból... részleteket l. később.

- ultrarelativisztikus esetben $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \to pc$, vagyis az impulzust is mérhetjük energiával. Ezzel a hullámhossz

  $$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{E}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{E}{\hbar c}. \tag{1.4}$$

  Emiatt bevezethetünk a távolságra egy új mértékegységet, 1 $\hbar c$/eV $= 0.197 \cdot 10^{-6}$ m $\approx 0.2\mu$m. A $\hbar c$ szorzót itt sem szoktuk kiírni. Szokásosan kifejezve

  $$1\,\frac{1}{\text{MeV}} \Leftrightarrow 197\,\text{fm}, \qquad \text{vagy} \qquad 1\,\frac{1}{\text{GeV}} \Leftrightarrow 0.2\,\text{fm}, \tag{1.5}$$

  vagyis

  $$x\,\frac{1}{\text{MeV}} \Leftrightarrow \frac{197}{x}\,\text{fm}, \qquad \text{vagy} \qquad x\,\frac{1}{\text{GeV}} \Leftrightarrow \frac{0.2}{x}\,\text{fm}, \tag{1.6}$$

  A nagy gyorsítók energiája 10 - 10000 GeV $\Rightarrow$ a felbontóképessége $\sim 10^{-17}$ - 10^{-20} m, ahogy korábban láttuk.

- Két, r távolságra levő ponttöltés elektromágneses energiája

  $$V = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1.7}$$

  V Jouleban, r méterben mérendő az SI szerint. Ha eV-ban illetve $1/eV$-ban mérünk, akkor $r[m] = \hbar c \cdot R[eV^{-1}]$, azaz

  $$V = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}\frac{1}{R} = \frac{\alpha}{R}, \qquad \text{ahol} \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}, \tag{1.8}$$

  dimenziótlan. Ez jellemzi az alektromágneses kölcsönhatás "erősségét".

  Ez a mennyiség az elektromágneses problémák hierarchiáját is jellemzi. Pl. H-atom feladata, kvalitatíve; SI-ben

  $$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\Psi = E\Psi. \tag{1.9}$$

  Az új mértékegységekkel $x \to \hbar c x$, $m \to m/c^2$, ezzel

  $$-\frac{1}{2m}\Delta\Psi - \frac{\alpha}{r}\Psi = E\Psi. \tag{1.10}$$

Kötött állapotban az első két tag kb. egyenlő. A kötött állapot mérete legyen d; mivel $\Delta \sim 1/d^2$, ezért $1/(md^2) \sim \alpha/d$. Ezzel

$$\frac{1}{d} \sim \alpha m \quad E \sim \frac{\alpha}{d} \sim \alpha^2 m. \tag{1.11}$$

(a pontos képlet $E_n = \alpha^2 m/2$ az alapállapotra). Vagyis a kötési energia a nyugalmi energia α^2-szerese. Ha $\alpha \sim 1$, akkor a kötési energiával új részecskék keletkezését idéznénk elő! (l. később erős kölcsönhatásnál).

- gravitációs kölcsönhatásnál

$$V = \frac{Gm^2}{r} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m^2}{M_{Pl}^2\, r}, \tag{1.12}$$

a kölcsönhatás erőssége tömeg négyzet dimenziójú, $M_{Pl}^2 = \hbar c/G$, számértéke

$$M_{Pl} = 2.18 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg} = 1.22 \cdot 10^{28}\,\mathrm{eV} = 1.22 \cdot 10^{19}\,\mathrm{GeV} = 1.61 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}. \tag{1.13}$$

A gravitációs kölcsönhatás erőssége elektronra $\alpha_{gr} = m_e^2/M_{Pl}^2 \approx 0.18 \cdot 10^{-44}$, jóval gyengébb, mint az elektromágneses kölcsönhatás $\Rightarrow$ közönséges energiákon figyelmen kívül hagyhatjuk. Azonban $E \sim M_{Pl}$ energiaskálán a gravitáció lesz a legerősebb kölcsönhatás $\Rightarrow$ kvantumgravitáció kell.

Chapter 2

Fenomenológia

2.1 A részecskefizikai Standard Model

Ahogyan egyre mélyebben és mélyebben bontjuk fel az anyagot összetevőire, úgy kiderül az, hogy a korábban pontszerűnek tűnő objektumok valójában belső szerkezettel rendelkeznek. Az atom atommagból és elektronokból áll, az atommag protonokból és neutronokból, azonban még ezek is még elemibb összetevőkből, a kvarkokból épülnek fel. A jelenlegi berendezések felbontóképessége alapján ismert részecskéket tekintjük most át.

A potszerű részecskék között találhatunk feles spinű fermionokat, melyek az anyag alkotóelemei; egyes spinű mértékbozonokat melyek a különböző kölcsönhatások közvetítői; és egy különleges, nulla spinű (skalár) bozont, a Higgs bozont, amely a részecsketömegek létéért felelős. A fermionok, az anyag alapvető alkotóelemei három családba tartoznak. Mindhárom családnak van egy elemi töltéssel rendelkező töltött elektron jellegű tagja, egy közel nulla tömegű semleges neutrinó tagja és két, tört elemi töltéssel ($+2/3$ és $-1/3$) rendelkező kvark tagja.

$$\begin{pmatrix} e^- & u \\ \nu_e & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu^- & c \\ \nu_\mu & s \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tau^- & t \\ \nu_\tau & b \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

A kvarkok nem figyelhetők meg szabadon, csupán a kötött állapotai, ezek a hadronok. Az atommag építőkövei a protonok és neutronok három kvark kötött állapotai (uud illetve udd), melyek feles spinnel rendelkeznek. Ezekben a családokban a neutrinóknak csaknem nulla tömegük van, az elektron tömege 511 keV, ez a legkönnyebb nem neutrinó részecske. A legnehezebb a top kvark, ennek tömege 175 GeV, önmagában olyan nehéz, mint egy Yb (itterbium) atommag!

Az egyes spinű, ugyanakkor csupán két polarizációval rendelkező elemi bozonok, amelyeket mértékbozonoknak nevezünk, a kölcsönhatások közvetítő részecskéi. Ezek formálisan megfelelnek valamilyen négyes vektorpotenciálnak. Három alapvető kölcsönhatás létezik[1]: a gyenge, elektromágneses és erős kölcsönhatás. Az elektromágneses kölcsönhatás a töltött részecskékre hat. Közvetítő részecskéje a foton, amely az elektrodinamikából ismert A_μ négyes vektorpotenciál, illetve az elektromágneses sugárzás kvantuma. Egy fajta van belőle, melynek két transzverzális polarizációja van. Nulla tömegű részecske. A gyenge kölcsönhatás minden részecskére hat. Leírásához három vektropotenciált kell bevezetni, ehhez három féle sugárzás, illetve kvantumaiban három részecske tartozik. Ezek a részecskék a $W^\pm$ és Z bozonok, melyek a fotontól eltérően nem nulla tömegűek (kb. 90 GeV a tömegük). A gyenge kölcsönhatás különlegessége, hogy a tükrözésre nem szimmetrikus. Az erős kölcsönhatás kizárólag a kvarkokra hat. Nyolc közvetítő részecske tartozik hozzá, melyek mind tömegtelenek, ezek a gluonok. Az erős kölcsönhatás kölcsönhatási erőssége (finomszerkezeti állandója) az elektromos 1/137 helyett 1 nagyságrendű, vagyis valóban sokkal erősebb, mint az elektromos erők.

A kölcsönhatások felépítésének van egy általános sémája, mely látszólag az összes (a gravitációt is beleértve) kölcsönhatásra igaz. Ez a mérték-elv (másnéven a minimális csatolás elve), ennek segítségével egy valamely szimmetriával rendelkező kölcsönhatásmentes modellhez egyértelműen meg lehet konstruálni a

[1] A gravitáció a jelenlegi energiaskálákon még annyira gyenge, hogy nem része a részecskefizikai Standard Modelnek. A gravitáció leírása amúgy más nehézségekkel is jár.

kölcsönható mértékelméletet. A fizika nagy sikerének tekinthető, hogy megértettük, hogy minden kölcsönhatás azonos elveken működik. Az elv sikeres alkalmazhatóságához azonban nulla tömegű mérétkbozonok és (a gyenge kölcsönhatás paritássértése miatt) nulla tömegű fermionok kellenek. Ahhoz, hogy a valóságban megfigyelhető részecsketömegeket a mérték-elvvel és a szimmetriákkal össze lehessen egyeztetni, a részecsketömegeket is kölcsönhatásból kell származtatni, amelyben a kölcsönhatást leíró elmélet szimmetrikus, azonban a megfigyelhető állapotok már nem. Ezek a spontán sértett elméletekre jellemző tulajdonságok. Ezek legismertebbje a ferromágnesek spin modellje, ahol a spinek szeretnek azonos irányba állni. A spinek minden beállásához ugyanakkora energia tartozik (emiatt szimmetrikus a Hamilton-operátor), azonban egy konkrét anyagban véletlenszerűen kiválasztódik egy irány, amelybe az összes spin mutat. Ilyen módon kialakul egy makroszkopikus állapot. Vagyis az alapállapot már sérti a szimmetriát. Ugyanezen elvvel a Standard Modelben egy hipotetikus skalár tér, a Higgs tér spontán sértésével alakul ki egy olyan alapállapot, ahol már az elemi gerjesztések véges tömeggel rendelkeznek. Ezen gerjesztések között van a skalár tér kvantált sugárzása is, mely a Higgs-bozon. Ennek felfedezése a 2012-es év nagy eseménye, 125 GeV körüli tömeggel.

Az itt felsorolt áttekintés sok részletet nem említett, és sok fogalmat felületesen kezelt. A fenomenológiai rész feladata az, hogy ezeket az ismereteket tartalommal töltsük meg, és a részecskék tulajdonságait pontosabban megértsük. Ezt tárgyaljuk a most következő fejezetekben. A részecskék részletes tárgyalását a makroszkopikus világból indulva az energia növelésének, vagyis az egyre finomabb felbontásnak útján végezzük. Ez tulajdonképpen megfelel a történelmi útnak, melyet a XX. század kezdetétől követünk nyomon.

Onnan indulunk, hogy a XIX. század végére az általánosan elfogadottá vált, hogy léteznek atomok illetve molekulák. Ezen felül ismertek sugárzásokat:

- fény, röntgen-sugárzás $\Rightarrow$ erről tudták, hogy elektromágneses sugárzások
- katódsugárzás
- 1896, Becquerel: radioaktív sugárzás

2.2 Az atomok alkotóelemei

2.2.1 Katódsugárzás – elektron felfedezése

Elektromágneses jelenségek vizsgálata népszerű volt a XVIII. században $\Rightarrow$ onnan származik ez az eszköz

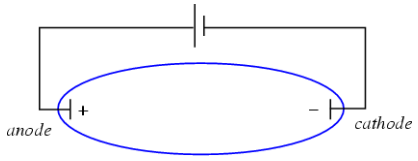


Figure 2.1: Katódsugárcső

- Faraday (1830) tanulmányozza $\rightarrow$ Faraday-féle sötét tér (dark space)
- Geissler (1855) vákuumszivattyú
- többen vizsgálják a katódsugarak természetét; Plücker (1855) megállapítja, hogy mágneses térben eltéríthető
- 1850-től felmerült, hogy elektromágneses hullám $\rightarrow$ a mágneses térben való eltérülés új jelenség lenne
- Hertz (1883): kísérlet elektromos térben való elhajlításra $\Rightarrow$ nem sikerült (valószínűleg nem megfelelő gáznyomás)
- Lenard (1892): vékony fólián áthatol $\Rightarrow$ nagyon kicsi alkotóelemekből áll $\Rightarrow$ elektromágneses hullám $\Rightarrow$ jóslat: fénysebességgel terjed

- J.J. Thomson (1894): jóval kisebb sebesség!
- Thomson (1897): mágneses és elektromos térben való pontos vizsgálat $\Rightarrow$ *új részecske*: elektron (Stoney, Helmholtz 1874 az elektromosság "atomjának" elnevezésére) $\Rightarrow$ 1906-ban Nobel-díj
  Az elektrolízises kísérletekből, és az Avogadro (Loschmidt) számból az elektron töltése adódik $\Rightarrow$ Thomson az elektron tömegét is meg tudta mondani: kb. 3 nagyságrenddel kisebb mint a H-atomé!
  $\Rightarrow$ Thomson-féle atommodell: szilvás puding (mazsolás kalács)

Katódsugárzás utóélete:

- Röntgen (1895) ezzel fedezi fel a röntgen-sugarakat: beburkolt katódsugárcső melletti fluoreszkáló só világít
- Hertz, Lenard (1902): katódsugárcső anódjára fényt bocsátva lehet szabályozni a kilépő elektronok energiáját ($\rightarrow$ segítő-gátló potenciál alkalmazása), ez a fény színétől függ!
  Einstein (1905): fény $\equiv$ fotonok sokasága, $E = h\nu$. $\Rightarrow$ 1921 Nobel-díj.
  $\Rightarrow$ fény részecske természete

Atommodellel probléma: vonalas színkép

- Fraunhofer (1815): sötét vonalak a Nap színképében (abszorpciós)
- Kirchhoff (1859): anyagok hevítésénél jellemző vonalak jelennek meg $\Rightarrow$ elemek felfedezése (Cr, Ru), abszorpciós színkép magyarázata

$\Rightarrow$ atomoknak belső szerkezetük van

2.2.2 Radioaktív sugárzás

- Becquerel (1896) fluoreszcencia és röntgensugárzás összefüggéseit keresve becsomagolt fényképlemezre fluoreszkáló uránsót helyezett, és napra tett (hogy a fluoreszkálás beinduljon) $\Rightarrow$ fényképlemez elfeketedett $\Rightarrow$ röntgen sugárzás?
  rossz időben nem tette napra, mégis elfeketedett!?
- Curie házaspár folytatta a kísérleteket más elemekkel: tórium, pólium, radium $\rightarrow$ radioaktivitás
- Rutherford (1898): kétfajta sugárzás (α, β). Egyik erősen ionizál, rövid hatótávú, másik kicsit ionizál, messzebbre elmegy.
  Becquerel megmutatja, hogy a β-sugárzás $\equiv$ elektronok
  Villard (1900): γ sugarak felfedezése
  Rutherford (1909): α-sugárzás $\equiv$ He^{++} atommagok.
- nagy energiaforrás ($\sim$ MeV energia, szemben az atomi $\sim$ eV energiájával), ismeretlen eredet!

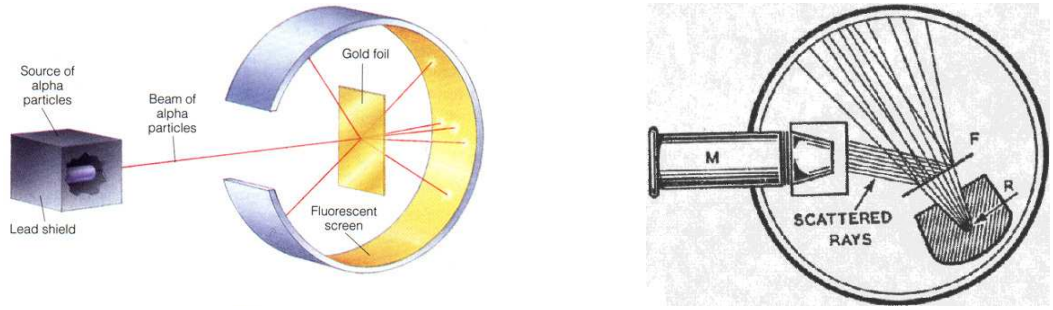


Figure 2.2: Rutherford-kísérlet

2.2.3 Rutherford kísérlet – atommag felfedezése

Crookes (1903): ZnS-ernyőn az α-részecskék felvillanást okoznak $\Rightarrow$ mikroszkóp segítségével észlelhető.
Rutherford α-részecskékkel foglalkozott Manchesterben $\Rightarrow$ kísérletek
1909: Geiger, Marsden α-részecskékkel bombázott arany-fóliát (l. Fig. 2.2), becsapódásokat figyelte.
Várakozás: a pudingon kicsit eltérülő α-részecskék $\Rightarrow$ töltéseloszlás (l. később)
Megfigyelés: *Néha* (1 a 8,000-ből Pt-ra, 1 a 20,000-ből Au-ra) visszafelé szóródik!
Következtetés: valami kis méretű nagy tömegű szórócentrum visszalöki a részecskéket!
Aranynál Rutherford mérése szerint $3.4 \cdot 10^{-14}$ m-es az atommag (mai szám kb. 7 fm $= 7 \cdot 10^{-15}$ m)
arany atom mérete 135 pm $= 1.35 \cdot 10^{-10}$ m $= 1.35$Å $\Rightarrow$ mag kb. 4-5 nagyságrenddel kisebb.
$\Rightarrow$ Nem jó a szilvás pudding modell, az atom kis méretű, töltött, és az atom tömegét lényegében teljes egészében hordozó atommagból és elektronokból áll, jó része üres!
Publikálás 1911-ben.
Rutherford-Bohr-féle atommodell a vonalas színképpel való összeegyeztetéshez: elektron csak $J = hn$ impulzusmomentumú pályákon keringhet $\Rightarrow$ pontosan leírta a H-atom színképét

A szórócentrum mérete – kvalitatív becslés

A Rutherford kísérletben $E_\alpha \approx 5\,\mathrm{MeV}$ volt. $M_\alpha \approx 4\,\mathrm{GeV}$ $\Rightarrow$ nemrelativisztikus

$$p \approx \sqrt{2mE} \approx 200\,\mathrm{MeV} \approx 1\,\mathrm{fm}, \tag{2.2}$$

azaz a felbontóképesség kb. 1 fm.

2.2.4 Szóráskísérletek I.

Szóráskísérletek jelentősége: a szórási képből a szórócentrum szórási erősségének eloszlására ($\Rightarrow$ töltéseloszlásra) következtethetünk.
$\Rightarrow$ azóta is ez a legfontosabb anyagvizsgálati módszer!

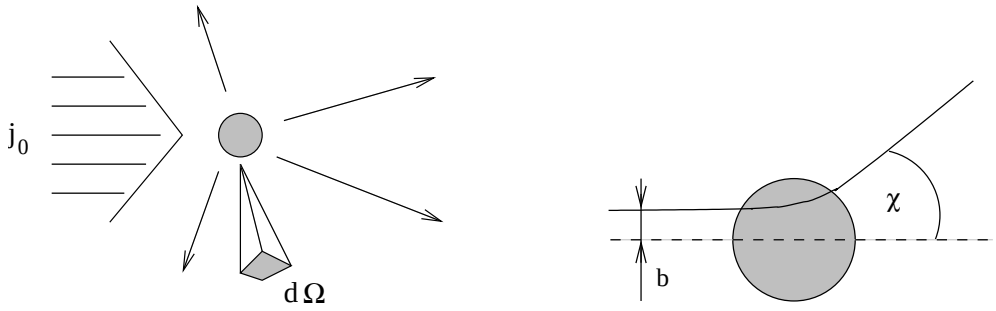


Figure 2.3: Szórás

Klasszikus szórásnál: j_0 bemenő részecskeáram esetén (azaz felületegységre időegységenként j_0 részecske érkezik be) Ω körüli $d\Omega$ térszögbe időegység alatt szóródott részecskék számát nézzük: $dn \sim j_0 d\Omega$, az arányossági tényező a differenciális hatáskeresztmetszet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{j_0}\frac{dn}{d\Omega} \tag{2.3}$$

Gömbszimmetrikus szórócentrum esetén b impakt paraméterrel induló részecske pályája egyértelmű $\Rightarrow$ χ szórási szög megadható, vagy $b(\chi)$ reláció. Időegység alatt $[b, b + db]$ körgyűrűn bejövő részecskék száma $j_0 2\pi b db$, ezek csak χ szögben szóródnak:

$$dn = j_0\, 2\pi\, b\, db = j_0\, 2\pi\, b \left|\frac{db}{d\chi}\right| d\chi. \tag{2.4}$$

Az azimutszög szerinti eloszlás egyenletes, azaz egy $d\chi d\varphi$ szögbe szóródó részecskék száma $dnd\varphi/(2\pi)$. Mivel $d\Omega = d\varphi \sin\chi\, d\chi$, ezért végül

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \left|\frac{db^2(\chi)}{d\cos\chi}\right|. \tag{2.5}$$

Vagyis mérve $d\sigma/d\Omega$-t mint χ függvényét a fenti egyenlet differenciálegyenlet lesz $b(\chi)$ meghatározásához.

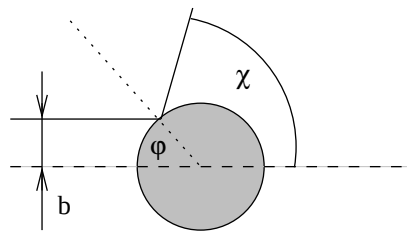


Figure 2.4: Szórás merev gömbön

Merev gömbre:

$$b = R\sin\varphi = R\sin\frac{\pi-\chi}{2} = R\cos\frac{\chi}{2} \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{R}{2}\sin\frac{\chi}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad\Rightarrow\quad \sigma = R^2\pi, \tag{2.6}$$

A $[\chi_0, \pi]$ tartományba való szórás hatáskeresztmetszete:

$$\sigma(\chi > \chi_0) = \int_{\chi_0}^{\pi} d\chi\, 2\pi\sin\chi \frac{d\sigma}{d\Omega} = R^2\pi\cos^2\frac{\chi_0}{2}. \tag{2.7}$$

A teljes hatáskeresztmetszet ($\chi_0 = 0$) éppen a gömb keresztmetszetének felülete!

A nagy szögű szórás valószínűsége: ha a maximális impakt paraméter H, akkor az összes beeső részecske száma $j_0 H^2\pi$, azaz

$$\mathcal{P}(\chi > \chi_0) = \frac{j_0\sigma(\chi > \chi_0)}{j_0 H^2\pi} = \left(\frac{R}{H}\right)^2 \cos^2\frac{\chi_0}{2} \overset{\chi_0=\pi/2}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{R}{H}\right)^2. \tag{2.8}$$

Innen kiszámolható az R értéke.

1/r-es potenciálra:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \sin^{-4}\frac{\chi}{2}. \tag{2.9}$$

A $[\chi_0, \pi]$ tartományba való szórás hatáskeresztmetszete

$$\sigma(\chi > \chi_0) = \frac{\alpha^2\pi}{4E^2}\left(\frac{1}{\sin^2\chi_0/2} - 1\right). \tag{2.10}$$

A teljes hatáskeresztmetszet végtelen ($\chi_0 = 0$-nál); azonban a szomszédok és az árnyákolás miatt b-nek van maximuma $\Rightarrow$ χ_0-nak minimuma:

$$\sigma_{tot} = \frac{\alpha^2\pi}{4E^2}\left(\frac{1}{\sin^2\chi_{min}/2} - 1\right). \tag{2.11}$$

Az érdekes kérdés, hogy a nagy szögű szórás valószínűsége mekkora:

$$\mathcal{P}(\chi > \chi_0) = \frac{j_0\sigma(\chi > \chi_0)}{j_0 H^2\pi} = \frac{\alpha^2}{4H^2E^2}\left(\frac{1}{\sin^2\chi_0/2} - 1\right) \overset{\chi_0=\pi/2}{\longrightarrow} \frac{\alpha^2}{4H^2E^2}, \tag{2.12}$$

itt energiafüggő.

2.3 Elméleti jóslatok, új kölcsönhatások

Világkép:

- Részecskék: elektron, proton (Rutherford elnevezése, ~ 1920), és az elektromágneses sugárzások; elemi tulajdonságok meghatározása (tömeg, töltés, spin)
- Atom: atommag, körülötte keringő elektronok $\Rightarrow$ 1913 Bohr-Rutherford atommodell, 1920 Sommerfeld általánosítása $\Rightarrow$ kijön a vonalas színkép, nincs sugárzási veszteség, DE: hiányzik az elvi alátámasztás
  1925 Heisenberg, 1926 Schrödinger: kvantummechanika
- Atommag: miből áll? tömegspektroszkópia $\Rightarrow$ $M = Am_p$, ahol A egész
  elektronszerkezet $\Rightarrow$ $Q = Ze$, ahol $Z < A$ egész
  $\Rightarrow$ elektronokból és protonokból áll: A proton, $A - Z$ elektron; beta-bomlás jelensége alátámasztja

2.3.1 Pozitron felfedezése

Relativitáselmélet & kvantummechanika? $\Rightarrow$ 1928 P. Dirac felírja a Dirac-egyenletet

- helyesen írja le a spint, jó a statisztikája (fermion), konzisztens a kauzalitással
- Klein, Nishina 1928: giromágneses faktor $g = 2$, egyezésben az Einstein-de Haas kísérlettel (1915, Back 1919 helyes kísérlet)
- nemrelativisztikus határesete a Schrödinger egyenlet (ill. a Pauli-egyenlet)

Így hamar elfogadták. Azonban van egy furcsa jóslata: negatív energiájú állapotok is léteznek, a Hamilton operátor nem korlátos alulról.

Dirac: minden negatív energiájú állapot be van töltve – ez az új vákuum (Dirac tenger). Következmény

- a negatív energiájú betöltött állapotokból kilökhetünk elektront $\Rightarrow$ megmarad egy pozitív töltésű, elektronnal azonos tömegű és élettartamú részecske $\Rightarrow$ pozitron
  1932 Anderson: kozmikus sugárzást figyelt Wilson kamrával, ott az elektronnal azonos tömegű, ellentétes töltésű részecskét figyelt meg $\Rightarrow$ 1936 Nobel díj

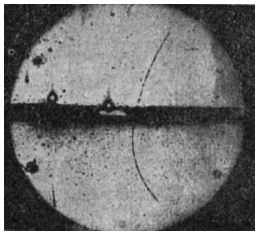


Figure 2.5: Pozitron felfedezése a kozmikus sugárzásban (Wilson kamra). A kép közepén ólomlemez lassítja a pozitront

- a negatív energiájú állapotok: $e^{-iEt} = e^{i|E|t} = e^{-i|E|(-t)}$ $\Rightarrow$ időben visszafelé haladó állapot. A helyette maradó lyuk, azaz az antirészecske impulzusa is ellentétes, vagyis $\overline{|\mathbf{p}\rangle} \equiv \langle -\mathbf{p}|$.
- nincs egy-részecske relativisztikus kvantummechanika $\Rightarrow$ a Hilbert tér különböző részecskeszámú állapotok összessége (Fock tér), ezek között a kölcsönhatások visznek át $\Rightarrow$ másodkvantálás (Dirac, 1927), kvantumtérelmélet
- vákuum struktúrája is bonyolult, $E > 2m$ energiaközléssel két m tömegű részecskét kelthetünk
- feltételezés: minden részecskéhez tartozik egy antirészecske (esetleg vele azonos), mely ellentétes töltésű, de azonos tömegű és élettartamú

2.3.2 A neutron és az erős kölcsönhatás

Az atommagban nem stimmel valami

- határozatlansági reláció $\Rightarrow$ e^--t az elektromos erők nem tudják a magban tartani
- hasonló érv: kísérletileg kötési energiák megfigyelése $\Rightarrow$ nagy A-ra nem lehetne stabil az atommag.
- N-anomália: N-ben $A = 14$, $Z = 7$ $\Rightarrow$ a modell szerint 7 e^-, és 14 p^+ van a magban $\Rightarrow$ páratlan szamú fermion $\Rightarrow$ félegész spin
  ugyanakkor kísérletileg (hiperfinom felhasadás) $\Rightarrow$ $S_N = 1$!?

Javaslat (Rutherford, Heisenberg, ~ 1920): $\exists$ egy semleges részecske (neutron); a p^+és n^0 között erős kötés (nem elektromos) $\rightarrow$ a felszbaduló nagy energiák erre utaltak

- 1930: Bothe, Geiger: Be $+\alpha \rightarrow$ nem ionizáló, vastag ólomlemezen is áthatoló sugárzás $\rightarrow \gamma$?
  A sugárzás energiája azonban ekkor valószínűtlenül nagy lenne (Curie, 1932): $50\,\mathrm{MeV} \gg$ nukleáris energiák
- Chadwick 1932: Po α-bomlásából: $He + Be \rightarrow C + n$ átalakítás, a kilépő nagy energiájú n létét N-nel töltött expanziós kamra (expansion chamber, l. később) segítségével fedezte fel: l. Fig. 2.6. A n^0 vagy

Figure 2.6: Neutron megfigyelése a meglökött atommag segítségével

N-t vagy H magot lök meg $\Rightarrow$ a két sebességet megfigyelve a tömegre kapunk értéket:

$$m_n = 939.565\,\mathrm{MeV}, \qquad (m_p = 938.27\,\mathrm{MeV}). \tag{2.13}$$

Mivel $m_n > m_p$, nem lehet nem kötött állapot, bomlik
$\Rightarrow$ Chadwick 1935 Nobel díj

2.3.3 Izospin

A neutron felfedezése nagyobb jelentőségű, mint csupán egy részecske megismerése, mert egy új kölcsönhatást is megismertek ezzel: a megerőket vagy erős kölcsönhatást. Erről a kölcsönhatásról a p^+ és a n^0 tömegének közel azonos volta sokat elárul. Az ilyen egybeesések általában a kölcsönhatás szimmetriájával állnak kapcsolatban.

A magot összetartó erők különböznek az elektromos erőktől, a teljes Hamilton-operátor: $H = H_{mag} + H_{ED} + \ldots$. A szabad részecskék sajátérték-egyenlete $H\,|\Psi\rangle = E\,|\Psi\rangle$, itt az energia a *teljes energia*, azaz a nyugalmi energiát is tartalmazza $\Rightarrow$ $E^2 = p^2 + m^2$ $\Rightarrow$ legalacsonyabb érték éppen a részecske tömege.

Kísérletekből: magerők jóval erősebbek az elektromos erőknél $\Rightarrow$ $H_{mag} \gg H_{ED}$, azaz a nyugalmi tömeg nagy része innen jön. A proton és a neutron határozott tömegű, vagyis energia sajátállapotok, azaz a tömegkülönbségeket és az elektromos kölcsönhatást elhagyva

$$H_{mag}\,|p^+\rangle = m_N\,|p^+\rangle\,, \qquad H_{mag}\,|n^0\rangle = m_N n^0 \quad \Rightarrow \quad H_{mag} = m_N(|p^+\rangle \otimes \langle p^+| + |n^0\rangle \otimes \langle n^0|), \tag{2.14}$$

a p^+és n^0által kifeszített 2D térben (m_N a nukleon-tömeg). Ebben a térben bázist választva

$$|p^+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |n^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_{mag} = m_N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Ez azonban azt is jelenti, hogy ebben a 2D térben minden unitér transzformáció után a H_{mag} változatlan marad. Más szóval a magerőknek van egy szimmetriája: $U \in SU(2)$ esetén $[H_{mag}, U] = 0$. Ekkor, általában ha $|\Psi\rangle$ sajátállapota H_{mag}-nak m sajátértékkel, akkor

$$H_{mag} U |\Psi\rangle = U H_{mag} |\Psi\rangle = m U |\Psi\rangle , \tag{2.16}$$

azaz $U|\Psi\rangle$ is sajátvektor, ugyanolyan sajátértékkel $\Rightarrow$ ha $|\Psi\rangle$ egy részecske-állapotot jelöl, melynek tömege m, akkor kell lennie egy másik részecskének is ugyanolyan tömeggel $\Rightarrow$ a spektrum elfajult, tömeg multiplettek jönnek létre.

Ha a magerőknek ez nemcsak véletlen szimmetriája, hanem ez a magerők tulajdonsága, akkor a p^+ és n^0 tömegének elfajulása természetes. Ez a szimmetria az *izospin* (Heisenberg).

A 2D komplex forgatások leírása

$$U = e^{-i\frac{\sigma_i \omega_i}{2}}, \tag{2.17}$$

ahol

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

a Pauli mátrixok. Az elektrodinamikának *nem szimmetriája* U – töltés operátora

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1+\sigma_3}{2}. \tag{2.19}$$

2.3.4 A pion megjósolása

Elektromos tér kvantuma: foton
Magerők kvantumelmélete is ad részecskéket? $\Rightarrow$ Yukawa 1935: a magerők kvantumai a π pionok.
Különbség: magerők rövid hatótávolságúak, elektromosság hosszú hatótávú:

$$V_{ED}(r) \sim \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_{ED} = 0. \tag{2.20}$$

Yukawa javaslata:

$$V_{mag}(r) \sim \frac{e^{-r/R}}{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_{mag}(r \gg R) = \frac{1}{R^2} V_{mag}. \tag{2.21}$$

Dinamika? Elektrodinamikában $\Delta \to \Delta - \partial_t^2$ $\Rightarrow$ elektromágneses sugárzásra (Lorenz-mértékben)

$$(\Delta - \partial_t^2) A_\mu(t,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega^2 - k^2) A_\mu(\omega, k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = k^2. \tag{2.22}$$

Mivel az energia $\hbar\omega$, az impulzus $\hbar k$ $\Rightarrow$ $E = p$, nulla tömegű a foton.

Kövessük ugynezt itt is: a π-sugárzás terére

$$(\Delta - \partial_t^2)\pi(t,x) = \frac{1}{R^2}\pi \quad \Rightarrow \quad (\omega^2 - k^2 - \frac{1}{R^2})\pi(\omega, k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = k^2 + \frac{1}{R^2}. \tag{2.23}$$

Az energia és impulzus beazonosításával

$$E^2 = p^2 + \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad m_\pi = \frac{1}{R}, \tag{2.24}$$

azaz a pion tömeges, a tömege éppen a hatótávolsága!
A hatótávolságra a proton méretét, kb. 1 fm-t véve $\Rightarrow$ $m_\pi \approx 200$ MeV a jóslat (a valóságban 140 MeV, l. később).

- 1938, Steet, Stevenson, Anderson, Neddermayer találtak egy 105 MeV tömegű részecskét Wilson kamrával figyelve a kozmikus sugárzást! $\Rightarrow$ pion!
  1940-ben megfigyelték a részecske e^--ra való bomlását
- háború...

- 1945 Conversi, Pancini, Piccioni: 1m ólomlemezen is áthatol!? $\Rightarrow$ nem hathat erősen kölcsön $\Rightarrow$ nem lehet a pion!
- 1942-43 Tanikawa, Sakata, Inoue; 1947 Bethe, Marshak: két mezon-hipotézis, feltehető, hogy a pion elbomlik egy másik részecskére: $\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} + \bar{\nu}$ mai írásmóddal. A μ tovább bomlik: $\mu^{\pm} \to e^{\pm} + \nu_{\mu} + \bar{\nu}_e$ mai írásmóddal (akkor még nem gondoltak több neutrinó létére).
- ha így van, akkor a kozmikus sugárzásban keletkező pionok már magasan elbomlanak, és csak a bomlástermékek jutnak el a Föld felszínére – oda nem lehet laboratóriumot telepíteni.
  fotoemulzió! 1938-tól fejlesztik, Walter Heitler, Cecil Powell, később munkatársaik $\Rightarrow$ magas hegyekre viszik (Mount Chacaltaya, Andok, Bolívia), ballonokkal viszik fel $\Rightarrow$ 1947 Lattes, Occhialini, Powell beszámol ilyen megfigyelt bomlásról (ők nevezik el pionnak illetve müonnak a részecskéket) $\Rightarrow$ 1950 Powell Nobel díj.
- 1950-ben Carlson szintén emulziós lemezen felfedezi a π^0-t, amelynek bomlásai $\pi^0 \to e^- + e^+ + \gamma$ és $\pi^0 \to 2\gamma$

Ezzel egy csapásra sok részecskét találtunk: $\pi^{\pm,0}$ és $\mu^{\pm}$. Ezek adatai:

$$m_{\pi^{\pm}} = 140 \text{ MeV}, \qquad \tau_{\pi^{\pm}} = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ sec} \approx 7.8 \text{ m}, \qquad m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}, \qquad \tau_{\pi^0} = 8.4 \cdot 10^{-17} \text{ sec(!)} \approx 25.1 \text{ nm}, \qquad S = 0$$
$$m_{\mu} = 105 \text{ MeV} \qquad \tau_{\mu} = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ sec} \approx 660 \text{ m} \qquad S = 1/2. \tag{2.25}$$

- A pion erős kölcsönhatásban részt vesz, a müon (mint az elektron), nem. Elbomlásához a gyenge kölcsönhatás kell (l, később).
- A müon földfelszínen való megfigyelhetősége a relativitáselmélet bizonyítéka.

Hogyan illeszthető be a pion az erős kölcsönhatás izospin rendszerébe? 3 részecske $\Rightarrow$ izospin 1 $\Rightarrow$ két 1/2-es izospin "kötött állapota"? A spin is stimmel.

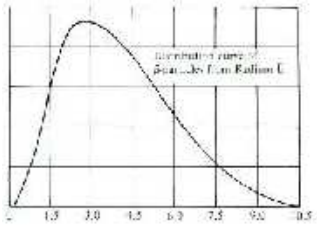
Az elektromos illetve gyenge kölcsönhatásnak nem szimmetriája az izospin $\Rightarrow$ különböző töltés, tömeg. A töltés operátort azonban módosítani kell

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}, \tag{2.26}$$

ahol $B = 1$ a p^+-ra és n^0-ra, $B = 0$ a pionokra.

2.3.5 A neutrínó és a gyenge kölcsönhatás

1907 Hahn, Schmidt, Meitner: beta-bomlásban a kilépő elektronok energia-eloszlása nem éles!?



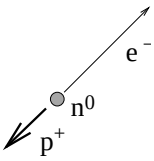


Figure 2.7: Beta-bomlásban a kilépő elektronok energia-eloszlása (vízszintes tengelyen 0.1 MeV-ben az energia)

Várakozás: kb. álló neutron, impulzus- és energia megmaradás:

$$p_e = p_p = p, \qquad m_n = \sqrt{p^2 + m_e^2} + \sqrt{p^2 + m_p^2} \quad \xrightarrow{p \ll m_p} \quad E_e = m_n - m_p = \Delta m, \tag{2.27}$$

egy meghatározott energia; kiszélesedés másodrendű effektus.

Magyarázat? energiamegmaradás sérül?

Pauli 1927: van egy harmadik partner; Fermi: új részecske: ν

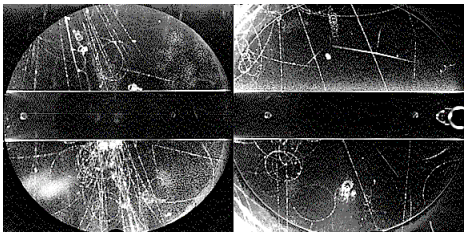
Milyen erősen hat kölcsön a ν?

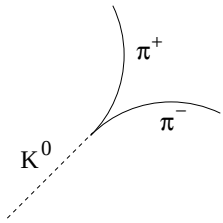
- n^0 élettartam$\sim K/|\langle p^+ e^- \bar{\nu}\,|\,n^0\rangle^2$, ahol K kinematikai faktor
- ν hatáskeresztmetszet a $\nu + n^0 \to p^+ + e^-$ folyamatból: $\sigma \sim K'\langle p^+ e^-\,|\,\nu\, n^0\rangle^2$
- mivel $|\bar{\nu}, -\mathbf{p}\rangle \equiv \langle\nu|$, ezért a két mátrixelemet ugyanaz a függvény írja le (keresztezési szimmetria) $\Rightarrow$ kiszámítható a hatáskeresztmetszet, vagy a szabad úthossz ($\ell = 1/(n\sigma)$, ahol n a szórócentrumok sűrűsége)
- Mivel a n^0élettartam igen hosszú ($\sim$ 14.8 perc!) $\Rightarrow$ a neutrínó gyengén hat kölcsön
- Számszerűen: 3 MeV-es neutrínó szabad úthossza vízben $\approx$ 150 fényév!! (10^{-18} a kölcsönhatás valószínűsége m-enként) $\Rightarrow$ nagyon nehéz kimutatni!
  1953-ban Reines és Cowan mutatta ki (l. később).

$\Rightarrow$ új típusú kölcsönhatás, mert semleges részecskét is érint; kis hatáskeresztmetszetek $\Rightarrow$ *gyenge kölcsönhatás* (Fermi elmélet)

2.3.6 A kaon

Nem megjósolt részecskéket is találtak! Ismét kozmikus sugárzás hatásának kitett emulzióban, Wilson-ködkamrával $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$ illetve $K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ folyamatra utaló jelet láttak, l. Fig. 2.8. A keletkező





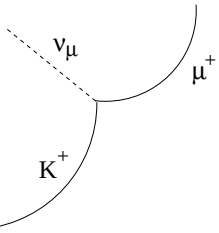


Figure 2.8: Kaon felfedezése; bal oldalon $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$, a jobb oldalon $K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$

részecskék sebességéből megállapítható az eredeti részecske tömege. A felfedezett részecskék adatai:

$$\begin{aligned} &m_{K^\pm} = 493\ \text{MeV}, \qquad \tau_{K^\pm} = 1.2\cdot 10^{-8}\ \text{sec} \approx 3.7\ \text{m}, \qquad S = 0 \\ &m_{K^0} = 498\ \text{MeV}, \qquad \tau_{K^0_S} = 9.0\cdot 10^{-11}\ \text{sec} \approx 2.7\ \text{cm} \qquad \tau_{K^0_L} = 5.8\cdot 10^{-8}\ \text{sec} \approx 15.5\ \text{m} \end{aligned} \tag{2.28}$$

1953: Dalitz, Fabri: két készecske: θ, τ, melyek megfigyelt bomlása

$$\theta \to \pi^+ + \pi^0, \qquad \tau \to \pi^+ + \pi^0 + \pi^0. \tag{2.29}$$

Mivel π paritása -1 (pszeudoskalár részecske), ezért θ paritása 1, τ paritása -1. Azonban más tulajdonságaik teljesen azonosak voltak!! *theta-tau rejtély* $\Rightarrow$ a két részecske valójában ugyanaz: K^+.

Ha azonban a két folyamat valójában egy részecske kétféle bomlását mutatja, akkor valami baj van a paritásmegmaradással, azaz a tükrözési invarianciával.

2.3.7 Térdő szimmetriák és paritássértés

Tapasztalat: sokféle rendszer ugyanazt a szimmetriát tükrözi $\Rightarrow$ ezt a térdő szimmetriájának tekintjük $\Rightarrow$ matematikai megfogalmazás után minden rendszertől elvárjuk ennek teljesülését $\Rightarrow$ Lagrange függvény lehetséges alakja

Végülis ez *tapasztalaton* alapul: pl. "mozgó" rendszerben a fizikai törvények ugyanolyanok; vagy a fénysebesség ugyanakkora.

A tükrözésekre nincsenek közvetlen tapasztalataink: vajon milyen lenne egy kísérlet eredménye, ha a tükörvilágban valósítanánk meg? A konkrét modellek azonban mind tudták ezt az (extra) szimmetriát is.

QM: legyen a tértükrözés operátora $P: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, önadjungált tükrözés $\Rightarrow$ $P^2 = 1$ $\Rightarrow$ sajátértékei ± 1. Ha a mozgásegyenletek szimmetriája, akkor $[P, H] = 0$ $\Rightarrow$ van közös sf. rendszer $\Rightarrow$ a részecskéket P sajátértékei szerint is jellemezhetjük (jó, azaz megmaradó kvantumszám): *paritás.*

$Y_{lm}(-\theta, -\varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ miatt az $|L, m\rangle$ állapot paritása $(-1)^L$.

Egy részecske állapot legyen $|\mathbf{p}\rangle$, ahol $\mathbf{p}$ az impulzus:

$$P\,|\mathbf{p}\rangle = \alpha\,|-\mathbf{p}\rangle\,, \tag{2.30}$$

részecske$\to$ visszafelé mozgó részecske; az $\alpha = \pm 1$ a belső paritás. Több részecske esetén külön-külön vesszük

$$P\,|\mathbf{p}_1, \dots \mathbf{p}_n\rangle = \alpha_1 \dots \alpha_n\ |-\mathbf{p}_1, \dots - \mathbf{p}_n\rangle\,, \tag{2.31}$$

Állapotok belső paritása között összefüggést teremt, ha az egyik állapot a másikba időfejlődés során át tud alakulni (és a paritás szimmetria). Ekkor ugyanis

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{q}_1, \dots \mathbf{q}_m\rangle \to e^{-iHt}\,|\mathbf{p}_1, \dots \mathbf{p}_n\rangle \\
&\quad\Rightarrow\quad P\,|\mathbf{q}_1, \dots \mathbf{q}_m\rangle = \alpha_1' \dots \alpha_m'\,|-\mathbf{q}_1, \dots - \mathbf{q}_m\rangle \to P e^{-iHt}\,|\mathbf{p}_1, \dots \mathbf{p}_n\rangle = \alpha_1 \dots \alpha_n e^{-iHt}\,|-\mathbf{p}_1, \dots - \mathbf{p}_n\rangle \\
&\quad\Rightarrow\quad \alpha_1 \dots \alpha_n = \alpha_1' \dots \alpha_m'.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

- A proton, neutron illetve elektron paritását szabadon választhatjuk: legyen mindhárom $+1$.
- pion paritása: $\pi^- + D \to 2n^0$ "atom" bomlásából: kezdetben $L = 0$ és $S = 1$, a végén $S = 1$ csak $L = 1$ mellett valósulhat meg (szimmetrikus spin kombináció, a teljes hullámfüggvény viszont antiszimmetrikus) $\Rightarrow$ kezdeti paritás $\alpha_\pi \alpha_D$, a végén $(-1)^L = -1$. Mivel a deutérium $p^+ + n^0$, paritása 1 $\Rightarrow$ pion paritása -1.
- Foton paritása: atomi nívók átmenetei: megfigyelhető $p \to s$ átmenet, ahol tehát a pályamomentum változása $\Delta L = 1$. Emiatt a kisugárzott foton paritása -1. Ugyanilyen módon a foton spinje 1.

Paritás-sértés

$\theta - \tau$ rejtély: 1956-ban T.D. Lee, C.N. Yang felvetette, hogy lehetséges, hogy ugyanaz a részecske és a paritás sérül?

- erős, elektromágneses folyamatban nem sérülhet, ezt már akkor is eleget tapasztalták
- gyenge kh? javasoltak kísérletet: l. Fig. 2.9. Ha a paritás szimmetriája a gyenge kölcsönhatásnak, akkor a spin iránya nem befolyásolhatja a béta-bomlásban kimenő elektronok eloszlását

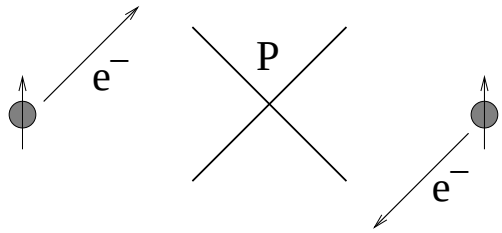


Figure 2.9: Paritás szimmetria esetén elvárt eredmény

1957: C.S. Wu: Co^{60} beta bomló izotópját erős mágneses térben lehűtötték $\Rightarrow$ $B||S$, mérték az elektronok eloszlását $\Rightarrow$ *igen nagy szimmetriasértés adódott!*

Magyarázat (Lee, Yang; Landau; Salam): ν-k csak balkezesek lehetnek, az antineutrinók ($\bar{\nu}$) csak jobbkezesek

paritás operátor belkezes neutrínót jobbkezes neutrínóba vinne, ilyen viszont nincs $\Rightarrow$ a gyenge kölcsönhatásban a paritás nem szimmetria (100%-ban sérül).

Egyéb diszkrét szimmetriák

Töltéstükrözés: $C\ \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ C^2 = 1$, amely részecskét antirészecskéjébe visz át, pl.

$$C\,|\nu, \mathbf{p}\rangle = \alpha_C\,|\bar{\nu}, \mathbf{p}\rangle\,. \tag{2.33}$$

C balkezes neutrínót balkezes antineutrínóba vinne, ilyen viszont nincs $\Rightarrow$ gyenge kölcsönhatásban biztosan sérül
Emiatt gyenge kölcsönhatás segítségével részecske és antirészecske azonos kvantumszámok esetén (pl. azonos töltés) egymásba átalakulhat $K^0 \to \bar{K}^0$ $\Rightarrow$ energia sajátállapot keverék: K_L^0 és K_S^0, különböző élettartamúak

Viszont CP balkezes neutrinót jobbkezes antineutrínóba visz át $\Rightarrow$ szimmetria? Mindenesetre kicsit sérülhet csak!

CP valóban szimmetria? Tapasztalat

$$K^0 \to e^+ + \pi^- + \nu, \qquad K^0 \to e^- + \pi^+ + \bar{\nu} \tag{2.34}$$

egymás CP tükrözött folyamatai *nem egyformán valószínűek*!

$$\frac{\sigma(K^0 \to e^+ + \pi^- + \nu)}{\sigma(K^0 \to e^- + \pi^+ + \bar{\nu})} = 1.003. \tag{2.35}$$

Azaz különbséget lehet tenni az e^- és e^+ között; meg lehet állapítani, hogy egy világ anyagból vagy antianyagból áll; lehet definiálni a jobb/bal fogalmát: pl. $\pi^+ \to e^+ + \nu$ folyamatban keletkező ν helicitása a bal.

Azt is jelenti, hogy spontán megsérülhet a részecske-antirészecske szimmetria $\Rightarrow$ Univerzum jelenlegi állapota.

Időtükrözés: $T:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ T^2 = 1$, amely a bemenő és kimenő állapotokat megcseréli:

$$T\,|\mathbf{p}\rangle = \alpha\,\langle\mathbf{p}| \quad \Rightarrow \quad T(z\,|\mathbf{p}\rangle) = \alpha(z\,|\mathbf{p}\rangle)^\dagger = \alpha z^*\,\langle\mathbf{p}|\,, \tag{2.36}$$

azaz anti-unitér transzformáció.

Lokális relativisztikus kvantumtérelméletekben, ahogy majd látni fogjuk egy antirészecske matematikailag megfelel egy időben visszafelé mozgó részecskének (lyuk). Vagyis

$$|\mathbf{p}\rangle = \overline{\langle -\mathbf{p}|} \sim T\overline{|-\mathbf{p}\rangle} \sim TC\,|-\mathbf{p}\rangle \sim TCP\,|\mathbf{p}\rangle\,. \tag{2.37}$$

Vagyis a TCP hatása egy állapotot önmagával arányos állapotba visz át. Emiatt igaz a

CPT tétel: lokális relativisztikus kvantumtérelméletekben a CPT szimmetria.

2.4 Részecskék rendszerezése

Vissza a részecskék felfedezéséhez: az 1950-es évekre kezdett megnövekedni az ismert részecskék száma

e^-, p^+, n^0, γ, e^+, $\pi^{\pm,0}$, μ, ν, $\mathrm{K}^\pm$, $\mathrm{K}_{S,L}$

1952-ben a Cosmotron (BNL), 1954 a Bevatron (Berkeley) megépülése $\Rightarrow$ ismét új részecske: Λ^0 hiperon, $m_\Lambda = 1116\,\mathrm{MeV}$ (nehezebb a protonnál $\Rightarrow$ hiperon)
hamarosan $\Sigma^\pm$ (1189 MeV), majd $\Xi^\pm$ (1315 MEV) ...
Az 1960-as évekre kb. 200 ismert részecske és rezonancia! Hogyan lehet ezeket jellemezni? Két típus: milyen kölcsönhatásban vesznek részt, és milyen kvantumszámokkal rendelkeznek.

2.4.1 Kölcsönhatások fajtája szerint

Milyen kölcsönhatásban vesznek részt? Ha erős kölcsönhatásban részt vesznek *hadronok*, ha nem *leptonok*, a kölcsönhatás közvetítő részecskéit (mint a foton) *mértékbozonoknak* hívjuk. Az 1960-as években ismert leptonok az e^-, μ, antirészecskéik, és a neutrinó; mai ismereteink szerint

leptonok: e^-, ν_e; μ^-, ν_μ; τ^-, ν_τ.

Hadronokból sokkal több van $\Rightarrow$ ezeket kell főleg csoportosítani.

2.4.2 Kvantumszámok

Mik a kvantumszámok? Ha $\hat{O}$ operátor megmaradó mennyiséget jellemez, akkor érdemes a Hilbert tér bázisának $\hat{O}$ sajátállapotait választani. Egy bázisállapot így jellemezhető $\hat{O}$ sajátértékeivel.

Szokásosan: a Lorentz csoport generátoraihoz (spinállapot, impulzus) rendelhető megmaradó mennyiségek különböző értékeihez tartozó bázisállapotokat egy adott részecske különböző állapotainak nevezzük, míg a többi kvantumszám különböző értékei a részecskéket különböztetik meg. Így a részecskék jellemzéséhez csak az utóbbiakat kell feltüntetni.

Jó jellemzést adnak az olyan operátorok sajátértékei, amelyek csak az erős és elektromágneses kölcsönhatásban maradnak meg, a gyengében nem $\Rightarrow$ gyengén sérülnek. Ezek tehát megváltozhatnak egy gyenge kölcsönhatással járó folyamatban.

Az 1960-as években ismert kvantumszámok a tömeg ($p^2 \to m^2$), spin ($\hat{S}^2 \to S(S+1)$), töltés ($\hat{Q} \to Q$). Gyengén sérülő kvantumszám a paritás (P), töltésparitás (C) és az izospin.

Készítsünk egy olyan L operátort, amely a leptonokhoz, azaz az erős kölcsönhatásban nem részt vevő részecskékhez (e^-, μ^-, τ^- és neutrinóik) $L \to +1$-et rendel, az antileptonokhoz (e^+, μ^+, τ^+ és antineutrinók) $L \to -1$-et, a többi részecskéhez 0-t. Ez a *leptonszám*, a tapasztalat azt mutatta, hogy L megmaradó mennyiség!

A hadronok között is bevezethetünk egy új B operátort, amely a leptonokra 0-t ad, a félegész spinű hadronokra 1-et, ezek antirészecskéire -1-et, a többi hadronra 0-t. Azokat a hadronokat, amelyek ± 1-et kapnak, barionoknak, a $B = 0$-t kapó részecskéket mezonoknak[2] nevezzük. B neve barionszám, és szintén megmaradó mennyiségnek bizonyul.

Következmény: a legkönyebb barion stabil! A legkönyebb barion a p^+, ennek bomlása :$p^+ \to B + \ldots$, ahol B valamilyen bariont jelöl; ennek ott kell lennie a barionszám megmaradás miatt. Mivel $m_B > m_p^+$, a fenti folyamatban az energiamegmaradás nem teljesülhet! Mérések szerint a proton élettartama $\tau_p^+ > 10^{30}$ év, ami nagyobb, mint az Univerzum élettartama ($1.5 \cdot 10^{10}$ év).

Kérdés: akkor miért van a jelenlegi Univerzumban mégis $B_{\text{net}} > 0$ a tapasztalatok szerint? Kezdeti feltételek?? Ha nem, akkor valamilyen folyamatban mégis elbomolhat a proton!

2.4.3 Ritkaság

A Λ^0 hiperont 1952-ben Pais fedezte fel, a keletkezése

$$\pi^- + p^+ \to \Lambda^0 + K^0, \qquad \text{vagy} \qquad \pi^+ + n^0 \to \Lambda^0 + K^+ \tag{2.38}$$

folyamatokkal megy. A Λ szeret a kaonokkal párban keletkezni. A hasonló

$$p^+ + \pi^- \to \Lambda^0, \qquad \text{vagy} \qquad n^0 + \pi^0 \to \Lambda^0 \tag{2.39}$$

folyamatok léteznek, de sokkal kisebb a hatáskeresztmetszetük. Például a Λ^0 bomlása ezekkel a folyamatokkal történik, mert a $\Lambda \to \bar{K}^0 + p^+ + \pi^-$ nem mehet végbe az energiamegmaradás miatt (a keletkezett végtermékeknek ugyanis nagyobb a tömege mint a Λ-nak, emiatt álló Λ esetén nem teljesülhet az energiamegmaradás).

A második folyamatoknak kis hatáskeresztmetszete arra enged következtetni, hogy azok a gyenege kölcsönhatással mennek, míg az elsők az erős kölcsönhatással (Gell-Mann és Nishijima). Az a tény, hogy $p^+ + \pi^- \to \Lambda$ nem megy erős kölcsönhatással, viszont $p^+ + \pi^- \to \Lambda + K^0$ igen, arra utal, hogy az erős kölcsönhatásban van még egy extra megmaradó mennyiség, ami megtiltja az első folyamatot. Ezt elnevezték ritkaságnak S ("strangeness"): $S_\Lambda = -1$, $S_{K^+} = 1$, a többi részecskére $S = 0$ (nem "ritkák").

S felcserél az erős és elektromágneses kölcsönhatás Hamilton operátorával, de nem cserél fel a gyenge kölcsönhatás Hamilton operátorával, csakúgy, mint a paritás.

2.4.4 Hadron multiplettek

A hadronok tömegének vizsgálatakor kiderül, hogy csoportokban szeretnek megjelenni. Az első példa a p^+és n^0 tömegének közelsége $\Rightarrow$ izospin bevezetése. Ezek után a egymáshoz közeli tömegű hadronok jelölésére

[2] A görög eredeti jelentése: lepton $\equiv$ könnyű, barion $\equiv$ nehéz.

ugyanazt a betűt használták, és egy adott részecske különböző izospin vetületének tekintették. Ilyen módon például

$N = \{p^+, n^0\}$: barionok, izospin dublett, $m_N \approx 940\,\mathrm{MeV}$

$\pi^{\pm,0}$: mezonok, izospin triplet, $m_\pi \approx 140\,\mathrm{MeV}$

Λ^0: barion, izospin szinglet, $m_\Lambda = 1116\,\mathrm{MeV}$.

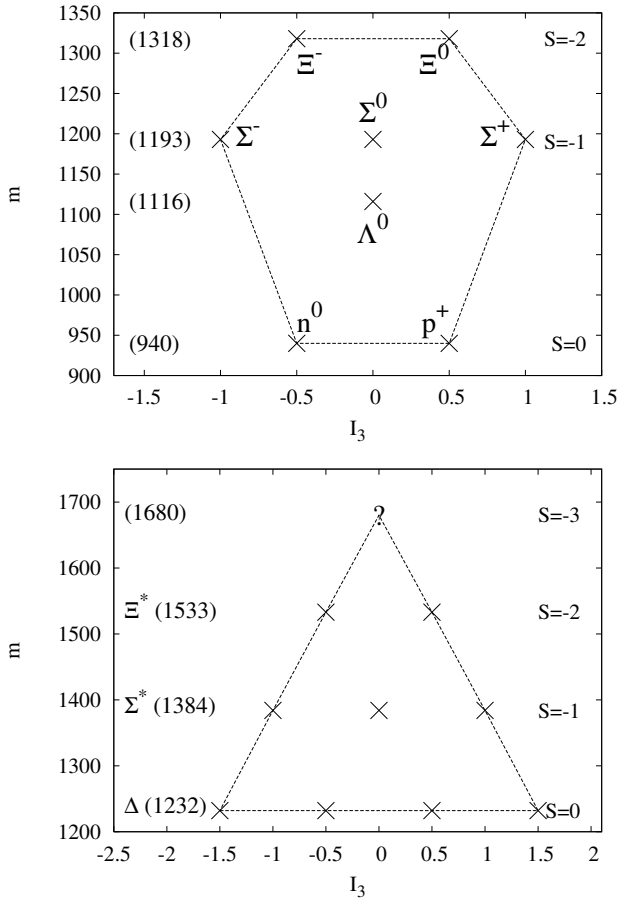
η: mezon, izospin singlet, $m_\eta = 510\,\mathrm{MeV}$

$\Sigma^{\pm,0}$: izospin triplet, $m_\Sigma \approx 1193\,\mathrm{MeV}$

$\Delta = \{\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-\}$ izospin kvartet, $m_\Delta \approx 1232\,\mathrm{Mev}$

...

Ha kicsit nagyobb felhasadást is megengedünk, nagyobb multipletteket kaphatunk, l. Fig. 2.10. Itt nem



a.) *b.)*

Figure 2.10: Barion multiplettek

teljesen azonosak a tömegek, azonban $|S|$ növekedtével majdnem lineárisan nőnek a tömegek (az *a.* esetben a tömegkülönbségek 202 MeV ill. 253 MeV nem igazán lineáris, a *b.* esetben azonban a különbségek 152 MeV ill. 149 MeV már csaknem tökéletes). A multiplettekben a töltés is meghatározható

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S) \tag{2.40}$$

képlet segítségével.

A *b.* ábrán a szimmetria diktálná, hogy a háromszög csúcsán is legyen részecske, nevezzük Ω-nak. Ennek tulajdonságai is meghatározhatók: $m \approx 1680$ MeV, a ritkasága $S = -3$, izospin szinglett, a töltése -1. Ez 1961-ben egy geometria képre épülő jóslat volt; azonban 1964-ben megtalálták az Ω^- részecskét, a megadott kvantumszámokkal ($m_\Omega = 1672$ MeV)!!

2.4.5 Kvarkok

A jóslat sikere egyértelművé tette, hogy valamilyen szimmetriaelv állhat a háttérben. 1964 Gell-Mann, Zweig: a hadronok összetettek! Az összetevőkről eredetileg nem gondolták, hogy valódi létező részecskék (hiszen részecskeként senki sem látta őket! – confinement, bezárás), hanem csak olyan kis "izék" – németül "kvark", ami az angol köztudatba James Joyce "Finnegans wake" (Finnegan ébredése) könyve alapján került át

Három kvarkot, tartsd a markod,
Ne hallgassuk el Mister Markot,
bizony csúnyán belemart ott.
De ó, mindenható Sasökörszem, nem látsz madárt, hogy lássuk, a vén keselyű mint rikolt sötétbe mártott ingért, és kutatja át pöttyös nadrágért a Palmerstown Parkot?

(Ferencz Győző fordítása)

Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark.
But O, Wreneagle Almighty, wouldn't un be a sky of a lark
To see that old buzzard whooping about for uns shirt in the dark
And he hunting round for uns speckled trousers around by Palmerstown Park?
Hohohoho, moulty Mark!

Hány kvarkra van szükségünk? Nem ritka részecskéknél az izospin leírásához a közönséges 1/2-es spin $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$ állapotainak megfelelően két kvark kell: u (up) és d (down), ezek a 2D izospin tér báziselemei. A ritkaság leírásához szükségünk lesz egy harmadik kvarkra, amely izospinje 0, ritkasága pedig (definíció szerint) -1. Ez a három kvark egy 3D tér bázisállapotait adja, ezen tér egy normált állapota $|q\rangle = q_1 |u\rangle + q_2 |d\rangle + q_3 |s\rangle$, ahol $|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 = 1$. A kvarkok fajtáit vagyis a báziselemeket *íznek* hívják.

Az erős kölcsönhatás, a feltételezés szerint, nem bántja az izospint, és várható értéke arra, ha egy u és egy d vagy s kvarkot kicserélünk, vagyis a 3D kvark-térben $H_s \sim \mathbf{1}$ egységmátrix (a ritka részecskék eltérő tömegét az s kvark tömegével magyarázhjatjuk, nem a kvarkok közötti kölcsönhatással). Itt pontosan ugyanaz mondható el, mint a p^+-n^0rendszerben, csak most a 3D esetre: végezzünk el a 3D térben egy lineáris transzformációt, amely minden transzformált állapot normáját 1-nek adja:

$$|q'\rangle = U\,|q\rangle\,, \quad \langle q'|q'\rangle = \langle q|U^\dagger U|q\rangle = 1\ \forall\,|q\rangle \quad \Rightarrow \qquad U^\dagger U = 1. \tag{2.41}$$

Egy globális fázis ugyanakkor nem megfigyelhető, ezért megkövetelhetjük a $\det U = 1$ feltételt. Így alakul ki az izospin $SU(2)$ csoport ha csak az $|u\rangle$, $|d\rangle$ altérben vagyunk, illetve az $SU(3)$ csoport az u, d, s kvarkok terében. Ezek a csoportok a kvarkok összetett állapotain is megjelennek (ábrázolódnak).

A komponensek transzformációjakor használjuk az U_{ij} mátrixelemeket:

$$q'_i = U_{ij} q_j \quad \Rightarrow \quad U\,|q\rangle = \sum_i q_i U\,|q_i\rangle = \sum_{ij} U_{ij} q_j U\,|q_i\rangle \quad \Rightarrow \quad U\,|q_i\rangle = U_{ji}\,|q_j\rangle\,, \tag{2.42}$$

vagyis a báziselemek $U^T = U^*$ szerint transzformálódnak.

Hogyan kell transzformálni az antikvarkokat? Kvalitatíve: ha $|q\rangle$ volt egy kvark-állapot, akkor az antikvark azonosítható $\overline{|q\rangle} \sim \langle q| \sim |q\rangle^\dagger$. Emiat a hullámfüggvényekre

$$q'_i \sim (q')^*_i = (U\,q)^*_i = U^*_{ij} q^*_j \sim U^*_{ij} \bar{q}_j. \tag{2.43}$$

Az antikvarkok tehát U^* szerint transzformálódnak. SU(2) csoport esetén ez unitér ekvivalens U-val. Hogy ezt megmutassuk, vezessük be

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{ij} = \varepsilon_{ij}, \quad E^2 = -1, \quad E^T = E^\dagger = -E = E^{-1}. \tag{2.44}$$

Emiatt E unitér. Másrészt, mivel $U \in \mathrm{SU}(2)$ esetén U unitér és $\det U = 1$:

$$\mathrm{SU}(2): \qquad \varepsilon_{i'j'} U_{ii'} U_{jj'} = \det U\, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad UEU^T = E, \qquad E^{-1}UE = E^\dagger UE = U^*. \tag{2.45}$$

Ezért ha van egy q normált állapotom, amely U szerint transzformálódik, akkor $\tilde{q} = Eq$ is normált, és úgy transzformálódik mint:

$$\tilde{q}' = (Eq)' = Eq' = EUq = EUE^{-1}\, Eq = U^* \tilde{q}. \tag{2.46}$$

Vagyis minden állapotot E-vel átdefiniálva U helyett U^* transzformációt látok. Ezért nincs "antispin".

2.4.6 Az SU(3) csoport és ábrázolásai

A 3×3 egységnyi determinánsú unitér mátrixok, ahol $U^\dagger = U^{-1}$, csoportot alkotnak, hiszen

- $\mathbf{1}$ egységmátrix unitér
- ha U unitér, akkor U^{-1} is unitér, hiszen $(U^{-1})^{-1} = U = (U^\dagger)^\dagger$
- ha $U_{1,2}$ unitér, akkor $(U_1U_2)^{-1} = U_2^{-1}U_1^{-1} = U_2^\dagger U_1^\dagger = (U_1U_2)^\dagger$.

Mivel a csoportelemek mátrixok, ahol a mátrixelemek komplex mennyiségek, végtelen sok elemű csoportról van szó – folytonos csoport (Lie csoport). Megmondhatjuk azonban, hogy hány valós paramétert tartalmaz: egy $N \times N$ komplex mátrix $2N^2$ valós paraméterrel írható le (független mátrixelemek). Unitér mátrixnál $U^\dagger U = 1$, ez N^2 valós egyenletet jelent $\Rightarrow$ U(N) mátrix paramétereinek száma N^2. A $\det U = 1$ megkötés még egy egyenlet $\Rightarrow$ SU(N) paramétereinek száma $N^2 - 1$.

Ha elő akarom állítani a mátrixot, megadhatok pl. ennyi elemet, a többi ebből kiszámolható. A szokásos paraméterezés azonban másként megy. Általában egy Lie csoportnál jelöljük a paraméterezést $U(c)$-vel, $c \in \mathbf{R}^n$. Tegyük fel, hogy a paraméterezés folytonos, azaz

$$||U(c + \delta c) - U(c)|| = \mathcal{O}(\delta c). \tag{2.47}$$

Emiatt $U(c + \delta c)U^{-1}(c)$ az egységelem közelében van. A standard paraméterezés menete

- $U(0) = 1$ legyen
- ekkor $U(dc)$ infinitezimálisan kis paraméterre az egység körül lesz: $U(dc) = 1 - iTdc + \mathcal{O}(dc^2)$. Az unitaritás miatt
$$U^\dagger = 1 + iT^\dagger dc = U^{-1} = 1 + iTdc \quad \Rightarrow \quad T_a^\dagger = T_a, \tag{2.48}$$
hermitikus, neve (infinitezimális) generátor.
- $U(dc)^n$ a csoport eleme, ennek paraméterét *definiálom* $c = ndc$-nak. Átírva $dc = c/n$, azaz
$$U(c) = \left(1 - \frac{iTc}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-iTc} \tag{2.49}$$
- Több (d) paraméter esetén nem mindegy, milyen úton érek el $(c_1, \ldots, c_d)$-ig. A szokásos eljárás, hogy az egyenes utat választom: ha az egységelem körül
$$U(dc_a) = 1 - iT_a c_a + \mathcal{O}(c^2) \quad \Rightarrow \quad U(dc_a)^n \equiv U(ndc_a) \quad \Rightarrow \quad U(c_a) = e^{-iT_a c_a}. \tag{2.50}$$

Ha a csoport unitér, akkor $n = N^2 - 1$, ennyi generátorra van szükség. Az unitaritás miatt a generátorok hermitikusak, és ha még $\det U = 1$, akkor

$$0 = \ln \det U = \mathrm{Tr} \ln U = -ic_a \,\mathrm{Tr}\, T_a \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}\, T_a = 0. \tag{2.51}$$

$N \times N$-es mátrixok esetén a spurtalan hermitikus mátrixok száma $N^2 - 1$, pont megfelelő.

A generátorok szokásos váalasztása SU(N)-nél $T_a = \lambda_a/2$, ahol $\mathrm{Tr}\,\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$. SU(2)esetén ezek a Pauli mátrixok, SU(3)-nál a szokásos választás a Gell-Mann mátrixok: Az SU(3) 8 paraméteres, a szokásos választás a generátorokra a Gell-Mann mátrixok $T = \lambda$:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

Ezek tudják, hogy $\mathrm{Tr}\,\lambda_a = 0$ és $\mathrm{Tr}\,\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$. Tartalmaz 3 db SU(2) részcsoportot; a bal felső sarok, azaz λ_1, λ_2, λ_3 a szokásos izospinnek felel meg, hiszen az s kvarkot nem bántja.

Ha a részecske-állapotok Hilbert terét nézzük, akkor az SU(3) csoport hatása azt jelenti, hogy létezik az állapotok Hilbert terén ható $\bar{U} : \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ olyan operátor-sereg, amely követi az SU(3) szorzási szabályokat. Ennek paraméterezését a fenti standard módon végezzük el $U(c)$. Ez a csoport Hilbert téren történő *ábrázolása*. Ha szimmetriáról van szó, akkor minden mátrixelem felcserél a Hamilton-operátorral

$$[\bar{U}, H] = 0. \tag{2.53}$$

Ha kiindulok egy energia-sajátállapotból, és hatok valamely $\bar{U}$ oprátorral, akkor ugyanolyan sajátértékhez jutok. Miután nem minden $\bar{U}$ diagonlizálható egyszerre, ezért ha minden csoportelemmel hatok, az eredeti állapottól különböző állapotba juthatok, amelyek mindegyike ugyanolyan sajátértékkel rendelkezik. Végül egy adott sajátértékű sajátalteret generálok le.

Pl. kiindulva az u kvarkból, a csoport hatására legenerálom a d és az s kvarkot is, ezek erős kölcsönhatásra számított sajátértéke ugyanaz.

A részecskék több kvarkból épülnek fel, ezek a szorzat Hilbert téren levő állapotok, emlyeken szintén hat az SU(3) csoport, a szokásos módon, komponensenként

$$Q \in \mathcal{H}\times\mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad Q = Q_{ij}\,|q_i\rangle\otimes|q_j\rangle \quad \Rightarrow \quad UQ = Q_{ij}U\,|q_i\rangle\otimes U\,|q_j\rangle = U_{ii'}U_{jj'}Q_{i'j'}\,|q_i\rangle\otimes|q_j\rangle \quad \Rightarrow \quad Q'_{ij} = U_{ii'}U_{jj'}Q_{i'j'}. \tag{2.54}$$

Vagyis a szorzattéren a csoport szorzatábrázolása valósul meg $\hat{U} = U \times U$. Azonban a csoport hatására nem juthatok el minden összetett állapotból bármely másikba, a csoporthatás az összetett állapotokon maga is sajátalterekre bomlik. Egy alteret irreducibilisnek nevezünk, ha nincs más, csoporthatásra zárt altere. Az irreducibilis altereken kapott csoporthatás az irreducibilis ábrázolás. Csak az irreducibilis alterek elemei mennek át egymásba a csoporthatásra, azaz csak itt lesz biztosan ugyanolyan sajátértéke H-nak. Fizikailag ez azt jelenti, hogy nem minden összetett állapotnak lesz ugyanaz a tömege, csupán azoknak, amelyeket a csoporthatás összeköt, vagyis amelyek ugyanazon irreducibilis altérhez tartoznak.

A közönséges spin esetén pl. $1/2 \times 1/2$-ben

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \{|\uparrow\uparrow\rangle\,, |\uparrow\downarrow\rangle\,, |\downarrow\uparrow\rangle\,, |\downarrow\downarrow\rangle\}, \tag{2.55}$$

azaz 4D-s. A szimmetrikus $U \times U$ nem tudja megváltoztatni a két spin cseréjével kapott szimmetriatulajdonságokat $\Rightarrow$ a szimmetrikus ill. antiszimmetrikus kombinációk egymásba nem vihetők át! Irreducibilis alterek tehát

$$I_0 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)\}, \qquad I_1 = \{|\uparrow\uparrow\rangle\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)\,, |\downarrow\downarrow\rangle\} \tag{2.56}$$

I_0 1D altér, ez tehát egy nulla spinű reprezentáció; I_1 3D altér, itt a csoport 1-es spinű ábrázolása jön elő.

Hasonló módon viselkedik az SU(3) csoport is. Mivel a szorzat téren szimmetrikus szorzatábárzolás generálódik, ezért a szorzatelemek permutációira való szimmetriát nem változtatja meg $\Rightarrow$ ezek biztosan különálló alterek lesznek. Állítás: ezek az irreducibilis alterek (a szimmetriák nyilvántartásához lehet használni a Young táblákat).

Pl.: kvark $*$ kvark ábárzolás $\Rightarrow$ jelölése 3×3. Elemei párok, a teljes direkt szorzat tér

$$|uu\rangle\,, |ud\rangle\,, |us\rangle\,, |du\rangle\,, |dd\rangle\,, |ds\rangle\,, |su\rangle\,, |sd\rangle\,, |ss\rangle\,. \tag{2.57}$$

Az antiszimmetrikus kombinációk

$$|ud\rangle - |du\rangle\,,\ |us\rangle - |su\rangle\,,\ |ds\rangle - |sd\rangle\,, \tag{2.58}$$

3D altér. Most azonban nem egyértelmű, hogy melyik ábrázolással van dolgunk: U (kvark) vagy U^* (antikvark). Definiáljuk bázisnak:

$$|Q_i\rangle = \varepsilon_{ijk}\,|q_j\rangle \otimes |q_k\rangle \quad \Rightarrow \quad |Q_i'\rangle = \varepsilon_{ijk} U^*_{jj'} U^*_{kk'}\,|q_{j'}\rangle \otimes |q_{k'}\rangle\,. \tag{2.59}$$

Mivel azonban

$$\varepsilon_{ijk} U_{ii'} U_{jj'} U_{kk'} = \det U\, \varepsilon_{i'j'k'} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ijk} U_{jj'} U_{kk'} = \varepsilon_{i'j'k'} U^{-1}_{i'i} = U^*_{ii'} \varepsilon_{i'j'k'}. \tag{2.60}$$

Ezért

$$|Q_i'\rangle = U_{ii'} \varepsilon_{i'j'k'}\,|q_{j'}\rangle \otimes |q_{k'}\rangle = U_{ii'}\,|Q_{i'}\rangle\,. \tag{2.61}$$

Az antiszimmetrikus kombináció bázisa tehát U szerint transzformálódik, azaz a hullámfüggvények U^* szerint: úgy transzformálódik mint egy antikvark (jelölés $\bar{3}$). Tehát a szorzatábrázolás transzformációja

$$3 \times 3 \equiv \bar{3} + 6. \tag{2.62}$$

Egy kvark és egy antikvark szorzata számításához használhatjuk a $\bar{3} \equiv 3 \times 3|_{\text{antiszim}}$ megfeleltetést; ebben a térben a bázis

$$|u\bar{u}\rangle \equiv |uds\rangle - |usd\rangle\,,\ \left|u\bar{d}\right\rangle \equiv |uus\rangle - |usu\rangle\,,\ |d\bar{u}\rangle \equiv |uus\rangle - |usu\rangle\,,\ \ldots. \tag{2.63}$$

Az antiszimmetrikus kombináció ezúttal teljesen antiszimmetrikus!

$$\varepsilon_{ijk} q_i q_j q_k, \tag{2.64}$$

azaz 1D! A maradék a szimmetrikus ábárzoláshoz tartozik. Vagyis

$$\bar{3} \times 3 \equiv 1 + 8. \tag{2.65}$$

Ez az ábrázolás azonosítható a mezonokkal: a mezonok tehát egy kvark és egy antikvark kötött állapotai – l. pozitrónium! A mezonok alkothatnak szinglettet vagy oktettet.

Három kvark szorzatához már majdnem minden összeállt: ha mindhárom kvark antiszimmetrikus, akkor 1D ábrázolásunk van; ha két kvark szimmetrikus, a harmadik antiszimmetrikus, akkor 8D ábrázolás; az utolsó lehetőség, hogy mindhárom kvarkra szimmetrikus az ábrázolás, ebből van

$$|uuu\rangle\,, \ldots : 3 \quad |uud\rangle\,, |udd\rangle\,, \ldots : 6, \qquad |uds\rangle : 1 \quad \Rightarrow \quad 10, \tag{2.66}$$

azaz 10D ábárzolás. Vagyis

$$3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10. \tag{2.67}$$

Ezek a barionokkal azonosíthatók. A barionok alkothatnak oktettet vagy dekuplettet.

2.4.7 A kvarkok kvantumszámai

Mivel három kvark alkot egy bariont $\Rightarrow$ bariontöltése $B_q = 1/3$.

Elektromos töltésre

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad Q_d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}, \quad Q_s = 0 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}. \tag{2.68}$$

Azaz a kvarkoknak tört töltésük van!! Mivel a mezonok kvark+antikvark objektumok, töltésük egész: pl. $\pi^0 \sim \bar{u}u$, $\pi^+ \sim \bar{d}u$, $\pi^- = \bar{u}d$. A barionok három kvarkból tevődnek össze, így töltésük itt is egész; pl.: $\Delta : uuu \to +2$, $uud \to 1$, $udd \to 0$, $ddd \to -1$.

Spinjük: mezonok egész spinűek, a barionok feles spinűek $\Rightarrow$ a kvarkoknak feles spinjük kell legyen.

2.4.8 Részecskék kvark-összetétele

Néhány részecske felépítése kvarkokból

Mezonok:

- pionok: $\bar{q}q$ részecskék, ahol $q = u$ vagy d, nulla spinű pszeudoskalár kombináció: $\pi^+ = \bar{d}u$, $\pi^- = \bar{u}d$, $\pi^0 = (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ π^0 elektromágneses kölcsönhatással is bomlik, rövidebb élettartam! ($2.6 \cdot 10^{-8}$ helyett $8 \cdot 10^{-17}$).
- $\bar{q}q$ részecskék lehetnek 1-es spinűek is (vektormezonok) $\Rightarrow$ ρ mezon
- a szinglet $(\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2}$ kombináció keveredik $\bar{s}s$-sel $\Rightarrow$ η, η', ...
- $\bar{s}q$, ahol $q = u$ vagy d alkotják a kaonokat: $K^+ = \bar{s}u$, $K^- = \bar{u}s$, $K^0 = \bar{s}d$, $\bar{K}^0 = \bar{d}s$
- Ezeknek gerjesztett állapotai is megfigyelhetők.

Barionok:

- nukleonok: $p^+ = uud$, $n^0 = udd$, spinjük és izospinjük 1/2
- egyéb qqq állapotok, ahol $q = u, d$: $\Delta = uuu$, uud, udd, ddd, spinjük és izospinjük 3/2
- $\Lambda^0 = uds$, spinje 1/2, izospin szinglett
- $\Sigma = uus, uds, dds$, spinjük 1/2, izospin 1
- $\Xi = uss, dss$, spinjük 1/2, izospin 1/2
- $\Omega = sss$, spin 3/2, izospin szinglett
- itt is számos gerjeszett állapot figyelhető meg

2.4.9 A kvarkok kísérleti bizonyítéka

Az elméleti jóslatok után a kísérleti fizika feladata lett a kvarkok kimutatása. Ehhez speciális berendezést építettek: 1969 SLAC, Stanford Linear Accelerator. Itt p^+-okon szórattak elektronokat nagy energián (20 GeV). Várakozás: ha vannak elemi összetevők, akkor azokon keményen szóródik az elektron, ha nincs, akkor egyre lágyabb lesz a szórás.

Kísérlet megerősítette: a p^+-on belül három kemény szórócentrum helyezkedik el! Ezek töltése a várt 2/3 ill. $-1/3$ volt.

Kvarkok tömege? Nem tudjuk szabad részecskeként elkülöníteni őket $\Rightarrow$ mit jelent a tömeg? Mérési utasítással lehet definiálni, de ennek alapján külnböző eredményeket kapunk. Ha a szórási kép alapján az e^--p^+ütközésből határozzuk meg, akkor

$$m_u = 4\,\mathrm{MeV},\ m_d = 8\,\mathrm{MeV},\ m_s = 150\,\mathrm{MeV}.$$

Ekkor azonban nem érthető, hogy a proton tömege hogy lehet jóval nagyobb, mint az összetevők tömege – ekkor miért kötött állapot? Másik lehetőség, hogy gyengén kölcsönható rendszernek feltéve számoljuk ki a tömegeket. Ez is jól működik,

$$m_u \approx m_d = 300\,\mathrm{MeV},\ m_s = 450\,\mathrm{MeV}.$$

A különbség így is kb. 150 MeV, ez magyarázza pl. a barion dekuplett tömegfelhasadását.

2.4.10 Új szabadsági fok: a szín

Bármennyire is sikeresen írta le kvalitatíve a hadron multipletteket, az eredeti kvark-modell számos kérdésben nem adott kielégítő választ.

- Miért nincsenek szabad kvarkok; ezzel együtt miért nem látunk két kvarkból álló multipletteket ($\bar{3}+6$). Valami miatt a kvarkok be vannak zárva bizonyos kötött állapotaikba (confinement).
- A SLAC kísérletekben az elektronok szórási képéből a kvarkok impulzusát is meg lehetett határozni. A három kvark össz-impulzusa azonban a p^+impulzusának csak kb. felét adta ki!
- A protonon belül a kvarkok nagyon erős kölcsönhatással vannak kötve. A szórási kép alapján azonban a kvarkok *szabadnak* tűntek! Úgy tűnik tehát, hogy ki távolságok (nagy energiák) mellett a kvarkok nem hatnak kölcsön... $\Rightarrow$ aszimptotikus szabadság (l. 2004-es Nobel díj t'Hooft és Veltmann).
- Konkrét probléma: a Δ^{++} részecske spinje 3/2, azaz felépítése spinekkel együtt $|u\uparrow, u\uparrow, u\uparrow\rangle$ $\Rightarrow$ szimmetrikus a kvarkok cseréjére. Mivel a kvarkok fermionok, ezért a teljes hullámfüggvény antiszimmetrikus kell legyen, azaz a térbeli hullámfüggvény *antiszimmetrikus*. De hogy lehet egy alapállapoti hullámfüggvény antiszimmetrikus?

A válasz 1972-ben született meg: Gell-Mann, Fritzsch: van egy újabb belső szimmetria: *szín*.

Miért nincsenek akkor e szerint is hadron multiplettek? Mert minden hadron csak szín-szinglett lehet. A feltételezés szerint a színes objektumok olyan nagy energiával rendelkeznek, hogy csak jóval magasabb energián lehetne megfigyelni őket. Mai kép: két színes objektumot távolítva lineárisan nő a rendszer energiája (mint a szappanbuborék) $\Rightarrow$ elérjük a két kvark tömegének megfelelő energiát, ekkor a vákuum polarizálódik, és a két új kvark semlegesíti a színtöltéseket.

A barionok 3 kvarkból állnak, és szín-szinglettek $\Rightarrow$ a **szín leírásához is SU(3) kell!!**. Lehetségesek szín-szinglettek a $\bar{3}\times 3$ és a $3\times 3\times 3$ ábrázolásban $\Rightarrow$ megfigyelhető objektumok a mezonok és a barionok. És ezért nincs dikvark, habár a korábbi tárgyalásban semmi nem utalt ennek lehetetlenségére.

A kvarkok a színük miatt hatnak kölcsön: elmélete a kvantum szín-dinamika (QCD), mint a kvantumelektrodinamika. Ez helyettesíti a magerőket. A magerők csupán a QCD "van der Waals" erői.

A Δ^{++}-ban a spin, izospin szimmetrikus, szín antiszimmetrikus (szinglett!), így a hullámfüggvény szimmetrikus lehet!

Tehát a kvarkok hullámfüggvényének a következő indexei vannak:

$q_{ic\alpha}$, ahol i az íz $\Rightarrow$ $q_{1c\alpha} \equiv u_{c\alpha}$, $q_{2c\alpha} \equiv d_{c\alpha}$, $q_{3c\alpha} \equiv s_{c\alpha}$.
c a szín: minden kvarknak lehet három színe, azaz pl. $u_{1\alpha}$, $u_{2\alpha}$, $u_{3\alpha}$.
α a spin-index; a kvarkokra és az antikvarkokra is $|\uparrow\rangle$ vagy $|\downarrow\rangle$.

A szín felfedezésére újabb kutatások indultak el, és hamarosan bizonyítékokat is találtak. Pl.

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadronok})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \tag{2.69}$$

arányt vizsgáljuk. A folyamat elektromágneses (főleg), és úgy zajlik le, hogy

$$e^+e^- \to \gamma^* \to \bar{q}\,q \equiv \text{hadronok}, \qquad \text{vagy} \qquad e^+e^- \to \gamma^* \to \mu^+\mu^-. \tag{2.70}$$

A közbenső foton energiája és impulzusa nem elégíti ki a nulla tömeg követelményt, így ez csak véges ideig élhet ($\tau\Delta E \sim \hbar$). Az átmeneti amplitúdó arányos a foton és a töltött részecskék csatolásával (ez a töltés), a hatáskeresztmetszet ennek négyzete. A hatáskeresztmetszet a független végállapotok számával is arányos. Mivel a folyamat egyéb körülményei megegyeznek, ezért

$$R = \frac{N_c(Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2)}{Q_\mu^2} = \frac{2}{3}N_c. \tag{2.71}$$

A kísérleti megfigyelések szerint kb 2 a hatáskeresztemtszetek aránya $\Rightarrow$ $N_c = 3$!

2.4.11 Egyéb részecskék

Müon neutrínó

Vajon minden részecskét megismertünk? A lepton-hadron kép szimmetrikusnak tűnt

$$e^-,\ \mu^-,\ \nu \qquad \text{vs.} \qquad u,\ d,\ s. \tag{2.72}$$

Azonban voltak még rejtélyek: pl. miért nem bomlik a müon, mint

$$\mu^- \not\to e^- + 2\gamma, \qquad \mu^- \to e^- + \nu + \bar{\nu}. \tag{2.73}$$

Magyarázat lehet, ha kétféle neutrínó van, és a müon + müon-neutrínó szám megmarad. Kísérleti bizonyíték: neutrinó nyaláb módszer (1988 Nobel-díj): $p^+ + Be \to \pi^+$; a pionok 99.98%-ban úgy bomlanak tovább, hogy $\pi^+ \to \mu^+ + \nu \to$ 5000 tonna vas (régi csatahajó maradványai) $\to \nu \to$ Ne-nal töltött Al 10t-s szikrakamra. Ha a neutrinó kölcsönhat, akkor μ^- vagy e^-keletkezik, a részecskét a nyomból lehet azonosítani. Eredmény: a müonok bomlásából keletkező neutrínók kizárólag müonokat keltettek $\Rightarrow$ a müon neutrínó és az elektron neutrínó különbözik.

c-kvark

A müun-neutrínó felfedezésével ismét felborult a hadron-lepton kép, hiszen e^-, ν_e, μ, ν_μ állt szemben a három kvarkkal u, d, s. Ehhez az "elvi" szépséghez jöttek konkrét fizikai problémák.

Ha a béta-bomlást kvark szinten nézzük, akkor ez a kvark ízek közötti átmenetet írja le. A n^0 béta-bomlása például

$$n^0 \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e, \qquad n^0 \equiv udd,\ p^+ \equiv uud \quad \Rightarrow \quad d \to u + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{2.74}$$

Az s-kvarkot is figyelembe véve logikusnak tűnik, hogy a gyenge kölcsönhatás az s-kvarkot d illetve u kvarkba vigye át. Azonban a két szimmetrikusnak tűnő folyamat közül csak az egyik valósul meg:

$$s \to u + \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \qquad s \not\to d + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu. \tag{2.75}$$

Ha ilyen folyamat lenne, akkor ez járulékot adna a K^0-bomláshoz (ami $\bar{d}s$), a számolások szerint a valóságban megfigyelhető bomlási rátának kb. 20-szorosát eredményezve. A fenti folyamat ízváltó, semleges részecskékre hatna és gyenge kölcsönhatással menne $\Rightarrow$ neve ízváltó semleges áram (FCNC). A tapasztalat szerint tehát FCNC nincsen; de miért?

1970-ben Glashow, Iliopoulos, Maiani (GIM) felvetette, hogy ha bevezetünk egy új kvarkot (c – charm), amelynek töltése 2/3 (mint az u-nak), és a csatolási állandóját megfelelően választjuk, akkor ez megtilthatja a fenti bomlást (GIM) mechanizmus. Grafikusan l. 2.11. A két folyamat kinematikája lényegében megegyezik,

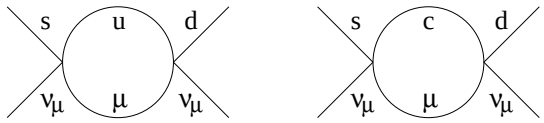


Figure 2.11: A s bomlása d-be

azonban az amplitúdók arányosak a csatolási állandókkal:

$$V_{ud}V_{su} \qquad \text{vs.} \qquad V_{cd}V_{sc}. \tag{2.76}$$

Hogyha feltesszük, hogy $V_{ud} = V_{cs}$, viszont $V_{su} = -V_{dc}$, akkor a két járulék éppen kiejti egymást!

Teljesülne a fenti összefüggés akkor, ha $V_{su} = V_{dc} = 0$ lenne, azaz az u csak a d-vel hatna kölcsön, a c csak az s-sel. Ekkor (u, d) és (s, c) két külön "családot" alkotna, melyek között nincs átjárás. Hozzávéve a leptonokat, a családok

$$\begin{pmatrix} e^- & u \\ \nu_e & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu^- & c \\ \nu_\mu & s \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

módon lennének írhatók. A kép nem teljesen korrekt, mert létezik $s \leftrightarrow u$ átmenet. Cabibbo javaslata: az u, c egy unitér elforgatott s, c-vel hat kölcsön

$$(u,\, c) \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_{ud} = V_{cs} \sim \cos\theta_c, \qquad V_{us} = -V_{cd} \sim \sin\theta_c. \tag{2.78}$$

Ez a konstrukció tehát "ésszerű" magyarázatot ad a GIM által feltételezett összefüggésekre.

Hogyan mutatható ki a c-kvark? A c-szám olyan mint a ritkaság, azaz az erős kölcsönhatás szimmetriája, azaz a c a rendszerből csak elektromágneses vagy gyenge kh. útján tűnhet el $\Rightarrow$ a legalacsonyabb tömegű, c-t tartalmazó részecskék hosszú életűek! Amit látni kell: egy viszonylag keskeny rezonancia magasabb tömegeknél.

Legegyszerűbb a $\bar{c}c$ charmónium keltése, mert az elektromágnesesen megy. 1974-ben többen is végeztek kísérleteket, az MIT-nél S. Ting, a SLAC SPEAR elektron-pozitron tárológyűrűnél B. Richter és csapata (1976-ban Nobel díj). Ők e^--e^+ ütköztetést végeztek, és a hatáskeresztmetszetet figyelték különböző végállapotokba ($\mu^+\mu^-$, hadronok, e^-e^+ stb.). 3096 MeV-nél egy keskeny rezonanciát láttak minden csatornában, a szélessége kb. 100 MeV volt $\Rightarrow$ nem lehetett erős kh. rezonancia. Elnevezés: J/Ψ, mert a két csoport egyidejűleg másként nevezte el. Később rengeteg c-t tartalmazó rezonanciát találtak (pl. $\eta_c = \bar{c}c$ 0 spinű, $D^0 = \bar{u}c$, $\Lambda_c = udc$ stb.). Ezeket a c nagyobb tömege miatt elég jól lehetett elméletileg is számolni.

A τ lepton

1975-ben újabb rejtély: megfigyelt esemény

$$e^- + e^+ \to e^- + \mu^+ + \text{missing energy}, \tag{2.79}$$

mégpedig nagy hatáskeresztmetszettel! Ez azért furcsa, mert a $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ kis hatáskeresztmetszetű folyamat. Ennek magyarázatára új leptont kellett feltételezni: τ, amely bomolhat

$$\tau^- \to e^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_e, \qquad \tau^- \to \mu^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu. \tag{2.80}$$

Több éves kutatással lehetett a τ adatait feltérképezni: tömege 1777 MeV, élettartama $290 \cdot 10^{-15}$ sec. M. Perl 1995-ben Noble díjat kap (megosztva Reines-szel a neutrinó felfedezéséért).

A bottom és top kvark

Ha igaz a család-elképzelés, akkor a τ lepton egy új család első tagja, és kell léteznie egy u-típusú, és egy d-típusú kvarknak, valamint egy megfelelő neutrínónak is.

1976-ban a Fermilab-ban 400 GeV-es p^+-okkal bombáztak céltárgyakat (Be, Cu, Pt), és leptonpárba való átmenet hatáskeresztmetszetét nézték. 9.5 GeV-nél keskeny rezonanciát találtak $\Rightarrow$ új kvark kötött állapota, hasonló a J/Ψ-hez. Ez az új kvark d-típusú volt, elnevezték bottom-nak (b), a talált részecske $\bar{b}b$ kötött állapot volt, bottónium vagy üpszilon ($\mathcal{Y}$). A c kvark felfedezéséhez hasonlóan itt is sok gerjesztett állapotot találtak.

A bottom felső párja, a top (t) kvark felfedezésére 1994-ig kellett várni, a Fermilab-ban p^+–p^- ütközésben fedezték fel, hasonlóan, mint a bottóniumot; azonban ekkorra már senki sem kételkedett a létezésében, sőt, perturbációszámítás segítségével a tömegére is elég jó becslést lehetett adni (mert mint virtuális részecske más folyamatokhoz is ad járulékot). A top kvark nagyon magas tömegű, $m_{\text{top}} = 172$ GeV – mint egy Yb (itterbium) atommag!

A τ neutrinó

Ezekután a tau neutrínója szinte biztosra volt vehető, felfedezése 2001-ben a Fermilabban történt meg neutrínó-nyaláb módszerrel.

Ezzel teljes volt a harmadik család is, azaz a részecskék teljes rendszere

$$\begin{pmatrix} e^- & u \\ \nu_e & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu^- & c \\ \nu_\mu & s \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tau^- & t \\ \nu_\tau & b \end{pmatrix}. \tag{2.81}$$

Az antirészecskéikkel együtt ezzel lezárható a fermionok sora.

2.4.12 Mértékbozonok

A családok tagjai között ható kölcsönhatások:

- ν neutrinók: csak gyenge kölcsönhatásban vesznek részt
- e^- elektron (és ennek megfelelően μ és τ): gyenge és elektromágneses kölcsönhatásban vesznek részt
- kvarkok: gyenge, elektromágneses és erős kölcsönhatásban vesznek részt

Az elektromágneses kölcsönhatás közvetítő részecskéi a fotonok – mik a többi kölcsönhatás közvetítő részecskéi?

Erős kölcsönhatás: magerőkben a pionok (illetve általában a mezonok) játsszák a közvetítő részecske szerepét (l. Yukawa-elmélet). A kvarkok között ható QCD azonban más közvetítő részecskéket igényel. Ezeket neve *gluon* (glue: ragasztó). Összesen 8 db gluon tér van, nulla tömegűek (mint a foton), elektromosan semlegesek. A kísérletek szerint a hadronok impulzusának és tömegének jelentős részét a gluonok teszik ki. Külön részecskeként nem figyelhetők meg (csakúgy, mint a kvarkok), azonban a kísérletekkel összhangban vannak a QCD jóslatai.

Gyenge kölcsönhatás: a gyenge kölcsönhatás az ízek közötti transzformáció, például az u és a (más családokkal összekevert) d között hat. Emiatt két alapobjektuma van, ezért várhatóan az $SU(2)$ csoporttal írható le. Itt három közvetítő részecske van, nevük $W^\pm$ (elektromosan töltöttek!) és a Z^0. Mivel elektromosan nem semlegesek, az elektromágneses és gyenge kölcsönhatást egyszerre kell leírnunk: elektrogyenge elmélet (Glashow, Weinberg, Salam, 1968; 1979: Nobel-díj). Másrészt a kísérletek szerint a gyenge kölcsönhatás erőssége energifüggő $\Rightarrow$ a mértékbozonok tömegesek kell, hogy legyenek! Kísérletileg: 1973, CERN-ben mutatták ki a Z^0 bozon hatását (elektron-neutrinó kölcsönhatást). Közvetlenül 1983-ban látták a őket (Rubbia, van der Meer; 1984 Nobel-díj).

1990-ben a CERN-ben pontosan meghatározták a Z-bozon bomlási szélességét. Ez a szélesség, az elméleti számolások szerint, függ a lehetséges (könnyű) neutrinók számától. Ennek alapján biztosra lehet venni, hogy legfeljebb 3 könnyű neutrínó van, azaz – ha a család elképzelés igaz – 3 család.

A kölcsönhatások leírása a mérték-elvvel történik (l. később). Ennek lényeges eleme, hogy a szimmetriacsoport minden generátorához egy vektorteret rendel. Emiatt

- elektromágneses erő: $U(1)$ szimmetria (fázistranszformáció) $\Rightarrow$ 1 generátor: hullámfüggvénye $A_\mu(x)$ (foton)
- gyenge kölcsönhatás: $SU(2)$ szimmetria (íz-transzformáció) $\Rightarrow$ 3 generátor: $W^+_\mu(x)$, $W^-_\mu(x)$, $Z_\mu(x)$
- erős kölcsönhatás: $SU(3)$ szimmetria (szín-transzformáció) $\Rightarrow$ 8 generátor: $g^a_\mu(x)$, $a = 1 \ldots 8$ gluonok.

A mérték-elv szerint a közvetítő részecskék tömegtelenek kell, hogy legyenek; hogyan lehet akkor a W ill. Z bozonnak tömege? Magyarázat: spontán szimmetriasértés (Higgs mechanizmus). Ehhez kell egy új bozon tér (Higgs-tér), amely a gyenge kölcsönhatás szerint transzformálódik (dublett $\Rightarrow$ 4 valós komponens), azaz elmélete $SU(2)$ szimmetrikus. Ha ez a szimmetria spontán sérül, mint a mágnesség esetében a spontán mágnesezettség kialakulásakor (itt most azt jelenti, hogy valamelyik komponens Bose-kondenzátumot képez), akkor ez a közvetítő részecskéknek tömeget adhat. A Higgs-tér 3 komponense a mértékbozonokba olvad mint longitudinális komponens, a negyedik elvileg megfigyelhető $\Rightarrow$ ezt keresik most az LHC-ban is. Az előállításának egy lehetséges módját láthatjuk a 2.12 ábrán.

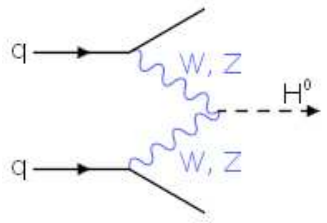


Figure 2.12: A Higgs részecske egyik keltési mechanizmusa

Ezzel teljes a részecskefizika Standard Modellje:

- 3 részecske-család
- kölcsönhatás: erős + gyenge + elektromágneses $\Rightarrow$ $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, közvetítő részecskéik a mértékbozonok (gluon, $W^{\pm}$ és Z^0 valamint a foton)
- tömeg-generálás miatt a Higgs-bozon.

2.5 Részecskeforrások

A kozmikus sugárzás megfigyelése már nem vezetett új részecskék felfedezésére. Máshonnan kellett venni a nagy energiájú részecskéket $\Rightarrow$ részecskegyorsítók építése.

Mi is hagyjuk el a történeti utat egyelőre, és nézzük meg a kísérleti berendezések fejlődését!

2.5.1 Természetes források

- radioaktív bomlás: energia $\sim \mathcal{O}(10)$ MeV
  - atommag felfedezése
  - magátalakulások (1919 Rutherford $\alpha + {}_7N^{14} \rightarrow {}_8O^{17} + H$, 1923 Blackett megfigyeli)
  - maghasadás (1939, O. Hahn, L. Meitzner, F. Strassmann: U magot n^0-kal bombázva két részre hasad; Fermi, Szilárd, Anderson: felszabaduló neutronokkal újabb maghasadás, láncreakció gondolata)
  - korlátozott E, intenzitás
- kozmikus sugárzás:
  - 1912 V. Hess: ballonnal mérte az ionizációt $\Rightarrow$ nő $\Rightarrow$ ionizáló sugárzás jelenléte $\Rightarrow$ 1936 Nobel-díj
  - eredete: Nap (pl. Napkitörések), galaktikus (főleg szupernova maradványok), extragalaktikus (AGN: aktív galaxis magok, kozmikus lökéshullámok)
  - főként p^+-okból áll, amelyek a felső légkörbe érve részecske-záporokat kelt: $p^+ + \text{mag} \rightarrow \pi^0 \rightarrow 2\gamma \rightarrow e^+ + e^- \rightarrow \ldots$ vagy $p^+ + \text{mag} \rightarrow \pi^{\pm} \rightarrow \mu + \nu \rightarrow \ldots$. Ezek a záporok a Föld felszínén is megfigyelhetők
  - az intenzitása nagyjából $\sim 1/E^3$ szerint megy (l. 2.13 ábra)
  - hátránya: nem szabályozható, kis intenzitás
  - ma ismét aktuális kérdés: UHECR (ultra high energy cosmic rays): akár 10^{21} eV energiájú záporokat is megfigyeltek!! (Először a Fly's Eye kísérletben 1991-ben $3.2 \cdot 10^{20}$ eV) (oh-my-god részecske)

    10^{20} eV $\approx$ 10 J $\approx$170 km/h sebességű teniszlabda!

    Probléma: spektrumban levágásnak kellene lennie: GKZ (Greisen, Zatsepin, Kuzmin): $\mathbf{p}^+ + \gamma \rightarrow \Delta^* \rightarrow n^0 + \pi^+$ folyamat miatt, ahol a γ a kozmikus háttérsugárzásból ered $\Rightarrow$ a p^+ lelassul (kb 10 Mpc exponenciális lassulási hossz) $\Rightarrow$ 50 Mpc-nél távolabbi forrásból érkező p^+-ok nem lehetnek $\sim 5 \cdot 10^{19}$ eV-nál nagyobb energiájúak.

    A 10^{20} eV feletti események rendkívül ritkák, kb 1 esemény/km^2/évszázad. Ezért nagyon nagy méretű detektorokat kell építeni.

    Jelenleg is folynak kísérletek, pl.
    * AGASA, Japán: földi megfigyelőállomás, 100 km^2, záporokat figyelnek meg
    * fly's eye (HiRes): fluoreszcent detektor (azaz a zápor UV fényét észlelik)
    * PAO (Pierre Auger Observatory)
      - 3000 km^2 területű
      - direkt megfigyelés: 1600, egyenként 12000 literes víztartály, egymástól 1.5 km-re, fotomultiplyerrel figyelve.

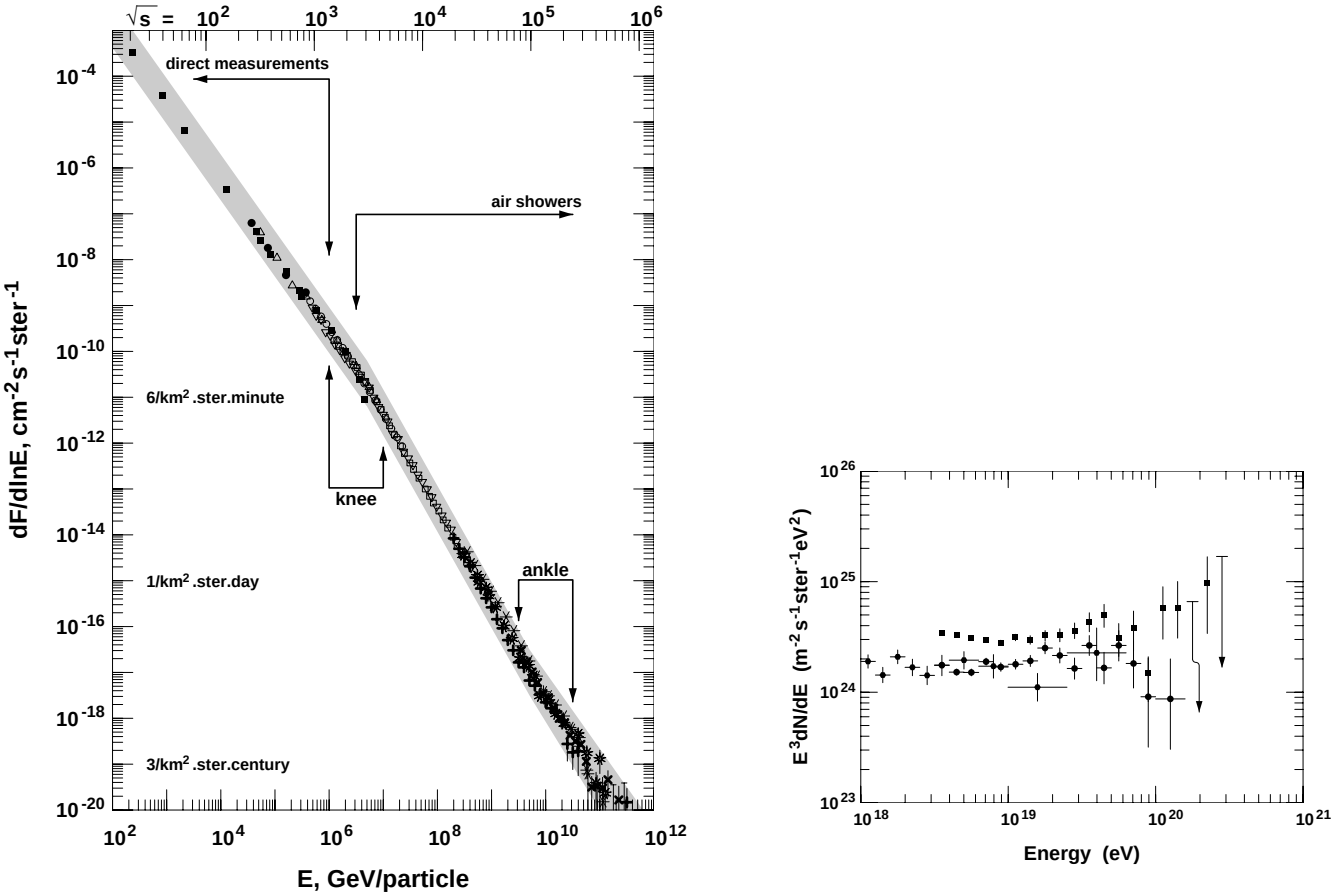


Figure 2.13: Kozmikus sugárzás spektruma (T. Stanev, astro-ph/0411113, lecture at the 2004 SLAC Summer Institute)

· fluoreszcens detektor

Magyarázat? extra égi objektum (fekete lyuk, gamma-ray burst)?új részecske bomlása? ν háttéren szóródó ν-sugárzás? egzotikus fizika (Pl. Lorentz invariancia Planck hossznál való sérülésének jele – E-függő fénysebesség; stabil n^0)?
Ma legelfogadottabb az AGN hipotézis, növekvő illetve forgó fekete lyukkal a közepén

2.5.2 Atomreaktor

maghasadásban sok n^0 és ν keletkezik $\Rightarrow$ ezeket használhatjuk részecskeforrásként is $\Rightarrow$ ν detektálás lehetősége felmerült: 10^{-18}/m a kölcsönhatási valószínűség $\Rightarrow$ nagy intenzitás kell.

reaktorok: átlagban: $n^0 + 92U^{235} \rightarrow$ n^0 gazdag elemek + $2.5\bar{\nu}$ + 200 MeV; további β-bomlások miatt összesen kb. 6 $\bar{\nu}$ keletkezik (átlagosan kb. 3 MeV energiával) 200 MeV-enként:

$$N_\nu = 6 \times \frac{P_{reaktor}}{200 \text{ MeV}} \frac{1}{\text{sec}}. \tag{2.82}$$

Tipikus reaktorban: Paks: egységenként 1375 MW hőteljesítmény (34% hatásfok $\Rightarrow$ 470 MW elektromos teljesítmény), 4 blokk összesen 5500 MW hőteljesítmény. Átszámolva MeV/s-ra:

$$1MW = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \frac{\text{MeV}}{\text{sec}} = 0.625 \times 10^{19} \frac{\text{MeV}}{\text{sec}} \quad \Rightarrow \quad 5500 \text{ MW} \rightarrow 10^{21} \frac{\text{db } \bar{\nu}}{\text{sec}}. \tag{2.83}$$

Ez már összesen nagy hatáskeresztmetszetet jelent!

1953: Reines, Cowan a Savannah River atomreaktorból jövő $\bar{\nu}$-kat használt

$$\bar{\nu} + p^+ \rightarrow e^+ + n^0. \tag{2.84}$$

A e^+ annihilálódik $\Rightarrow$ 0.5 MeV-es foton
A n^0 termalizálódik, majd befogódik; ha van Cd a közelben, akkor $n^0 + Cd \rightarrow$ foton; konkrét kísérletben 200 liter vízben 40 kg-nyi oldott CdCl-ot használtak $\Rightarrow$ késleltetett koincidencia mérés $\Rightarrow$ kb. 3 esemény óránként $\sim$ várakozás

2.5.3 Részecskegyorsítók

A gyorsítás elve egyszerű: elektromos térbe helyezett töltés gyorsul, a nyert energia éppen a ráadott feszültség. Technikai problémák

- Nagy feszültség kell
- A felgyorsított részecskék nem ütközhetnek más részecskékkel $\Rightarrow$ nagy vákuum kell
- Sok részecskét kell tudni gyorsítani: részecskeáram $\equiv$ luminozitás.

Hogyan lehet nagy feszültségeket elérni?

- Cockroft-Walton kapcsolás: elektronikai eszköz. Működési elve: a diódákon keresztül a kondenzátorok töltődni tudnak, azonban nem tudnak kisülni ("pumpa") $\Rightarrow$ egymás után feltöltődik az összes kondenzátor $\Rightarrow$ E_{out} az összes feszültség összege nagy lesz.
  Olcsó, néhány 100 kV-ig lehet elmenni vele; viszont a kimenő töltés csökkenti a feszültséget.
  $\sim$ 1930 500 kV-ot értek el, ezzel p^++ Pb, Li, Be $\Rightarrow$ mesterséges maghasadás (1951: Nobel-díj; szükséges elmélet: alagutazás! (Gamow))
- R.J. van der Graaf, első modell 1929-ben; ez még bolti selyemszalaggal működött... és 1 MV-ot tudott produkálni!
  Mai legnagyobb VdG gépek $\sim$ 25 MeV-re képesek
  Működési elve: Az alsó hengeren töltésmegosztással vagy töltés injektálásával feltöltjük a szalagot, amely a felső, árnyékolt hengerbe érve leadja a töltését $\Rightarrow$ a felső gömb töltése egyre nő.

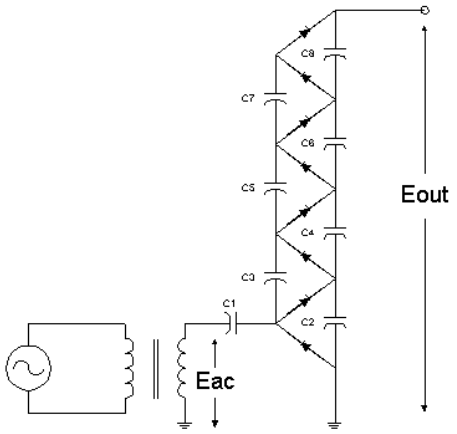


Figure 2.14: Cockroft-Walton generátor

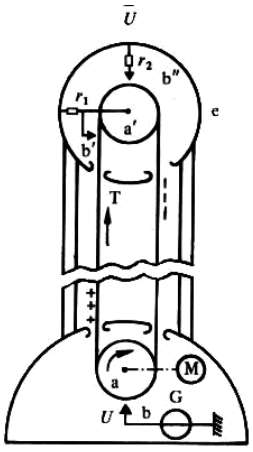


Figure 2.15: van der Graaf generátor

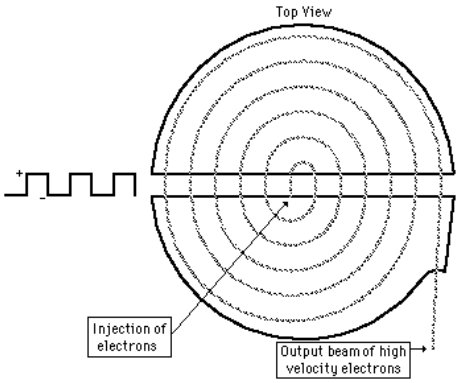


Figure 2.16: Ciklotron működési elve

- ciklotron: használjunk periodikus mozgást a gyorsításhoz. 1931 Lawrence, l. Fig. 2.16. Az üregben árnyékolt elektromos tér $\Rightarrow$ csak a mágneses tér hat, a részecske körbefut. Mikor a fém üregek közé ér, mindig olyan feszültséget kapcsolunk rá, hogy gyorsítsa a részecskét.

  Állandó B térben a fél körpálya befutásához szükséges idő:

$$\frac{mv^2}{r} = evB \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{eB} \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{r\pi}{v} = \frac{\pi m}{eB}, \tag{2.85}$$

  független a sebességtől $\Rightarrow$ állandó külső frekveciát használhatunk!! $\Rightarrow$ Lawrence 1939-ben Nobel-díjat kap.

  Kezdetben egy 4.5 inch (kb. 12 cm-es) eszközzel kezdték, de már ez is 80 keV-es részecskéket adott. Támogatásért fordult az államhoz (1000$) $\Rightarrow$ egy "nagy" ciklotronnal (11 inch – 30 cm) már átlépte az 1 MeV-ot (1.2 MeV)! Ezzel már maghasadás is előidézhető, néhány héttel késtek Cockroft-Waltonhoz képest
  1934: 5 MeV, 1939: 20 MeV
  "big science": nagy csoportok dolgoztak ugyanazon a területen.

- probléma a ciklotronnal:
  - relativisztikus sebességeknél m nő $\Rightarrow$ megváltozik a frekvencia $\Rightarrow$ szinkro-ciklotron, a mágneses tér is nő.
  - növekszik a sugár a max E-vel $\Rightarrow$ nagy területen kell (homogén) mágneses tér & vákuum

- betatron: növekvő mágneses tér rotációs elektromos teret gerjeszt, amivel részecskéket gyorsíthatunk. 1950-re Kerst 300 MeV-es betatront épít!

Szinkrotron: a mai gyorsítók technológiája

- a gyorsított résecskék zárt csőben haladnak: rozsdamentes acél, 8-12 cm átmérőjű.

- a részecskék csoportokban haladnak (kupac, bunch)
  A luminozitás $\sim E^2$ szerint kell nőjön, mert a hatáskeresztmetszetek $\sim 1/E^2$ szerint csökkennek.

- előgyorsítás: mielőtt a nagy gyorsítóba érnek a részecskék, kisebb gyorsítókkal (több lépcsőben) gyorsítják, esetleg tárolják őket (pl. e^+-gyorsító esetén).

- gyorsítás: klisztronokkal, l. Fig. 2.17 olyan frekvenciát választunk, hogy éppen megfeleljen az elek-

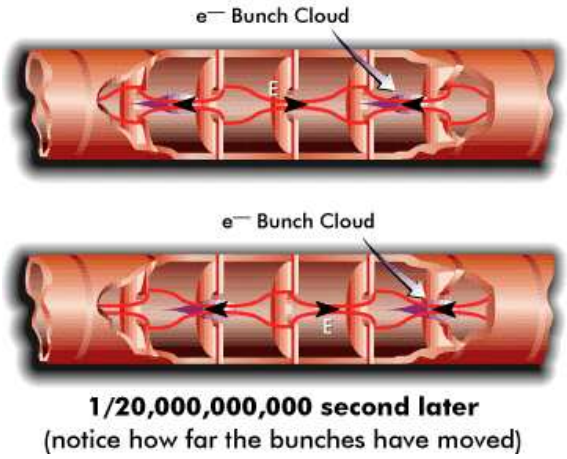


Figure 2.17: Klisztron működése (SLAC)

  tronok sebességének: valójában csatolt 250 MHz-es üregrezonátorok sorozata.

- eltérítés: mágnesekkel. A szükséges B értékéhez felthetjük, hogy ultrarelativisztikus részecskéket gyorsítunk, ezért

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{mc}{eB} = \frac{E}{ecB} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E}{ecR} \approx 3.33 \frac{E/\mathrm{TeV}}{R/\mathrm{km}}. \tag{2.86}$$

Nyaláb stabilitás

- nyaláb stabilitás: részecskék taszítják egymást, a falban keltett elektromos terek szétzilálják a csoportot $\Rightarrow$ gondoskodni kell az együtt maradásukról (több órán keresztül)
  - fázisstabilitás: (l. Fig. 2.18). A késő részecskék erősebb teret éreznek $\Rightarrow$ jobban gyorsulnak

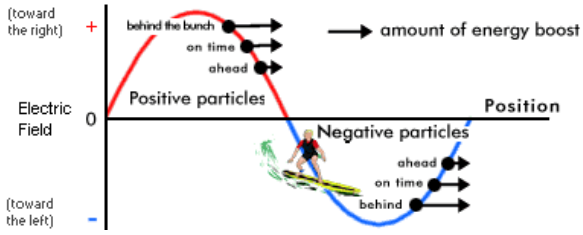


Figure 2.18: Fázsistbilitás

$\Rightarrow$ részecskecsoport együtt marad (McMillan, Veksler)
Ezzel szinkrociklotron építhető, változó frekvenciájú ciklotron, ahol a részecskék csoportokban (kupac, bunch) haladnak.

  - gyenge fókuszálás: transzverzális síkban: kívül haladó részecskék nagyobb sugáron kell haladjanak $\Rightarrow$ csökkenteni kell kifelé a mágneses teret.
  - aktív (erős) fókuszálás (1952: Courant, Livingston, Snyder): a széttartó nyalábokat össze kell terelni. Nincs a lencséhez hasonló mágneses eszköz, azonban kvadrupol mágnes: egyik irányban fókuszál, másik irányban defókuszál, l. Fig. 2.19. Lencséknél: f_1 és f_2 fókusztávolságú lencse d

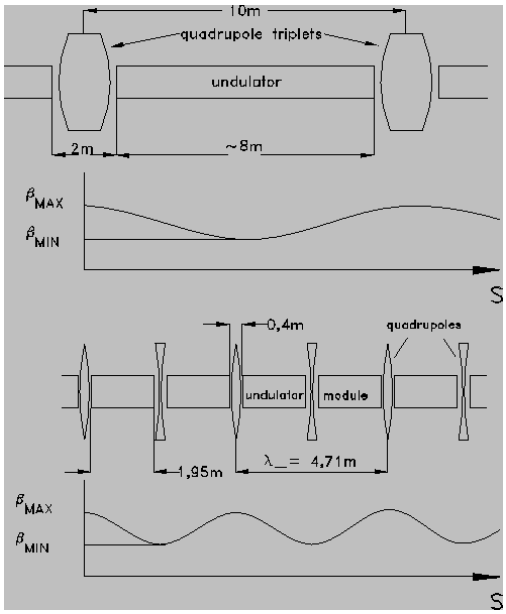


Figure 2.19: Fókuszáló elem (DESY)

távolságra ($d < f_{1,2}$) $\Rightarrow$ eredő fókusz

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d^2}{f_1 f_2} \xrightarrow{f_1=-f_2} \frac{d^2}{f^2} > 0, \tag{2.87}$$

azaz mindig fókuszál. Nagy jelentőségű, nagy energiák elérését tette lehetővé.

Elképesztő pontosság: már a régi eszközöknél is $\approx$ légy méret/Hold távolsága; ma $\approx$ légy méret/Pluto távolsága (20 μm/nap).

- részecske ütközés: collider, azaz ütköztető, nem fix target!

  Két azonos tömegű részecskére: ha az egyik áll $p_1 = (E_1, \mathbf{p})$, $p_2 = (m, 0)$ $\Rightarrow$ az ütközés teljes energiája $E^0 = E_{\mathbf{p}} + m$. Ugyanezt mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve? Ott $p_1 = (E^{TK}/2, \mathbf{p}/2)$, $p_2 = (E^{TK}/2, -\mathbf{p}/2)$, az ütközés energiája E^{TK}. A két energia viszonyára: $s = (p_1 + p_2)^2$ invariáns, azaz

$$(E^{TK})^2 = (E_1+m)^2 - \mathbf{p}^2 = (E_1+m)^2 - (E_1^2 - m^2) = (E^0)^2 - (E^0 - 2m)E^0 = 2mE^0 \quad \Rightarrow \quad E^0 = \frac{(E^{TK})^2}{2m}. \tag{2.88}$$

  Vagyis 1 TeV ütközési energia megfelel p^+-nál 500 TeV, e^--nál 1 millió TeV (!!) álló target energiának (arról nem is beszélve, hogy mindkét részecskét fel lehet gyorsítani.)

- szinkrotronsugárzás: körpályán mozgó részecskék gyorsulnak $\Rightarrow$ sugároznak. Sugárzással kibocsátott teljesítmény részecskénként

$$P = \frac{Z_0 e^2 c^2}{6\pi R^2} \left(\frac{E}{E_0}\right)^4, \tag{2.89}$$

  ahol $Z_0 = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \approx 376.73\ \Omega$ vákuum impedancia. Fontos, hogy $(E/E_0)^4$ hatvánnyal megy $\Rightarrow$ nagy energiát nehéz részecskékkel könnyebb elérni.
  energiaveszteség: LEP 2-ben $E \approx 100$ GeV részecskénti energia, az elektronok nyugalmi tömege: 500 keV $\Rightarrow$ $E/E_0 \approx 2 \cdot 10^5$, és ennek a 4. hatványa kell $\Rightarrow$ igen nagy energiaveszteség, kb. 44 MW, amit gyorsítással kell pótolni! $\Rightarrow$ gyakorlatilag ez korlátozza az e^-–e^+ szinkrotronok alkalmazását
  LHC-ban $E \approx 7$ TeV, és $E_0 \approx 1$ GeV $\Rightarrow$ $E/E_0 \approx 7 \cdot 10^3$ $\Rightarrow$ kb. 10 milliószor kisebb sugárzási veszteség részecskénként; összesen $P \approx 5$ kW.
  Teljesen elkerülhető a szinkrotronsugárzás? Lineáris gyorsító kell! Stanford (SLAC) ilyen, a tervek szerint ILC (International Linear Collider), CLIC (Compact Linear Collider) $\Rightarrow$ 1-5 TeV-es elektron-pozitron gyorsító lehet.

Nagy gyorsítók

- 1952, Brookhaven National Laboratory (BNL): Cosmotron. $E = 3$ GeV. Gyenge nyalábfókuszálást használt (ezzel max 10 GeV-ig lehet elmenni). 1960 AGS (alternating gradient synchrotron), erős fókuszálással, $E = 33$ GeV; 2000 RHIC (Relativistic heavy ion collider), p^+-p^+, d-Au, Cu-Cu, Au-Au ütközések; p^+-p^+ütközéseknél 2009-ben 500 GeV TK-i energiával

- 1954, Berkley, Bevatron, $E = 6$ GeV; antiproton felfedezése 1955-ben (1959-ben Nobel díj)

- CERN: 1957-ben indul az első gyorsító (600 MeV-es szinkrociklotron), 1959-ben PS (proton synchrotron), akkor a világ legnagyobb gyorsítója, 1963-ban detektorban megfigyelik a neutrinó-kölcsönhatást. 1976 SPS (super- proton synchrotron), 1981-ben átépítik proton-antiproton ütköztetővé 2×270 GeV energiával. 1989 LEP (large electron-positron collider) eredetileg 2×50 GeV energiával; 1995 LEP2, 2×100 GeV-es energia; 2008 szeptemberében indult az LHC (large hadron collider), de a baleset miatt leállt, 2009. novemberében újra indult, 2010. márciusában 3.5 TeV energiát sikerült elérni. A tervezett 7 TeV-es energiát (és a megfelelő luminozitást) kb. 2012 után tervezik elérni.

- 1962: SLAC, 50 km hosszú lineáris gyorsító, 50 GeV-ig; 1994 “B-factory”

- Fermilab (FNAL), 1967, Weston (Illinois, Chicago közelében), 1972-re 200 GeV-es proton nyaláb; 1985-ben p^+-p^- ütköztető kb. 500 GeV energiával $\Rightarrow$ Tevatron, kb. 2 TeV-es energiával. 4 mérföld (kb. 6.5 km) kerületű gyorsító
- 1958: DESY (deutsches elektronen-synchrotron), részecskegyorsítók: 1974 DORIS, később PETRA (electron-positron double storage ring), 1990 HERA (Hadron Electron Ring Accelerator) elektronok és protonok ütközése; TESLA (TeV-Energy Superconducting Linear Accelerator)
- 1971 KEK (Tsukuba, Japán); neutrino-oszcilláció kutatásban az egyik főszereplő.

LHC adatok

- Szükséges luminozitás LHC-nál 10^{34}db/(cm^{2}sec) $\Rightarrow$ 2808 kupac, 10^{11} részecskével mindegyikben nyalábáram $I = N_{bunch} n_{bunch} ec/2\pi R \approx 0.5$ A
  ütközések: 25 ns-onként!!
  teljes nyalábenergia 724 MJ – ha ebből csupán 10^{-7} rész elvész a mágneseket quench-eli!
- A CERN-LHC-ban a kívánt energia $\approx$ 7 TeV, a pálya kerülete 27 km, mélysége 50-175 m, az $R \approx$ 3.5 km, ennek 80%-a mágnes $\Rightarrow$ $R_{eff} \approx 2.8$ $\Rightarrow$ $B \approx 8.3$ T.
  Ez nagyon nagy mágneses indukció; vasmágnesekkel kb. 2 T érhető el (szaturáció), rendkívül nagy fogyasztás mellett! Mai gyorsítókban szuprevezető mágnesek; LHC-nál 1232 db 14 méter hosszú mágnes, (392 kvadrupól mágnes) – a mágnesekben 10 GJ energia tárolódik
  a huzalozás NiTi elsőfajú szupravezető szálból áll ($T < 1.9$ K kell: hidegebb, mint a világűr!), a szükséges áramerősség 12350 A!!
  Hűtés: 96 t folyékony He. Fogyasztás: kb. 10 GW...
  Veszélyes üzem: LHC baleset – a szupravezető mágnesben elektromos hiba, ívet húzott, ami kirepesztette a He-tartályt, 6t folyékony He kiömlött, közben a 10t-s mágneseket kitépte a helyéből. Kb. 100 mágnes károsodott, kb. 20 millió $-os kár.
- előgyorsítók: LINAC2 (50MeV), PSB (1.4GeV), PS (26 GeV), SPS (450GeV)
- 1-2-szer naponta feltöltik az LHC-t és felmennek 3.5 TeV-re
- 2013-tól állnak át 7 TeV-re
- 7.5 milliárd EUR-s építési költség

2.5.4 Detektorok

Ha már megvannak a gyorsított részecskéink, mit kezdjünk velük? $\Rightarrow$ detektorok

- fluoreszcens ernyő (pl. ZnS); a becsapódó ionizáló (töltött) részecskék fevillanásokat okoznak, ezt mikroszkóppal lehet megfigyelni $\Rightarrow$ atommag felfedezése (1911)
- fotolemez, fotoemulzió; ionizáló sugárzás és fotonok nyomot hagynak a lemezen, előhívás után megvizsgálható $\Rightarrow$ Becquerel is használta már, de sokáig használták (l. pion felfedezése 1947)
- 1912: Wilson-féle ködkamra (1927: Nobel-díj). Működési elve a Fig. 2.20 ábrán látható.
  - mágneses teret alkalmazva elhajlik a pálya $\Rightarrow$ mv/e arány
  - energia-mérés: részecske ütközik $\Rightarrow$ lelassul. Adott úthosszon leadott energia $\sim q^2 \varrho f(v)$, ahol ϱ a közeg sűrűsége, $f(v)$ a sebesség fügvénye, f anyagtól függ, meghatározható, q a bejövő részecske töltése. Ha megállást látunk, akkor a megállásig megtett útból

$$L = \int_{mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}}^{mc^2} \frac{dE}{dE/dx} \sim mF(v), \tag{2.90}$$

  meghatározható a kezdeti sebesség.

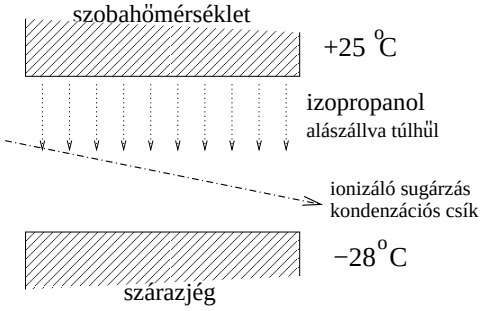


Figure 2.20: Wilson kamra működési elve

30-as évek "a magfizika aranykora"
Probléma: kis gázsűrűség $\Rightarrow$ limitált felbontóképesség, lassú fékeződés

- 1952: Glaser buborékkamra (bubble chamber), 1960 Nobel-díj: használjunk túlfűtött folyadékot (nyomás csökkentésével lehet elérni), az áthaladó ionizáló részecskék forrásba hozzák a folyadékot. Folyadék pl. H.
  Sokáig használják; pl. CERN 1971: Gargamelle buborékkamra a legnagyobb detektor (freonnal CF_3Br üzemelt) $\Rightarrow$ semleges áram felfedezése (l. később).

- foto-multiplier. Foton becsapódik a fotokatódba $\Rightarrow$ fotoeffektus, e^- lép ki. Gyorsító feszültség

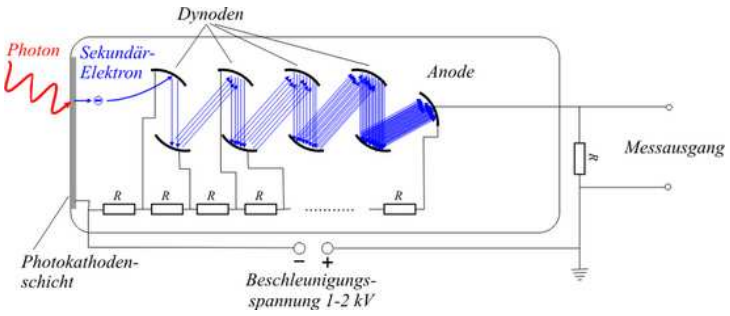


Figure 2.21: Fotomultiplier

hatására becsapódik egy lemezbe (dynoda), ahonnan több e^--t üt ki.

- scintillation counter: bizonyos kémiai elemek fényt bocsátanak ki, ha foton vagy ionizáló sugárzás éri. Gamma-detektor: pl. NaI vagy CsI; mai gyorsítókban gyors jel-lefutás kell (antracén $C_{14}H_{10}$, BGO $Bi_4Ge_3O_{12}$). Fényintenzitás a leadott energiától függ. Fotomultiplier segítségével kapunk elektronikus jelet $\Rightarrow$ trigger

- elektronikus detektálás: Geiger detektor 1908, l. Fig. 2.22. Ionizáló sugárzás ionpárt kelt, amelyek

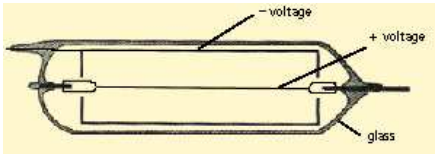


Figure 2.22: Geiger detektor

a külső feszültség hatására felgyorsulnak, részecske lavinát indítanak el (l. kozmikus sugárzás), így becsapódáskor mérhető elektronikus jelet kapunk.

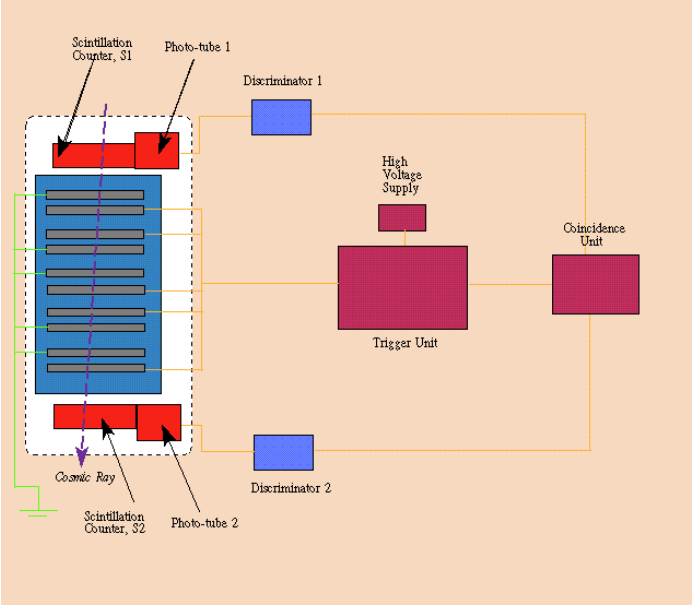


Figure 2.23: Szikradetektor

- szikradetektor: Az áthaladó ionizáló sugárzás ionokat hagy hátra, így ha utána nagy feszültséget kapcsolunk a lemezekre, akkor szikra üt át ezeken a helyeken $\Rightarrow$ lefényképezhető.
  Kevésbé pontos mint a buborékkamra, de jobban időzíthető

- sok továbbfejlesztés: egy fontos lépés: multiwire proportional chamber (MWPC) 1968 Charpak (1992 Nobel díj). Működési elve a Fig. 2.24 ábárn látható. Az ionizált részecskék az anódok felé mozognak,

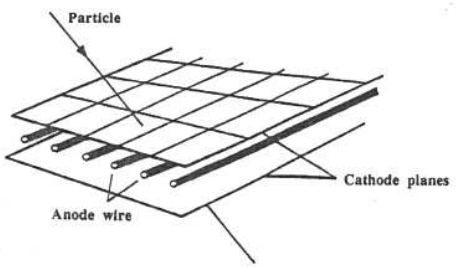


Figure 2.24: Wire chamber

  így a becsapódás elektromos jelet kelt $\Rightarrow$ minden szálhoz egy erősítő kell. Merőleges szálakkal a pálya elektronikusan leképezhető.
  A keletkezett töltések száma az energiától függ (proportional), így, ha nem indul be lavina, akkor az áthaladó töltés energiájára is következtethetünk.
  Drift chamber: ha ismerjük a részecske belépésének idejét (pl. szcintillációs detektor), és az ionok driftsebességét a detektorban, akkor a részecske áthaladásának helyét ki tudjuk számolni $\Rightarrow$ eleg kevesebb huzal
  Time projection chamber (TPC): henger, végein MWPC, a henger hosszában elektromos tér. A pálya mentén keltett ionokat az MWPC-vel olvassák ki. Energiaveszteség is mérhető $\Rightarrow$ jobb részecske azonosítás.

- félvezető detektorok: félvezetőben nincsenek szabad töltéshordozók, így nagy feszültséget adhatunk rá; ha ekkor egy ionizáló sugárzás vagy gamma-foton lép a félvezetőbe, akkor a valencia-sávból kilökhet

töltéshordozókat, ami felgyorsulva elektromos jelet kelt. A jel nagysága a töltéshordozók számával, így a leadott energiával arányos.

Egy gyorsító detektora sok részből áll, amelyekkel pontos információkat lehet szerezni az áthaladó részecskéről. Példa: SLD (SLAC Large Detector `http://www2.slac.stanford.edu/vvc/detectors.html`). 6000 tonna

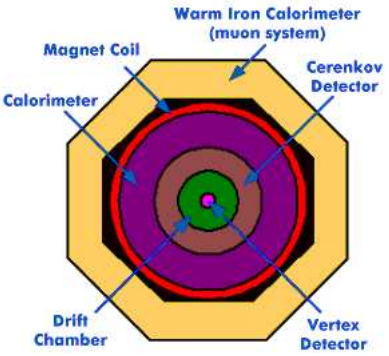


Figure 2.25: SLD detektor sematikus vázlata

súlyú, kb 15 méteres detektor.

- legbelső egy szilikon vertex detektor: vékony CCD chipekkel körbevett (kb. 5cm átmérőjű) henger $\Rightarrow$ áthaladó ionizáló sugárzás töltést kelt, amelyet elektronikusan kiolvasunk. Hely pontossága $\approx 10^{-8}$ cm. 2 réteg $\Rightarrow$ kirepülő részecskék iránya pontosan meghatározható (vertex), innen a rövid életű

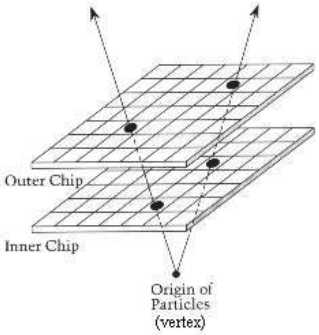


Figure 2.26: Vertex detektálás

részecskék által megtett útra következtethetünk.

- következik egy drift chamber, mágneses térben; 35000 szálból áll $\Rightarrow$ pálya információ, kb. 10^{-3} cm pontossággal $\Rightarrow$ mágneses térből p/e arány.
- Cherenkov detektor: ha a töltött részecske sebessége meghaladja a közegbeli fénysebességet, akkor elektromágneses sugárzást bocsát ki $\Rightarrow$ hengerhullámok, nyílásszög $\cos\theta = c_{lok}/v$. Jeladó freon gáz, fény detektálása TMAE szcintillátor, amely UV$\rightarrow$ elektronok, amely elektronikusan kiolvasható.
- kaloriméter: megállítja a részecskét és megméri az energiáját: megállítás ólom lemezekkel, köztük folyékony Ar (összesen 288 modul, 650 t). Az ólomlemezeken áthaladó részecske ionokat kelt, amely az Ar-ban további záporokat indukál $\Rightarrow$ töltések, összegyűjthetők az ólomlapokon, kiolvashatók. Zápor mérete $\Rightarrow$ energia; zápor alakja $\Rightarrow$ részecskefajta.
- utána jön a mágneses teret előállító tekercs

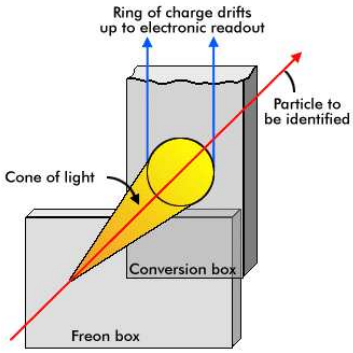


Figure 2.27: Cherenkov detektor

- végül a vas kaloriméter: a müonok és a legnagyobb energiájú hadronok átmennek a a kaloriméteren $\Rightarrow$ őket 14 vaslemez, közöttük gáz és fémszálak $\Rightarrow$ mint egy óriási drift chamber. Ami innen is elszökik, az a neutrino, amelyet a hiányzó energiából lehet azonosítani.

2.5.5 Rezonanciák

Részecskék felfedezése: ha a nyomát felfedezzük, akkor meghatározható a töltése, tömege, egyéb kvantumszámai. De mi van akkor, ha nem látjuk meg a nyomát – pl. ilyenek az erős kölcsönhatással bomló részecskék, ahol a tipikus élettartam $\tau \sim 10^{-24}$ sec, amennyi idő alatt a fény átér a protonon...

A gyorsan bomló részecske élete a LEP-ben, l. Fig. 2.28: *1.* egymás felé futó e^-és e^+ nyalábok;

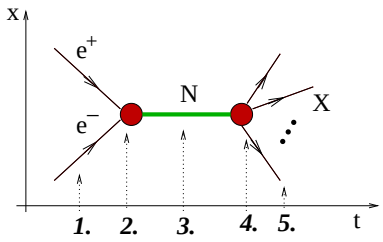


Figure 2.28: Gyorsan bomló részecske életének pillanatai

2. ütközésben előáll az új N részecske; *3.* eltelik τ idő; *4.* a részecske elbomlik; *5.* a bomlástermékek szétrepülnek, és a detektorokban felfogjuk őket.
Meg lehet-e állapítani a bomlástermékek megfigyelésével, hogy volt egy közbenső állapot, mikor N létezett? Ebben a folyamatban N állva keletkezik, azaz az energiája $E = M_N$. Az energiamegmaradás miatt csak egyetlen bemenő energiánál fodulhat elő ez az esemény, mikor tehát $E_e^- + E_{e^+} = M_N$. Ha más folyamat nem lenne a világon, akkor a két ütköző elektron nem tudna egymással kölcsönhatni, csakis ezen az energián, így a hatáskeresztmetszet mindenütt 0 lenne, kivéve $s = (p_1 + p_2)^2 = M_N^2$ energiánál.

A valóság két ponton tér el ettől az esettől. Egyrészt az ideális eset is pontosításra szorul, hiszen N csak véges időtartamig létezik, ezért az energiája nem meghatározott; az energia bizonytalansága $\Delta E \cdot \tau \sim \hbar$. Emiatt más energiaértékeknél is várható kölcsönhatás; az elméleti képlet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{A^2}{(s - M_N^2)^2 + 3M_N^2/\tau^2}, \tag{2.91}$$

ahol $A \sim$ az e^--$e^+ \to N$ folyamat szórási hatáskeresztmetszete. Ez egy Lorentz-görbe, a csillapított harmonikus oszcillátor válaszfüggvénye $\Rightarrow$ az ilyen részecskéket rezonanciának nevezzük.

A másik eltérés, hogy vannak más folyamatok is, ahogyan az e^-és e^+ kölcsönhat egymással. Ezeket a megmaradó kvantumszámok szerint csoportosíthatjuk: itt a végállapoti részecskék össz kvantumszámai

(energia, impulzus, töltés, paritás stb.), meg kell egyezzen az N részecske hasonló kvantumszámaival. De még egy adott kvantum csatornában is lehet egyéb folyamat, az azonban általában nem mutat különös viselkedést $s = M_N^2$ körül. Vagyis az N részecske időleges megjelenése úgy látszik az $s - d\sigma/d\Omega$ diagramon, mint egy sima háttéren levő kiemelkedés. Ez azonban valószínűségi alapon megy, hiszen $d\sigma/d\Omega$ adott szögbe való szóródás valószínűségét jelenti, ezért a csúcs is csak sok esemény megfigyelése után rajzolódik ki (pl. egy cinkelt dobókocka is csak sok dobás után árulja el magát...). Szokásosan: ha valamilyen ismert háttérfolyamat hatáskeresztmetszetétől való eltérés 5σ[3], akkor beszélünk új fizikáról.

Példa: hogyan állapíthatjuk meg egy kockáról, hogy cinkelt, ha csak a dobások eredményét látjuk?

[3] Azaz: a szórási hatáskeresztmetszetek alapján adott körülmények között várunk n eseményt. Feltesszük, hogy az események eloszlása nagy n-re Gauss (centrális határeloszlás!), akkor a szórás $\sigma = \sqrt{n}$. Ha igaz a modell, akkor az esetek 99.995%-ában a megfigyelt események száma $n \pm 5\sigma$ tartományba esik. Ha az igazi kísérletben a megfigyelt események száma ezen kívül esik, akkor nagy valószínűséggel a modell nem jó.

Chapter 3

Térelmélet

3.1 Ismétlés

A matematikai formalizmus a relativisztikus kvantumtérelmélet nevet viseli $\Rightarrow$ szükséges előismeretek a relativitáselmélet, a kvantummechanika és térelmélet. Ezeket ismételjük át ebben a fejezetben. A levezetéseknél az újonnan bevezetett egységrendszert használva $\hbar = c = 1$.

3.1.1 Relativitáselmélet

Minkowski tér

def.: $\mathbf{M}$ Minkowski tér 4 dimenziós valós vekortér, elemei az események. Koordinátázás (megfigyelő) felbontja térre és időre: $x = (t, \mathbf{x}) \equiv x^\mu$.
A rajta értelmezett skaláris szorzat $u \cdot v = u_0 v_0 - \mathbf{uv}$. Innen származó metrika $|x|^2 \equiv x^2 = t^2 - \mathbf{x}^2$.

def.: $\mathbf{M}$-en értelmezett metrikus tenzor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u \cdot v = \sum_{\mu\nu} u^\mu g_{\mu\nu} v^\nu \equiv ugv. \tag{3.1}$$

def.: $\mathbf{M}^*$ duális tér elemei $\bar{v} : \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ lineáris leképzések. $\mathbf{M}^*$ is 4D vektortér, koordinátázáskor elemeit alsó indexxel jelöljük $\bar{v}_\mu$.

def.: Einstein konvenció: alsó és felső indexeket automatikusan szummázzuk: $a^\mu b_\mu \equiv \sum_\mu a^\mu b_\mu$.

$\mathbf{M}^*$ azonosítható $\mathbf{M}$-mel:

$$\bar{g} : M \to M^*, \quad v \mapsto \bar{v}, \quad \text{hogy} \quad \bar{v}(x) = v \cdot x \quad \forall x \in \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu, \tag{3.2}$$

vagyis $\bar{g} \equiv g$, a metrikus tenzorral lehet azonosítani $\mathbf{M}$-et és $\mathbf{M}^*$-ot.
Inverz leképzés:

$$g^{-1} : M^* \to M, \quad \bar{v} \mapsto v, \qquad v^\mu = g^{\mu\nu} \bar{v}_\nu \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\mu'} g^{\mu'\nu} = \delta^\nu_\mu. \tag{3.3}$$

Ha van egy lineáris $X : M \to M$ leképzés, annak inverze is $X^{-1} : M \to M$, transzponáltja $X^T : M^* \to M^*$, definíció szerint

$$\bar{v} M x = (M^T v)\, x \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_\mu M^\mu_{\cdot\,\nu} x^\nu = (M^T)_{\nu}^{\cdot\,\mu} v_\mu x^\nu \quad \Rightarrow \quad (M^T)^\mu_{\cdot\,\nu} = M_{\nu}^{\cdot\,\mu}. \tag{3.4}$$

Szimmetria

A Minkowski tér szimmetriája olyan lineáris $\Lambda : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, ahol $x \mapsto x' = \mathbf{\Lambda} x$ leképzés (Lorentz-transzformáció), komponensekben

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\nu} x^{\nu} \tag{3.5}$$

amely a skalár szorzatot békén hagyja:

$$u' \cdot v' = u \cdot v \qquad \forall\, u, v \in \mathbf{M}, \qquad \text{azaz} \qquad u\mathbf{\Lambda}^T g \mathbf{\Lambda} v = ugv. \tag{3.6}$$

Ha ez igaz minden u, v-re, akkor írhatjuk

$$\mathbf{\Lambda}^T g \mathbf{\Lambda} = g \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{\Lambda}^{-1} = g \mathbf{\Lambda}^T g. \tag{3.7}$$

Komponens jelölésben

$$\Lambda^{\mu}_{\cdot\,\rho} \Lambda^{\nu}_{\cdot\,\sigma} g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma}, \qquad \Lambda_{\nu}^{\cdot\,\varrho} \Lambda^{\nu}_{\cdot\,\sigma} = \delta^{\varrho}_{\sigma}, \qquad (\Lambda^{-1})^{\varrho}_{\cdot\,\nu} = \Lambda_{\nu}^{\cdot\,\varrho} \tag{3.8}$$

A duális téren generálódó transzformáció

$$\bar{x}' = gx' = g\mathbf{\Lambda} x = g\mathbf{\Lambda} g \bar{x} \qquad \text{vagy} \qquad \bar{x}_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\cdot\,\nu} x_{\nu}, \tag{3.9}$$

azaz az index g-vel való húzásával konzisztens.

A Lorentz-trf-k paramétereinek száma: 4×4-es valós mátrixban 16 szabad paraméter van, a fenti megkötés egy szimmetrikus mátrixot ad, ebben 10 paraméter van $\Rightarrow$ 6 szabad valós paraméter van. Ebből 3 forgatás, 3 boost.

Példák Lorentz-transzformációkra

A következő mátrix

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Lorentz-transzformáció, mert (csak a 2×2-es részt kiírva)

$$g\mathbf{\Lambda}^T g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta \\ \sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}^{-1}. \tag{3.11}$$

Mint téridő transzformáció ez úgy hat, hogy

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta \\ \sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cosh\eta + x\sinh\eta \\ x\cosh\eta + t\sinh\eta \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Fizikailag: K' koordinátarendszer, amely a téridőt (t', x') koordinátákkal jellemzi, és K koordinátarendszer, amelyben a koordináták (t, x), a világot (azaz a fizikai törvényeket) ugyanolyannak látja. K' koordinátarendszer középpontjának mozgása K'-ből leírva $x' = 0$, K-ból leírva $x = vt$, ahol v a K' rendszer sebessége K-hoz képest. A fentiek miatt

$$x' = 0 = x\cosh\eta + t\sinh\eta \quad \Rightarrow \quad x = -t\tanh\eta = vt \quad \Rightarrow \quad \tanh\eta = -v, \qquad \cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \sinh\eta = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{3.13}$$

azaz

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Másik speciális példa a $\mathbf{\Lambda} = g$, hiszen erre fennáll $g\mathbf{\Lambda}^T g = ggg = g = \mathbf{\Lambda}^{-1}$. Fizikailag ez $t' = t$, $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ transzformációt jelenti, azaz tértükrözés. Hasonlóan $\mathbf{\Lambda} = -g$ az időtükrözés, szintén Lorentz-trf. Végül $\mathbf{\Lambda} = 1$ egységtrf és $\mathbf{\Lambda} = -1$ téridő tükrözés is speciális Lorentz-trf.

Csoport-szerkezet

A Lorentz-trf-k csoportot alkotnak jelöljük $\mathcal{L}$-lel. Bizonyításhoz $\mathbf{\Lambda} = 1$ Lorentz-trf, ha $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{L}$, azaz $g\mathbf{\Lambda}^T g = \mathbf{\Lambda}^{-1}$, akkor inverzet véve $g(\mathbf{\Lambda}^{-1})^T g = \mathbf{\Lambda}$, azaz $\mathbf{\Lambda}^{-1} \in \mathcal{L}$. Ha $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2 \in \mathcal{L}$, akkor

$$g(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2)^T g = g\mathbf{\Lambda}_2{}^T g\, g\mathbf{\Lambda}_1{}^T g = \mathbf{\Lambda}_2{}^{-1}\mathbf{\Lambda}_1{}^{-1} = (\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2 \in \mathcal{L}. \tag{3.15}$$

$\mathcal{L}$ 6 paraméteres folytonos csoport (Lie-csoport), azonban nem összefüggő. Ugyanis

$$\det(\mathbf{\Lambda}^T g\mathbf{\Lambda}) = -(\det\mathbf{\Lambda})^2 = \det g = -1 \quad \Rightarrow \quad \det\mathbf{\Lambda} = \pm 1. \tag{3.16}$$

A $+1$ és -1 elemek nem köthetők folytonosan össze. Másrészt

$$g_{00} = 1 = \Lambda^\mu_{.0}\Lambda^\nu_{.0} g_{\mu\nu} = (\Lambda^0_{.0})^2 - (\Lambda^i_{.0})^2 \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^0_{.0})^2 = 1 + (\Lambda^i_{.0})^2 \quad \Rightarrow \quad |\Lambda^0_{.0}| \geq 1, \quad \text{valamint} \quad |\Lambda^0_{.0}| \geq |\Lambda^i_{.0}| \tag{3.17}$$

ismét a $\Lambda^0_{.0} > 1$ és a $\Lambda^0_{.0} < -1$ elemek nem köthetők össze folytonosan.

A széteső részeket $\mathcal{L}^{\alpha\beta}$-val jelöljük, ahol $\alpha = \operatorname{sgn}\det\mathbf{\Lambda}$, és $\beta = \operatorname{sgn}\Lambda^0_{.0}$. Ha $\mathbf{\Lambda}_1 \in \mathcal{L}^{\alpha_1\beta_1}$ és $\mathbf{\Lambda}_2 \in \mathcal{L}^{\alpha_2\beta_2}$, akkor $\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2 \in \mathcal{L}^{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}$. Bizonyításhoz $\det\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2 = \det\mathbf{\Lambda}_1\det\mathbf{\Lambda}_2 = \alpha_1\alpha_2$. Másrészt,

$$\begin{aligned} |\Lambda^0_{.0}| &= |(\Lambda^{-1})^0_{.0}| \geq |(\Lambda^{-1})^i_{.0}| = |\Lambda^0_{.i}| \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2)^0_{.0} = \operatorname{sgn}\left[(\Lambda_1)^0_{.0}(\Lambda_2)^0_{.0} + (\Lambda_1)^0_{.i}(\Lambda_2)^i_{.0}\right] = \operatorname{sgn}(\Lambda_1)^0_{.0}(\Lambda_2)^0_{.0} = \operatorname{sgn}(\Lambda_1)^0_{.0}\operatorname{sgn}(\Lambda_2)^0_{.0} = \beta_1\beta_2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ezért $\mathcal{L}^{++}$ valódi részcsoport.

Relativisztikus mechanika

Mechanika megfogalmazásához a legkisebb hatás elvét tartjuk szem előtt. Vizsgáljunk két rögzített végpont ($x_1 = (t_1, \mathbf{x}_1)$ és $x_2 = (t_2, \mathbf{x}_2)$) között mozgó (általánosított) tömegpontot. Felveszünk egy tetszőleges pályát a két végpont között: $\mathbf{x} = q(t)$. Ehhez hozzásrendelünk egy skalár függvényt $S[q; x_1, x_2]$, mely a pálya funkcionálja. Fizikai mozgásra a legkisebb hatás elve szerint $S[q]$ minimális.

Reális (kauzális) fizikai rendszerekre $\exists L(q(t), \dot{q}(t), t)$ Lagrange-függvény, hogy

$$S[q; x_1, x_2] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t), \dot{q}(t), t). \tag{3.19}$$

Szimmetria: vagyünk $R : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ leképzést, amely $t \mapsto t' \equiv R_0(t)$ és $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{x})$. Ezt kiterjeszthetjük a pályákra $R[q](t') = \mathbf{R}(q(t))$ módon. Ez a leképzés szimmetriája a mechanikai rendszernek, ha bármely pályára $S[q] = S[R[q]]$. Ebből következik, hogy ha $q(t)$ megvalósuló mozgást ír le, akkor $R[q](t)$ is megvalósuló pálya. Példa: centrális erőtérben egy pálya elforgatottja ugyanazt a hatásfüggvényt adja (szimmetria), ezért az elforgatott megoldás továbbra is megoldás marad. Az eltolt megoldásra ez nem igaz.

Fizikai elv: valódi fizikai rendszerekben nem lehet több külső struktúra, mint a téridőben magában $\Rightarrow$ a fizikai rendszereknek szimmetriája lesz a téridő szimmetriája. Relativitáselméletre: minden valódi fizikai rendszer Lorentz-invariáns kell legyen, azaz $S[q] = S[\mathbf{\Lambda}q]$ igaz kell maradjon. Szabad tömegpontra ez lénygében lerögzíti a hatásfüggvény lehetséges alakját: arányos a pálya ívhosszával:

$$S[q] = -m\int ds[q] = -m\int dt\,\sqrt{1 - v^2}, \tag{3.20}$$

ahol $v_i = \dot{q}_i$. Az impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{3.21}$$

A mechanikára megfogalmazott elvek, kis módosításokkal, átvihetők a kvantumtérelméleti rendszerekre.

3.1.2 Kvantummechanika

A kvantummechanikában a rendszer állapotát egy $\mathcal{H}$ komplex Hilbert tér egy normálható eleme $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ adja meg. Szokásosan a norma 1, azaz $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$. A $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operátorok között két csoport jelentős:

Hermitikus operátorok

Hermitikus operátorokra $H^\dagger = H$. Ezek jobb és bal oldali sajátvektora megegyezik, sajátértékeik valósak:

$$H\left|h_i\right\rangle = h_i\left|h_i\right\rangle, \qquad h_i^* = h_i. \tag{3.22}$$

Hermitikus operátorok megfigyelhető mennyiségeket reprezentálhatnak, ekkor sajátértékeik a megfigyelhető mennyiség mérésének eredményét jelenthetik. Ha a rendszer állapota $|\Psi\rangle$, akkor a h_i mérési eredmény megvalósulásának valószínűsége $|\langle h_i|\Psi\rangle|^2$. A mérés eredményének várható értéke

$$\langle H\rangle = \sum_i h_i|\langle h_i|\Psi\rangle|^2 = \langle\Psi|H|\Psi\rangle. \tag{3.23}$$

A mérés után a rendszer a mért sajátállapotba kerül.

Speciális szerepet tölt be a hely $\hat{q}$ és impulzus $\hat{p}$ operátora. Ezek folytonos spektrummal rendelkeznek, azonban egyszerre nem mérhetők: $\Delta p\Delta x \geq \hbar$. Operátorokra megfogalmazva

$$[\hat{q},\hat{p}] = i. \tag{3.24}$$

Ezek az operátorok "bázist" képeznek a fizikai megfigyelhető operátorok között, azaz minden megfigyelhető mennyiség $\hat{q}$ és $\hat{p}$ hermitikus függvénye. Ekkor a fenti kvantálási feltétel rögzíti bármely két megfigyelhető mennyiség kommutátorát.

A klasszikus mechanikához való kapcsolathoz a megfigyelhető mennyiségek $\hat{q}$ és $\hat{p}$-vel való kifejezése meg kell egyezzen a klasszikus képlettel, azonban rendezési bizonytalanságok lehetnek.

Unitér operátorok

A rendszer állapotának megváltoztatását kétféle módon írhatjuk le. Schrödinger képben az állapotot transzformáljuk $|\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle$ lineáris operátor. Ennek egységnyi normájú elemet egységnyi normájú elembe kell képeznie, így $U^\dagger U = 1$, azaz U unitér operátor kell legyen. A Heisenberg képben az állapot marad, viszint az operátorokat transzformáljuk. A várható érték változatlansága érdekében

$$\left\langle\Psi\left|\hat{O}'\right|\eta\right\rangle = \left\langle\Psi'\left|\hat{O}\right|\eta'\right\rangle = \left\langle\Psi\left|U^\dagger\hat{O}U\right|\eta\right\rangle \quad\Rightarrow\quad \hat{O}' = U^\dagger\hat{O}U. \tag{3.25}$$

Fontos speciális esetet jelentenek azok az operátorok, amelyek egy (vagy több) folytonos paramétertől függnek $U(\lambda)$, és csoportot alkotnak. Egy paraméteres csoport pl. az állapot eltolása, vagy adott tengely körüli elforgatása, több paraméteres csoport az általános forgatás. A csoport tulajdonság azt jelenti, hogy $\forall\,\lambda_1,\lambda_2$ paraméterre $\exists\lambda_3$ paraméter, hogy $U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_3)$. A standard paraméterezés:

$$U(\lambda) = e^{-iT^a\lambda_a}. \tag{3.26}$$

Infinitezimális trf. hatására a hullámfüggvény ill. az operátorok trf-ja:

$$d|\Psi\rangle = -iT|\Psi\rangle\,d\lambda, \qquad \text{illetve} \qquad d\hat{O} = i[T,\hat{O}]d\lambda. \tag{3.27}$$

Az infinitezimális generátor, mivel hermitikus operátor, fizikai megfigyelhető mennyiséget reprezentál. Az egy paraméteres csoportok hatására ennek az operátornak a transzformációja:

$$T(\lambda) = U^\dagger(\lambda)TU(\lambda) = e^{iT\lambda}Te^{-iT\lambda} = T. \tag{3.28}$$

Azaz T megmarad a transzformáció során. Ezzel a következő fontos összefüggésre mutattunk rá:

trf. generátora $\equiv$ trf. során megmaradó mennyiség.

Az idő-eltolás példája az egy paraméteres transzformációknak. Ekkor $\exists H$ az infinitezimális idő-eltolás generátora, ezzel $U(t) = e^{-iHt}$ a véges időeltolás operátora. Az állapotok transzformációja

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi\rangle = e^{-iHt}|\Psi\rangle \quad\Rightarrow\quad i\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \tag{3.29}$$

ez a Schrödinger egyenlet. Az operátorokra érvényes egyenlet

$$\hat{O}(t) = e^{iHt}\hat{O}(0)e^{-iHt} \quad\Rightarrow\quad \partial_t\hat{O} = i[H,\hat{O}]. \tag{3.30}$$

A generátor, H idő-független. Ezt *definiáljuk* energiának.

def.: Energia az időeltolás generátora (és egyben az időeltolás során megmaradó mennyiség).

A tér-eltolás generátorát p-vel jelölve a véges eltolás operátora e^{-ipx}. A hely-operátor infinitezimális megváltozása éppen dx kell legyen, azaz

$$dq = i[p,q]dx = dx \quad \Rightarrow \quad [q,p] = i. \tag{3.31}$$

A tér-eltolás generátora tehát az impulzus; egy bonyolult elméletnél, ahol nem tudjuk, mi az impulzus:

def.: Az impulzus a tér-eltolás generátora (és egyben az eltolás során megmaradó mennyiség).

Harmonikus oszcillátor

A kvantummechanika lényegében egyetlen megoldható problémája a harmonikus oszcillátor. Erre

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2. \tag{3.32}$$

BEvezetjük a keltő-eltüntető operátorokat:

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger), \qquad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad \Rightarrow \quad [q,p] = i[a,a^\dagger] = i \quad \Rightarrow \quad [a,a^\dagger] = 1. \tag{3.33}$$

Kifejezve H-t

$$p^2 = -\frac{\omega}{2}\left(a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + (a^\dagger)^2\right), \qquad q^2 = \frac{1}{2\omega}\left(a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + (a^\dagger)^2\right) \quad \Rightarrow \quad H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \tag{3.34}$$

Jelöljük H sajátvektorait $|n\rangle$-nel, sajátértékeit E_n-nel. Mivel bármely állapotban

$$\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \omega\left(|a|\Psi\rangle|^2 + \frac{1}{2}\right) > 0, \tag{3.35}$$

ezért valamennyi sajátértéke pozitív. Emiatt van legkisebb sajátérték: E_0, a hozzá tartozó sajátvektort jelöljük $|0\rangle$-nak. Mivel

$$[a^\dagger a, a] = -a \quad \Rightarrow \quad [H,a] = -\omega a, \qquad [H,a^\dagger] = -\omega a^\dagger, \tag{3.36}$$

ezért

$$Ha|n\rangle = aH|n\rangle + [H,a]|n\rangle = (E-\omega)a|n\rangle. \tag{3.37}$$

Vagyis $a|n\rangle$ is sajátvektor, sajátértéke $E - \omega$. Viszont $E_0 - \omega$ nem lehet sajátérték, ezért

$$a|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad H|0\rangle = \frac{\omega}{2}|0\rangle \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\omega}{2}. \tag{3.38}$$

Másrészt $Ha^\dagger|n\rangle = (E_n + \omega)a^\dagger|n\rangle \quad \Rightarrow \quad a^\dagger|n\rangle$ is sajátvektor, sajátértéke $E_n + \omega$. Ezért

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega, \qquad |n\rangle \sim (a^\dagger)^n|0\rangle. \tag{3.39}$$

Az arányossági tényezőhöz

$$|n\rangle = \frac{1}{\alpha_n}a^\dagger|n-1\rangle = \frac{1}{\beta_{n+1}}a|n+1\rangle. \tag{3.40}$$

Ezzel, feltéve, hogy minden sajátállapot normált:

$$\langle n-1|a|n\rangle = \beta_n = \alpha_n. \tag{3.41}$$

Másrészt

$$\langle n|n\rangle = \frac{1}{\alpha_n^2}\langle n-1|aa^\dagger|n-1\rangle = \frac{1}{\alpha_n^2}\langle n-1|a^\dagger a + 1|n-1\rangle = \frac{1}{\alpha_n^2}(\alpha_{n-1}^2+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n^2 = \alpha_{n-1}^2+1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n^2 = n. \tag{3.42}$$

Tehát

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle. \tag{3.43}$$

3.2 Klasszikus térelméletek

Térelmélettel találkoztunk már: elektrodinamikában, hidrodinamikában, rugalmasságtan, stb. Lényege, hogy a fizikai mennyiségeket egy *mező* határozza meg

def.: Mező: $\Psi : \mathbf{M} \to \mathbf{V}$, a Minkowski-térről valamilyen vektortérbe képező függvény; valamely alkalmas koordinátázással komponensei: $\Psi_i(x) \equiv \Psi_i(t, \mathbf{x})$.

Példák:

- $p(t, \mathbf{x})$ illetve $T(t, \mathbf{x})$ nyomás illetve hőmérséklet-mező: itt $\mathbf{V} \equiv \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ skalár mező
- $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ elektromos mező és mágneses indukció mező, vagy $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ sebesség-mező: itt $\mathbf{V} \equiv \mathbf{R}^3$ $\Rightarrow$ vektormező.

3.2.1 Lagrange-sűrűség

Hogy az általános térelmélet leírását megkapjuk, alőször felosztjuk a teret kis cellákra, középpontjukat jelölje $\mathbf{x}_i$, és vesszük a cella középpontjának értékét: $\Psi_i(t) = \Psi(t, \mathbf{x}_i)$. Ezzel egy véges sok szabadsági fokú rendszert kapunk, amelyet a mechanika elvei szerint építünk fel. L Lagrange függvény több szabadsági fok esetén $L(\dot{q}_i, q_i, t)$ függvény, ahol $i = 1 \dots N$. Ez még túl általános. Lokálisnak nevezzük a sok szabadsági fokú rendszert, ha q_i csak a szomszédaival hat kölcsön, és a Lagrange-függvény felírható mint

$$L = \sum_{\langle i,j \rangle} L_i^{(2)}(q_i, q_j, t) + \sum_i L_i^{(1)}(\dot{q}_i, q_i, t), \tag{3.44}$$

ahol $\langle i, j \rangle \equiv$ szomszédok, és $i > j$ (hogy ne számoljunk duplán). Ha i, j térbeli cellákat jelöl, mint előbb, akkor írhatjuk a térbeli felosztást finomítva

$$q_j - q_i = \mathbf{a}\boldsymbol{\nabla} q(\mathbf{x}_i) + \mathcal{O}(\mathbf{a}^2). \tag{3.45}$$

A magasabbrendű tagokat elhagyva írható $L_2(q_i, \boldsymbol{\nabla} q_i, t)$. Összefoglaló jelöléssel bevezetjök a négyes deriváltat: $\partial_\mu = (\partial_t, \boldsymbol{\nabla})$.

A felosztás finomításával a szummák integrálokká írhatók át: $\sum_i F_i$ esetében bevezetjük az $F(\mathbf{x}) = F_i$, $\mathbf{x} \in \delta V_i$ lépcsőfüggvényt, amelyre

$$\sum_i F_i = \frac{1}{\delta V} \int d^3\mathbf{x}\, F(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{F}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V \to 0} \frac{F(\mathbf{x})}{\delta V} \tag{3.46}$$

sűrűség. Így lokális térelméleteket jellemző Lagrange-függvény felírható mint

$$L = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{L}(\Psi(t, \mathbf{x}), \partial_\mu \Psi(t, \mathbf{x}), t, \mathbf{x}) \tag{3.47}$$

Lagrange sűrűség integrálja $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ csak *első deriváltakat* tartalmaz.

A hatás alakja

$$S = \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), x) \tag{3.48}$$

t-ben és $\mathbf{x}$-ben teljesen szimmetrikus alakba írható.

3.2.2 Mozgásegyenletek

Legkisebb hatás elve: a megvalósuló pályánál a hatás minimális, vagyis a hatás variációja nulla. Itt kétféle utat követhetünk: vagy a diszkretizált mechanikai rendszerben az ismert mozgésegyenletet vesszük, és megnézzük a kontinuum limeszt, vagy közvetlenül a Lagrange sűrűség mezők szerinti variációját tekintjük.

Diszkretizált eset

Mechanikában vesszük a $q_i(t)$ konfigurációs térbeli pályát, és az a körüli variációt, azaz $q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$ pályát. Ekkor a két pályához tartozó hatás értéke linearizálható δq_i-ben.

$$S[q'] - S[q] = \sum_i \int dt \, \frac{\delta S}{\delta q_i(t)} \delta q_i(t) + \mathcal{O}(\delta q_i(t)^2). \tag{3.49}$$

Megvalósuló pályákra tetszőleges variációra eltűnik $\delta S/\delta q_i(t)$, ez adja a mozgásegyenletet (Euler-Lagrange egyenlet):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{3.50}$$

Térelméletre áttérve a q_i szerinti deriváltat óvatosan kell elvégezni, hiszen az elvégzendő derivált, 1D-ban írva:

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{L}(q_j, \frac{q_{j+1}-q_j}{a}, t) &= \sum_j \left[\delta_{i,j}\partial_1\mathcal{L}(q_j, \frac{q_{j+1}-q_j}{a}, t) + \delta_{i,j+1}\frac{1}{a}\partial_2\mathcal{L}(q_j, \frac{q_{j+1}-q_j}{a}, t) - \delta_{i,j}\frac{1}{a}\partial_2\mathcal{L}(q_j, \frac{q_{j+1}-q_j}{a}, t)\right] = \\ &= \partial_1\mathcal{L}(q_i, \frac{q_{i+1}-q_i}{a}, t) + \frac{1}{a}\left[\partial_2\mathcal{L}(q_{i-1}, \frac{q_i-q_{i-1}}{a}, t) - \partial_2\mathcal{L}(q_i, \frac{q_{i+1}-q_i}{a}, t)\right].\end{aligned} \tag{3.51}$$

Az első tag a $\mathcal{L}$ függvény első argumentuma szerinti deriváltat tartalmazza $\Rightarrow$ $q_i \to \Psi$ helyettesítéssel $\partial\mathcal{L}/\partial\Psi$. A második tag valójában $(\partial_2\mathcal{L}_{i-1} - \partial_2\mathcal{L}_i)/a \to -\partial(\partial_2\mathcal{L})/\partial x$, hiszen az $i \to x$. A ∂_2 pedig a második argumentum szerinti deriváltat jelenti, azaz $\partial/\partial\Psi'(x)$, ahol Ψ' az x szerinti derivált. Az egy dimenziós mozgásegyenlet ezek szerint:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} - \frac{\partial L}{\partial \Psi} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \Psi'} = 0. \tag{3.52}$$

Az összes irányt figyelembe véve összefoglaló írásmóddal:

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi)} - \frac{\partial L}{\partial \Psi} = 0. \tag{3.53}$$

Direkt út

A másik lehetőség, hogy a hatást közvetlenül a mezők szerint írjuk fel, és megvizsgáljuk a variációját:

$$S[\Psi+\delta\Psi] = \int d^4x \, \mathcal{L}(\Psi+\delta\Psi, \partial_\mu\Psi+\partial_\mu\delta\Psi, x) = S[\Psi] + \int d^4x \left[\delta\Psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} + \partial_\mu\Psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\right] = S[\Psi] + \int d^4x \, \delta\Psi \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\right], \tag{3.54}$$

ahol az utolsó lépésnél parciálisan integráltunk, és eldobtuk a végtelenben fellépő felületi tagokat. A hatás szélsőértéke ott van, ahol $\delta S = 0$ *minden* variációra. Ekkor az integrálban $\delta\Psi$ együtthatója el kell tűnjön

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} = 0, \tag{3.55}$$

megegyezik a másik eredménnyel.

3.2.3 Megmaradó áramok

Míg mechanikában egy Q mennyiség megmaradása azt jelentette, hogy $Q(t) = Q(0)$, egy ϱ mező esetén a lokális mennyiségek nem maradnak meg, mert más helyre átmehetnek. Mégis megmaradásról beszélhetünk olyan értelemben, hogy egy tetszőleges V térfogatban

$$\int_V d^3\mathbf{x}\varrho(t+dt, \mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{x}\varrho(t, \mathbf{x}) + \text{(falon távozó } \varrho).$$

Bevezetve $j^\mu = (\varrho, \mathbf{j})$ jelölést, ahol $\mathbf{j}$ a ϱ-hoz tartozó áram, $V \to 0$ limeszben a következő mérlegegyenlethez jutunk:

$$\dot{\varrho} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \tag{3.56}$$

j^μ neve megmaradó áram. A ténylegesen megmaradó mennyiség $Q = \int dV\, j^0$, a teljes térre integrálva, hiszen

$$\dot{Q} = \int dV\, \partial_0 j^0 = -\int dV\, \mathrm{div}\,\mathbf{j} = -\oint_\infty d\mathbf{F}\,\mathbf{j} = 0, \tag{3.57}$$

mert a végtelenben nincsenek áramok.

3.2.4 Szimmetria és megmaradás

A mechanikában láttuk, hogy egy szimmetria követelmény mennyire megszorítja a hatás lehetséges alakját. A téridő relativisztikus invariáns: milyen hatás-funkcionálok konzisztensek ezzel? Hogy ezt megválaszoljuk, először a Lorentz-transzformációk hatását nézzük meg mezőkön.

Kezdjük egy szemléletes példával: ha adott egy sebességmező (pl. áramlásnál), és forgatást végzek a rendszeren, mi történik a mezővel? Egyrészt a sebességek helye megváltozik, másrészt viszont a sebességek iránya is változik! Ez azt mutatja, hogy egy általános R transzformáció hatása két részből tevődik össze: egyrészt a téridő transzformációjából, $R_M : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, másrészt a "belső tér" $\mathbf{V}$ transzformációjából $R_V : \mathbf{V} \to \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad R = R_M \times R_V$. A Fig. 3.1 ábrán látható, hogy a teljes hatás úgy állítható elő, hogy először

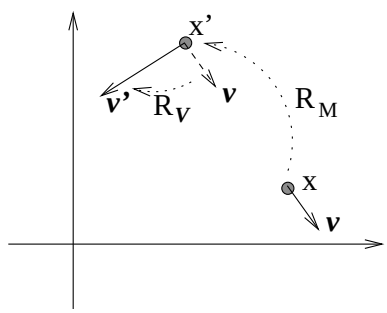


Figure 3.1: Vektormező általános transzformációja

$x \mapsto x'$, majd az *új helyen* $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$. Tehát

$$\mathbf{v}'(R_M(x)) = R_V(\mathbf{v}(x)) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}'(x) = R_V(\mathbf{v}(R_M^{-1}(x))). \tag{3.58}$$

A későbbiekben nem különböztetjük meg jelölésben R_V-t és R_M-et, és az írásmód: $\mathbf{v}'(x) = R(\mathbf{v}(R^{-1}(x)))$ lesz.

def.: Lineáris transzformáció: R_M és $R_\mathbf{V}$ is lineáris. Ekkor mindkettő egy-egy mátrixxal írható fel, ekkor $\mathbf{v}'(x) = R\mathbf{v}(R^{-1}x)$.

A Lorentz csoport elemei folytonos lineáris transzformációk.

Egy transzformáció akkor szimmetria, ha a transzformált mezőhöz az eredetivel azonos hatásfüggvény tartozik: $S[\Psi] = S[R(\Psi)]$. Ekkor a transzformált mező körüli variációra igaz

$$\delta S[R(\Psi)] = S[R(\Psi) + \delta\Psi] - S[R(\Psi)] = S[R(\Psi + \bar{\delta}\Psi)] - S[R(\Psi)] = S[\Psi + \bar{\delta}\Psi] - S[\Psi] = \delta S \bar{\delta}\Psi, \tag{3.59}$$

itt $\delta R(\Psi)\bar{\delta}\Psi = \delta\Psi$ módon vezettük be $\bar{\delta}\Psi$-t. Ha tehát Ψ kielégítette a mozgásegyenleteket, akkor $\delta S = 0$, ekkor viszont $\delta S[R(\Psi)] = 0$ is igaz, azaz $R(\Psi)$ is kielégíti a mozgásegyenleteket.

Tétel: (Noether-tétel) Minden folytonos szimmetriához tartozik egy megmaradó áram.

Bizonyítás.: Jelöljük a folytonos transzformációt R_τ-val. $R_0 \equiv 1$ az egységtranszformáció legyen. Infinitezimális transzformációnál ($R_{\delta\tau}$) a változás lineáris $\delta\tau$-ban. Ezért a mezőkön hatva felírható:

$$R_{\delta\tau}: \ \Psi(x) \mapsto \Psi'(x) = \Psi(x) + \delta\Psi(x) = \Psi(x) + \delta\tau\Delta\Psi(x). \tag{3.60}$$

Szimmetriatranszformáció esetén $S[\Psi'] = S[\Psi]$.

Módosítsuk a fenti transzformációt úgy, hogy $\delta\tau$-t *helyfüggővé* tesszük! Ekkor tehát

$$\delta\Psi(x) = \delta\tau(x)\Delta\Psi(x). \tag{3.61}$$

Az így kapott transzformációra kétféleképpen nézhetünk rá. Egyrészt $\Psi(x)$ infinitezimális változás a "pályán", így annak variációját adja. Mivel a hatás a valódi mozgások körüli kis variációkra (első rendben) nem változik, így *minden* transzformációra igaz, hogy

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\tau}\right|_{\Psi_0} = 0, \tag{3.62}$$

ahol Ψ_0 a mozgásegyenlet megoldása.

Másrészt felírhatjuk a hatás változását. Tudjuk azonban azt is, hogy ha $\delta\tau(x) \to \delta\tau$ helyfüggetlen lenne, akkor a hatás nem változna (szimmetria!). Emiatt δS arányos lesz $\delta\tau$ deriváltjaival. Parciális integrálásokkal azonban minden $\delta\tau$-ra ható derivált áthárítható az együtthatójára, míg végül az első derivált marad

$$\delta S = -\int d^4x K^\mu(x)\partial_\mu\delta\tau(x) = \int d^4x \partial_\mu K^\mu(x)\delta\tau(x). \tag{3.63}$$

Ezt összevetve (3.62) egyenlettel:

$$\frac{\delta S}{\delta\tau(x)} = \partial_\mu K^\mu(x) \quad \Rightarrow \quad \left.\partial_\mu K^\mu(x)\right|_{\Psi_0} = 0, \tag{3.64}$$

vagyis K^μ megmaradó áram.

3.2.5 Energia-impulzus tenzor

Speciális példaként tekintsük a téridő eltolásokat: $x \to x + a$, ahol a =const, valamint $R_{\mathbf{V}} = 1$. Mezőre hatva $\Psi'(x+a) = \Psi(x) \quad \Rightarrow \quad \Psi'(x) = \Psi(x-a)$.

Mikor szimmetria? Ha $S[\Psi] = S[\Psi']$! Válasszuk az integrálási változónak x'-t:

$$S[\Psi'] = \int d^4x' \, \mathcal{L}(\Psi'(x'), \partial'_\mu\Psi'(x'), x') = \int d^4x \, \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu\Psi(x), x+a). \tag{3.65}$$

Ez akkor egyezik $S[\Psi]$-vel $\forall\,\Psi$-re, ha $\mathcal{L}$ nem függ expliciten x-től.

Mi a megmaradó mennyiség? Ehhez $x' = x + a(x)$, és vizsgáljuk $S[\Psi']$-t:

$$S[\Psi'] = \int d^4x' \, \mathcal{L}(\Psi'(x'), \partial'_\mu\Psi'(x'), x') = \int d^4x \, \det\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \, \mathcal{L}(\Psi(x), \partial'_\mu\Psi(x)). \tag{3.66}$$

Ehhez:

$$\partial'_\mu\Psi(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu\Psi(x). \tag{3.67}$$

A derivált mátrix $x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x)$ illetve $x^\mu \approx x'^\mu - a^\mu(x')$ alapján:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu a^\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\mu a^\nu + \mathcal{O}(a^2). \tag{3.68}$$

A determinánshoz

$$\begin{vmatrix} 1+\partial_0 a^0 & \partial_1 a^0 & \dots \\ \partial_0 a^1 & 1+\partial_1 a^1 & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = (1+\partial_0 a^0)(1+\partial_1 a^1)\ldots + \mathcal{O}(a^2) = 1 + \partial_\mu a^\mu + \mathcal{O}(a^2). \tag{3.69}$$

Végül tehát

$$S[\Psi'] = \int d^4x\,(1+\partial_\mu a^\mu)\mathcal{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x)-\partial_\mu a^\nu\partial_\nu\Psi(x)) = S[\Psi] + \int d^4x\,\left[\partial_\mu a^\mu\mathcal{L} - \partial_\mu a^\nu\partial_\nu\Psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\right]. \tag{3.70}$$

Valóban csak ∂a-tól függ! A korábbiak alapján a megmaradó áram

$$\delta S = \int d^4x\partial_\mu a^\nu T^\mu_{\cdot\nu} \quad\Rightarrow\quad T_{\mu\nu} = \partial_\nu\Psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Psi)} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad\Rightarrow\quad \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{3.71}$$

vagyis minden μ-re van egy megmaradó áram $\Rightarrow$ energia-impulzus tenzor. Szimmetrikussá tehető.

Energia Energia $\equiv$ időeltolás generátora $\equiv$ az időeltolásra megmaradó mennyiség, emiatt

$$E = \int d^3\mathbf{x}\,T^{00}(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}\,\varepsilon(t,\mathbf{x}) \quad\Rightarrow\quad \varepsilon(t,\mathbf{x}) = T^{00}(t,\mathbf{x}) \tag{3.72}$$

az energiasűrűség. Bevezetve a kanonikusan konjugált impulzust a szokásos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Psi(x)} = \Pi(x) \tag{3.73}$$

képlettel, az energiasáráság írható úgy, mint

$$\varepsilon = \Pi\dot\Psi - \mathcal{L}, \tag{3.74}$$

ami teljesen analóg a klasszikus mechanika képletével.

Impulzus Impulzus $\equiv$ téreltolás generátora $\equiv$ a téreltolásra megmaradó mennyiség, ezzel

$$\mathbf{P}^i = \int d^3\mathbf{x}\,T^{0i}(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}\,\mathbf{p}(t,\mathbf{x}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{p} = T^{0i} = \Pi\partial^i\Psi, \tag{3.75}$$

ahol $\mathbf{p}$ az impulzussűrűség.

3.2.6 Térelméletek kvantálása

Láttuk: diszkretizált térelmélet $\equiv$ sok szabadsági fokú mechanikai rendszer, ahol $\Psi(t,\mathbf{x}_i)\to q_i(t)$ és $\Pi(t,\mathbf{x}_i) = p_i(t)$. Mechanikai rendszer kvantálásakor $q\to\hat q$ és $p\to\hat p$ operátorok lettek $\Rightarrow$ Térelméletnél $\Psi(t,\mathbf{x})\to\hat\Psi(t,\mathbf{x})$ operátor.

Láttuk: kvantummechanikai rendszer kvantálása onnan jön, hogy az impulzus ($\equiv$ tér-eltolás invariancia esetén a megmaradó mennyiség) generálja a tér-eltolást. A tér-operátor $\hat q_i$ megváltozása tér-eltolás hatására $\delta\hat q_i = dx\mathbf{1}$, arányos az egységmátrixxal. Ezért, ha az impulzus éppen a kanonikusan konjugált impulzus, akkor $[q_i,p_j] = i\delta_{ij}\mathbf{1}$.

Térelméleteknél ugyanígy megköveteljük, hogy az impulzus ($\equiv$ tér-eltolás invariancia esetén a megmaradó mennyiség) generálja a tér-eltolást. Az impulzus kifejezése (3.75) képletből jön. Másrészt infinitezimális tér-eltolás hatására

$$\Psi'(t,\mathbf{x}) = \Psi(t,\mathbf{x}-d\mathbf{x}) = \Psi(t,\mathbf{x}) - d\mathbf{x}^i\partial_i\Psi(t,\mathbf{x}) + \dots \quad\Rightarrow\quad \delta\Psi = -d\mathbf{x}^i\partial_i\Psi(t,\mathbf{x}). \tag{3.76}$$

Ezt generálja az impulzus, a (3.27) képlet alapján

$$\delta\Psi(t,\mathbf{x}) = -d\mathbf{x}^i\partial_i\Psi(t,\mathbf{x}) = i[\boldsymbol{P}^i(t),\Psi(t,\mathbf{x})]d\mathbf{x}^i = i\int d^3\mathbf{y}\,i[\Pi(t,\mathbf{y})\partial_i\Psi(t,\mathbf{y}),\Psi(t,\mathbf{x})]d\mathbf{x}^i. \tag{3.77}$$

Ezt *két* konzisztens kvantálás tudja teljesíteni. Mivel

$$[AB,C] = ABC - CAB = A(BC+\alpha CB) - (\alpha AC + CA)B = \begin{cases} A[B,C] + [A,C]B, & \text{ha } \alpha = -1 \\ A\{B,C\} - \{A,C\}B, & \text{ha } \alpha = 1, \end{cases} \tag{3.78}$$

Ezért lehetséges kommutátorral vagy antikommutátorral kvantálni:

$$[\Psi(t,\mathbf{x}),\Pi(t,\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad [\Psi(t,\mathbf{x}),\Psi(t,\mathbf{y})] = 0, \qquad \text{vagy}$$
$$\{\Psi(t,\mathbf{x}),\Pi(t,\mathbf{y})\} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad \{\Psi(t,\mathbf{x}),\Psi(t,\mathbf{y})\} = 0. \tag{3.79}$$

Az előbbieket nevezzük bozonoknak, az utóbbiakat fermionoknak. Fontos, hogy a kvantálás egy idejű operátorokra vonatkozik.

Az időfejlődést az infinitezimális idő-eltolás generátorával állíthatjuk elő, ez a Hamilton-operátor. Ettől elvárjuk, hogy megegyezzen az idő-eltolás során előálló megmaradó mennyiséggel, vagyis $E = \int d^3\mathbf{x}\, T^{00}$ energiával.

3.3 Relativisztikus skalár térelmélet

A legegyszerűbb térelmélet, mikor $\Psi : \mathbf{M} \to \mathbf{R}$, azaz a target vektortér $\boldsymbol{V} = \mathrm{R}$ egy dimenziós vektortér. Jelöljük a mezőt Φ-vel, és tegyük fel, hogy $\Phi \to -\Phi$ szimmetria $\Rightarrow$ csak páros hatványok szerepelnek. Tegyük fel azt is, hogy eltolás invariáns a rendszer $\Rightarrow$ energia és impulzus megmarad $\Rightarrow$ általánosan $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi)$.

Lorentz transzformácó hatásásra $\partial_\mu\Phi$ változik:

$$\Phi'(x) = \Phi(\Lambda^{-1}x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \partial_\mu\Phi'(x) = \partial_\mu\left(\Phi(\Lambda^{-1}x)\right) = \partial_\mu(\Lambda^{-1}x)^\nu(\partial_\nu\Phi)(\Lambda^{-1}x), \\ \partial_\mu(\Lambda^{-1}x)^\nu = \partial_\mu(\Lambda^{-1})^\nu_{\cdot\varrho}x^\varrho = (\Lambda^{-1})^\nu_{\cdot\mu} = (g\Lambda^T g)^\nu_{\cdot\mu} = \Lambda^{\cdot\nu}_\mu \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu\Phi'(x) = \Lambda^{\cdot\nu}_\mu(\partial_\nu\Phi)(\Lambda^{-1}x), \tag{3.80}$$

azaz úgy transzformálódik, mint egy kovariáns vektormező. Emiatt

$$\left(\int d^4x\, \partial_\mu\Phi(x)\partial^\mu\Phi(x)\right)' = \int d^4x\, \partial_\mu\Phi'(x)\partial^\mu\Phi'(x) = \int d^4x\, \Lambda^{\cdot\nu}_\mu\partial_\nu\Phi(\Lambda^{-1}x)\Lambda^\mu_{\cdot\varrho}\partial^\varrho\Phi(\Lambda^{-1}x) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \Lambda^{\cdot\nu}_\mu\Lambda^\mu_{\cdot\varrho} = \delta^\nu_\varrho \\ x' = \Lambda^{-1}x \Rightarrow |\det J| = |\det\Lambda^{-1}| = 1 \end{array} \right\} = \int d^4x\, \partial_\mu\Phi(x)\partial^\mu\Phi(x), \tag{3.81}$$

relativisztikusan invariáns. Hasonló módon tetszőleges $\int d^4x\, U(\Phi(x))$ is invariáns.

Így relativisztikusan invariáns, eltolás-invariáns és $\Phi \to -\Phi$ szimmetrikus hatásfüggvény alakja $\int d^4x\, \mathcal{L}(\partial_\mu\Phi(x)\partial^\mu\Phi(x), \Phi^2(x)$ Hatványsorba fejtve, és az első tagokat megtartva kaphatjuk a Φ^4 modellt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi(x)\partial^\mu\Phi(x) - \frac{m^2}{2}\Phi^2(x) - \frac{\lambda}{24}\Phi^4(x), \tag{3.82}$$

ahol m^2 és λ paraméterek. Ennek kvadratikus része (azaz az első két tag) adja a Klein-Gordon hatást.

A Φ^4 modell paramétereinek dimenziója? Mérjünk mindent energia-dimenzióban, jelölés $[E] = 1$. Ekkor

$$[S] = 0, \qquad [d^4x] = -4,\ [\partial_\mu] = 1 \qquad [\mathcal{L}] = 4, \qquad [\Phi] = 1, \qquad [m] = 1,\ [\lambda] = 0, \tag{3.83}$$

azaz m energia (tömeg) dimenziójú, λ dimenziótlan.

A kanonikusan konjugált impulzus mező

$$\Pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}(x)} = \dot{\Phi}(x). \tag{3.84}$$

Az impulzusmomentum tenzor

$$T^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu\Phi(x)\partial^\nu\Phi(x) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E = \int d^3\mathbf{x}\, T^{00}(x) = \int d^3\mathbf{x}\left(\frac{1}{2}\Pi^2(x) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\Phi(x))^2 + \frac{m^2}{2}\Phi^2(x) + \frac{\lambda}{24}\Phi^4(x)\right) \\ \boldsymbol{P}^i = \int d^3\mathbf{x}\, \Pi(x)\partial^i\Phi(x) \end{cases} \tag{3.85}$$

Érdekesség: egy konfigurációt statisztikailag is jellemezhetünk: kis térfogatelemekre felosztva a rendszert ("coarse graining") egy térmennyiség átlaga $\langle f(x)\rangle = \int_{\Delta V} d^3\mathbf{x}\, f(x)$, ahol $\mathbf{x} \in \Delta V$. Olyan konfiguráció esetén, mikor a

különböző irányok korrelálatlanok, azaz $\langle \partial^\mu \Phi(x) \partial^\nu \Phi(x) \rangle = 0$, ott $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ diagonális. Ha a konfiguráció izotróp is, azaz a tér irányok ekvivalensek, akkor a $\left\langle \partial^i \Phi \partial^i \Phi \right\rangle$ független az i-től $\Rightarrow$ jelöljük $\left\langle (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 \right\rangle = G$. Ekkor $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ alakja:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}\left\langle \Pi^2 \right\rangle + \frac{1}{2}G + \langle U \rangle \\ p &= \frac{1}{2}\left\langle \Pi^2 \right\rangle - \frac{1}{6}G - \langle U \rangle . \end{aligned} \tag{3.86}$$

Ez egy ideális gáz energia-impulzusmomentum tenzora, ahol ε az energiasűrűség, p a nyomás. Egyensúlyban, ha $U = 0$, akkor

$$\left\langle |\Pi_{\mathbf{k}}|^2 \right\rangle = \frac{1}{Z_{\mathbf{k}}} \int d\Pi_{\mathbf{k}} d\Phi_{\mathbf{k}} |\Pi_{\mathbf{k}}|^2 e^{-\frac{\beta}{2}(|\Pi_{\mathbf{k}}|^2 + \mathbf{k}^2 |\Phi_{\mathbf{k}}|^2)} = \frac{1}{\beta} = \mathbf{k}^2 \left\langle |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle \Pi^2 \right\rangle = G \tag{3.87}$$

Emiatt $\varepsilon = \left\langle \Pi^2 \right\rangle = 3p$, ami egy relativisztikus gázra jellemző törvény.

Konstans konfiguráció esetén, vagyis mikor $\Phi(x) = \Phi =$const., akkor $T^{\mu\nu} = U(\Phi)\, g^{\mu\nu}$ $\Rightarrow$ $U(\Phi)$ kozmológiai konstans, *negatív* nyomással $\Rightarrow$ gravitációs szempontból vonzás helyett taszítás $\Rightarrow$ felfúvódó univerzum, infláció.

3.3.1 A kvadratikus skalár elmélet kvantálása

A Φ^4 elméletet bozonikus elméletként kell kvantálni (l. később: spin-statisztika tétel). Φ-t mostantól operátorként értelmezzük. Klasszikusan valós skalártér $\Rightarrow$ operátorként önedjungált $\Phi^\dagger = \Phi$. Az energia kifejezéséből a Hamilton operátor lesz.

Mivel itt $\Pi = \dot{\Phi}$, ezért

$$[\Phi(t,\mathbf{x}), \dot{\Phi}(t,\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad [\Phi(t,\mathbf{x}), \Phi(t,\mathbf{y})] = 0. \tag{3.88}$$

A teljes Hamilton-operátor sajátfüggvényeit, sajátértékeit nem tudjuk felírni $\Rightarrow$ két lépcsőben haladunk:

1. megoldjuk addig, amíg tudjuk $\Rightarrow$ kvadratikus rész.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2}\Phi^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \Phi)^2 + \frac{m^2}{2}\Phi^2. \tag{3.89}$$

   Diszkretizálva $a^{1/2}\Pi \to p$ és $a^{1/2}\Psi \to q$ jelöléssel, 1D-ban

$$H = \sum_i \frac{1}{2}p_i^2 + \frac{1}{2}(q_{i+1} - q_i)^2 + \frac{m^2 a^2}{2} q_i^2, \tag{3.90}$$

   ami egy csatolt harmonikus oszcillátor teret ír le $\Rightarrow$ megoldható, keltő-eltüntető operátorok bevezetésével.

2. a nem kvadratikus részben ("kölcsönhatási" rész) feltesszük, hogy $\lambda \ll 1$ $\Rightarrow$ megpróbáljuk a spektrumot λ szerinti hatványsorban keresni (pertubációszámítás).

A kvadratikus részben a diszkretizált formában az oszcillátorok első szomszéd csatolással vannak összekötve. Függetleníteni lehet őket, ha áttérünk a Fourier módusokra. Ezért a keltő-eltüntető operátorokat a következő módon vezetjük be:

$$\Phi(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a_{\mathbf{p}}(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right], \qquad \Pi(t,\mathbf{x}) = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \left[a_{\mathbf{p}}(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right], \tag{3.91}$$

ahol $\omega_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. A második tag $\Phi^\dagger = \Phi$ következménye. Az inverz reláció

$$a_p(t) = \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \left[\Phi(t,\mathbf{x}) + \frac{i\Pi(t,\mathbf{x})}{\omega_p} \right], \qquad a_p(t)^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \int d^3\mathbf{x}\, e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \left[\Phi(t,\mathbf{x}) - \frac{i\Pi(t,\mathbf{x})}{\omega_p} \right]. \tag{3.92}$$

Ezt beírva a kommutációs relációba

$$
\begin{aligned}
[a_p(t), a_q^\dagger(t)] &= \frac{1}{2}\sqrt{\omega_p\omega_q}\int d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{y}\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}+i\mathbf{q}\mathbf{y}}\left[\Phi(t,\mathbf{x}) + \frac{i\Pi(t,\mathbf{x})}{\omega_p}, \Phi(t,\mathbf{y}) - \frac{i\Pi(t,\mathbf{y})}{\omega_q}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\omega_p\omega_q}\int d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{y}\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}+i\mathbf{q}\mathbf{y}}\left[\frac{1}{\omega_p} + \frac{1}{\omega_q}\right]\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = (2\pi)^2\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \qquad (3.93)
\end{aligned}
$$

Hasonló módon kijön, hogy $[a_p(t), a_q(t)] = 0$.

Beírjuk a keltő-eltüntető operátoros alakot a Hamilton-operátorba. Az első tag

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\Pi(t,\mathbf{x})^2 &= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}(-i)\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\left[a_\mathbf{p}(t)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} - a_\mathbf{p}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\right](-i)\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_q}{2}}\left[a_\mathbf{q}(t)e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} - a_\mathbf{q}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}\right] = \\
&= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_p}{4}\left(-a_\mathbf{p}(t)a_{-\mathbf{p}}(t) + a_\mathbf{p}(t)a_\mathbf{p}^\dagger(t) + a_\mathbf{p}^\dagger(t)a_\mathbf{p}(t) - a_\mathbf{p}^\dagger(t)a_{-\mathbf{p}}^\dagger(t)\right). \qquad (3.94)
\end{aligned}
$$

A második tagban kihasználjuk, hogy

$$
\partial_i\Phi(t,\mathbf{x}) = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}(i\mathbf{p})\left[a_\mathbf{p}(t)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} - a_\mathbf{p}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\right], \qquad (3.95)
$$

ezzel

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}(\partial_i\Phi(t,\mathbf{x}))^2 &= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}(-i)\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\mathbf{p}\left[a_\mathbf{p}(t)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} - a_\mathbf{p}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\right](-i)\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\mathbf{q}\left[a_\mathbf{q}(t)e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} - a_\mathbf{q}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}\right] = \\
&= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}^2}{4\omega_p}\left(a_\mathbf{p}(t)a_{-\mathbf{p}}(t) + a_\mathbf{p}(t)a_\mathbf{p}^\dagger(t) + a_\mathbf{p}^\dagger(t)a_\mathbf{p}(t) + a_\mathbf{p}^\dagger(t)a_{-\mathbf{p}}^\dagger(t)\right). \qquad (3.96)
\end{aligned}
$$

A harmadik tag

$$
\begin{aligned}
\int d^3\mathbf{x}\frac{m^2}{2}\Phi^2(t,\mathbf{x}) &= \frac{m^2}{2}\int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left[a_\mathbf{p}(t)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + a_\mathbf{p}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\right]\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left[a_\mathbf{q}(t)e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} + a_\mathbf{q}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}\right] = \\
&= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{4\omega_p}\left(a_\mathbf{p}(t)a_{-\mathbf{p}}(t) + a_\mathbf{p}(t)a_\mathbf{p}^\dagger(t) + a_\mathbf{p}^\dagger(t)a_\mathbf{p}(t) + a_\mathbf{p}^\dagger(t)a_{-\mathbf{p}}^\dagger(t)\right). \qquad (3.97)
\end{aligned}
$$

Összeadva a tagokat a Hamilton-operátor alakja

$$
H = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}\left[a_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger + a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}\right]. \qquad (3.98)
$$

Az első tagot átírjuk:

$$
\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}a_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}\left(a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + [a_\mathbf{p}, a_\mathbf{p}^\dagger]\right). \qquad (3.99)
$$

Az első tag már szerepelt; a második tag arányos az egységoperátorral, azaz nem számít, az energiaszint konstans eltolását jelenti.

Érdekesség azonban, hogy értéke végtelen $\Rightarrow$ a vákuum energiája végtelen. A vákuum energiája azonban nem mérhető, csak ha két rendszert hasonlítunk össze $\Rightarrow$ Casimir effektus: egy zárt, véges térfogatú rendszerben a vákuum energiája $\sim V$ $\Rightarrow$ a rendszer falaira erő hat! Ilyen erő mérhető; azonban a mérési eredmények másképp is értelmezhetőek $\sim$ nincs igazi zárt rendszer...

A vákuum energiasűrűségének abszolút értéke egy helyen számíthat: ált. rel.. Azonban minden ésszerű nagy energiás (UV) regularizáció esetén $\mathcal{O}(10^{100})$-szorosát kapjuk a valódi kozmológiai konstansnak $\Rightarrow$ mai napig rejtély

Térelméletben elhagyjuk a vákuumenergiát $\Rightarrow$ normálrendezés

$$
:H: = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\omega_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}. \qquad (3.100)
$$

Hasonló számolással a normálrendezett impulzus alakja

$$: \boldsymbol{P} := \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, \mathbf{p}\, a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \tag{3.101}$$

A jövőben elhagyjuk a normálrendezés jelét.

H már teljesen olyan mint (végtelen sok) független harmonikus oszcillátor összege $\Rightarrow$ meg tudjuk oldani:

- $\exists\, |0\rangle$ vákuum, amelyre $a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0\ \forall \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad H|0\rangle = 0, \qquad \boldsymbol{P}|0\rangle = 0.$
- Mivel a harmonikus oszcillátorok függetlenek, egy általános energia sajátállapot alakja

$$|p_1, n_1; \ldots p_i, n_i; \ldots\rangle \sim \prod_i \frac{(a^\dagger_{\mathbf{p}_i})^{n_i}}{\sqrt{n_i!}}\, |0\rangle\,, \qquad E_{\mathbf{p}_i} = \omega_{\mathbf{p}_i} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_i^2}, \tag{3.102}$$

  a normálást később rögzítjük még. Ez az állapot egyben impulzus sajátállapot is. A sajátértékek:

$$H\,|p_1, n_1; \ldots p_i, n_i; \ldots\rangle = \sum_i n_i E_{\mathbf{p}_i}\, |p_1, n_1; \ldots p_i, n_i; \ldots\rangle\,, \qquad \mathbf{P}\,|p_1, n_1; \ldots p_i, n_i; \ldots\rangle = \sum_i n_i \mathbf{p}_i\, |p_1, n_1; \ldots p_i, n_i; \ldots\rangle\,. \tag{3.103}$$

  Ez rendszer tehát egymástól független, $\mathbf{p}_1, \ldots \mathbf{p}_n \ldots$ impulzusú, m tömegű relativisztikus részecskék rendszerét írja le. A $\mathbf{p}$ impulzusú részecskék számát megadó operátor

$$N_{\mathbf{p}} = a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \quad \Rightarrow \quad N = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \tag{3.104}$$

  az összes részecske száma.

  Rögzítve az összes részecske számát a teljes Hilbert-tér felírható, mint fix részecskeszámú alrendszerek direkt összege

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \ldots \mathcal{H}_0 \oplus \ldots, \tag{3.105}$$

  ez a Fock-tér konstrukció.

- az egy részecske állapot $\sim a^\dagger_{\mathbf{p}} |0\rangle$. Hogyan normáljuk ezt az állapotot? Legyen a normálási faktor $N_{\mathbf{p}}$, azaz

$$|\mathbf{p}\rangle = N_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}} |0\rangle\,. \tag{3.106}$$

  Ekkor

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = N^*_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{q}} \left\langle 0 \left| a_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{q}} \right| 0 \right\rangle = (2\pi)^3 |N_{\mathbf{p}}|^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \tag{3.107}$$

  Mivel fázis nem számít, válasszuk $N_{\mathbf{p}}$-t valósnak. Az egy-részecske állapotokra való vetítés operátora emiatt:

$$\Pi_1 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{N^2_{\mathbf{p}}}\, |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|\,. \tag{3.108}$$

  Először határozzuk meg a térbeli hullámfüggvényt! Általában egy $|a\rangle$ állapot hullámfüggvénye QM-ban $\langle \mathbf{x}|a\rangle$, ahol $|\mathbf{x}\rangle$ a hely sajátállapot. Mivel $\boldsymbol{P}$ a hely-eltolás operátora, ezért írhatjuk:

$$|\mathbf{x}\rangle = e^{-i\mathbf{P}\mathbf{x}}\, |\mathbf{x} = 0\rangle \quad \Rightarrow \quad \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{x} = 0|\mathbf{p}\rangle\, e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \equiv \alpha_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \tag{3.109}$$

  Mivel

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = \int d^3\mathbf{x}\, \langle \mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}|\mathbf{q}\rangle = \alpha^*_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{q}} \int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x}} = (2\pi)^3 |\alpha_{\mathbf{p}}|^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\mathbf{p}} = N_{\mathbf{p}}. \tag{3.110}$$

  Egy ilyen síkhullám végtelen sok részecskét ír le; a QM alapján többféle normálást vezethetünk be:

– **doboz-normálás**: ekkor valamilyen "álló" rendszerből nézve V térfogatban van egy részecske

$$1 = \int\limits_V d^3\mathbf{x}\,|\Psi_{\mathbf{p}}(x)|^2 = N_{\mathbf{p}}^2 V \quad \Rightarrow \quad N_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{V}}. \tag{3.111}$$

– **áram-normálás**: ekkor $|\mathbf{p}\rangle$ egy egységnyi áramsűrűségű részecskenylábot ír le. Ha $\mathbf{j}$ az áramsűrűség, akkor t idő alatt A nagyságú, $\mathbf{j}$-re merőleges felületen Atj részecske halad át. A részecskék sebessége $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E_{\mathbf{p}}$ $\Rightarrow$ a felületen áthaladó Atj részecske $V = Atv$ térfogatban helyezkedik el $\Rightarrow$ 1 részecske $V = v/j = p/(E_p j)$ térfogatban van $\Rightarrow$ itt is térfogati normálást használhatunk:

$$N_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{V}} = \sqrt{\frac{E_p j}{p}}. \tag{3.112}$$

– **Lorentz-invariáns normálás**: azt szeretnénk, ha mozgó koordinátarendszerből Lorentz-invariáns megfigyelhető mennyiségek várható értékét ugyanakkorának látnánk $\Rightarrow$ $\langle\mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^2 N_p^2 \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ Lorentz-invariáns függvény legyen, azaz

$$\langle\mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = \langle\mathbf{p}'|\mathbf{q}'\rangle \quad \Rightarrow \quad N_p^2 \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = N_{p'}^2 \delta(\mathbf{p}'-\mathbf{q}'). \tag{3.113}$$

Lehet közvetlen módszerrel is megkeresni N_p^2 értékét, l. Appendix A.3. Az egyszerűsített módszernél először megkeressük a Lorentz-invariáns 3-as integrált. Ehhez:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, 2\pi\,\Theta(p_0)\delta(p^2-m^2) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int^{\infty} dp_0 \frac{1}{2E_p}\delta(p_0-E_p) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_p}. \tag{3.114}$$

Mivel az integrálási mérték és az integrandus is Lorentz-invariáns, ezért ez a kifejezés Lorentz-invariáns, vagyis a Lorentz-invariáns mérték $\sim d^3\mathbf{p}/E_p$. Ezekután

$$1 = \int d^3\mathbf{p}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_p}\, 2E_p\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{3.115}$$

Mivel az integrál értéke (1) Lorentz-invariáns, valamint a mérték Lorentz-invariáns, így $2E_p\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ is Lorentz-invariáns. Emiatt $N_p^2 = 2E_p$, így a fizikai normálás

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\; a_{\mathbf{p}}^\dagger\,|0\rangle\,. \tag{3.116}$$

- A téroperátor

$$\Phi(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,(a_{\mathbf{p}}(t) + a_{-\mathbf{p}}^\dagger(t))\,e^{i\mathbf{px}} \tag{3.117}$$

egy keltő és egy eltüntető operátort tartalmaz. A vákuumra hatva tehát egy részecske állapot lesz az eredmény

$$\Phi(\mathbf{x})\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger(t)\,e^{-i\mathbf{px}}\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{N_{\mathbf{p}}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,e^{-i\mathbf{px}}\,|\mathbf{p}\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\mathbf{p}|\Phi(\mathbf{x})|0\rangle = \frac{e^{-i\mathbf{px}}N_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}. \tag{3.118}$$

Relativisztikus normálással

$$\langle\mathbf{p}|\Phi(\mathbf{x})|0\rangle = e^{-i\mathbf{px}}. \tag{3.119}$$

Mivel $\Phi^\dagger = \Phi$, így

$$\langle 0|\Phi(\mathbf{x})|\mathbf{p}\rangle = e^{i\mathbf{px}}, \tag{3.120}$$

vagyis a $\mathbf{p}$ impulzusú egy-részecske állapotot el is tünteti $\Rightarrow$ Φ *egyszerre* kelt és eltüntet egy részecskét.

3.3.2 Klasszikus mező

Minek felel meg egy klasszikus, időben állandó mező? Megközelíthetjük úgy a kérdést, hogy a Klein-Gordon egyenletet módosítjuk olyan módon, hogy klasszikusan az időfüggetlen megoldás ne a nulla legyen. Vagyis a klasszikus mozgásegyenletet átírjuk $J(\mathbf{x})$ térfüggő mennyiséggel:

$$(\partial^2 + m^2)\Phi = J. \tag{3.121}$$

Ezt a rendszert két, egymással ekvivalens módon írhatom le. Egyrészt klasszikusan felírom úgy, mint az inhomogén rész partikuláris megoldása és a homogén rész általános megoldása összegeként:

$$\Phi(x) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \varphi(x), \qquad \Phi_0(\mathbf{p}) = \frac{J_\mathbf{p}}{\omega_\mathbf{p}^2}, \qquad (\partial^2 + m^2)\phi = 0. \tag{3.122}$$

Ezek után csak φ-t kvantálom, erre ugyanazok a formulák vonatkoznak, mint korábban. A φ vákuumállapota a Φ szempontjából mint klasszikus Φ_0 mező jelenik meg.

A másik lehetőség, hogy egyben kezelve a rendszert a Φ-t kvantálom. Ekkor a Lagrange- és Hamilton-függvény alakja

$$L = \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) - \frac{m^2}{2}\Phi^2 + J\Phi\right), \qquad H = \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{m^2}{2}\Phi^2 - J\Phi\right). \tag{3.123}$$

Ugyanúgy bevezetve a keltő- eltüntető operátorokat mint korábban, a J-t tartalmazó tag:

$$-\int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \left(a_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) + a_\mathbf{p}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} J(\mathbf{x})\right) = -\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \left(a_p J_\mathbf{p}^* + a_\mathbf{p}^\dagger J_\mathbf{p}\right). \tag{3.124}$$

A teljes Hamilton-operátor tehát:

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\omega_\mathbf{p} a_p^\dagger a_p - a_p \frac{J_\mathbf{p}^*}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} - a_\mathbf{p}^\dagger \frac{J_\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}}\right). \tag{3.125}$$

Bevezetve

$$\eta_\mathbf{p} = \frac{2J_\mathbf{p}}{(2\omega_\mathbf{p})^{3/2}} \qquad b_p = a_p - \eta_\mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\omega_\mathbf{p} b_p^\dagger b_p + |\eta_\mathbf{p}|^2\right). \tag{3.126}$$

A legalacsonyabb energiás állapotra

$$b_\mathbf{p}|\tilde{0}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad a_\mathbf{p}|\tilde{0}\rangle = \eta_\mathbf{p}|\tilde{0}\rangle, \tag{3.127}$$

ez tehát a-k sajátállapotai. Ezeket hívjuk koherens állapotoknak. Egy adott impulzus esetén a normált koherens állapot

$$a\,|\eta\rangle = \eta\,|\eta\rangle \quad \Rightarrow \quad |\eta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} e^{\eta a^\dagger}\,|0\rangle, \tag{3.128}$$

a teljes koherens állapot ezek direkt szorzata, azaz

$$|\tilde{0}\rangle = \exp\left(\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(-\frac{1}{2}|\eta_\mathbf{p}|^2 + \eta_\mathbf{p} a_p^\dagger\right)\right)|0\rangle, \qquad \eta_\mathbf{p} = \sqrt{\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}}\,\Phi_\mathbf{p}. \tag{3.129}$$

A klasszikus mező tehát a részecskék szempontjából egy koherens állapotnak felel meg, ahol az n-részecske állapot megfigyelésének valószínűsége $|\langle\eta|n\rangle|^2 = e^{-|\eta|^2}|\eta|^{2n}/n!$ Poisson-eloszlást mutat minden impulzusra.

3.3.3 Időfüggés

Az időeltolás generátora H, azaz a Heisenberg-képbeli operátorokra

$$\dot{a}_\mathbf{p} = i[H, a_\mathbf{p}] = i\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} E_q [a_\mathbf{q}^\dagger a_\mathbf{q}, a_\mathbf{p}] = -iE_p a_\mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad a_\mathbf{p}(t) = e^{-iE_p t} a_\mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad a_\mathbf{p}^\dagger(t) = e^{iE_p t} a_\mathbf{p}^\dagger. \tag{3.130}$$

A téroperátor időfejlődése, kis átrendezés után

$$\Phi(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(e^{i\mathbf{px}}a_{\mathbf{p}}(t) + e^{-i\mathbf{px}}a^\dagger_{\mathbf{p}}(t)\right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(e^{-ipx}a_{\mathbf{p}} + e^{ipx}a^\dagger_{\mathbf{p}}\right), \qquad \text{ahol} \qquad p_0 = E_p. \tag{3.131}$$

Emiatt Φ kielégíti a klasszikus mozgásegyenletet

$$(\partial^2 + m^2)\,\Phi(x) = 0. \tag{3.132}$$

Schrödinger képben az állapotok időfejlődése:

$$\partial_t\,|\mathbf{p}\rangle = -iH\,|\mathbf{p}\rangle = -iE_p\,|\mathbf{p}\rangle \quad \Rightarrow \quad |t,\mathbf{p}\rangle = e^{-iE_{\mathbf{p}}t}\,|\mathbf{p}\rangle\,. \tag{3.133}$$

3.3.4 Korrelátorok

Az időfüggés ismeretében időben elválasztott események korrelációját vizsgálhatjuk.

Δ propagátor

A legegyszerűbb korrelátor

$$\langle 0|\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}\,\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_q}}\,\left\langle 0\,\middle|\left(e^{-ipx}a_{\mathbf{p}} + e^{ipx}a^\dagger_{\mathbf{p}}\right)\left(e^{-iqy}a_{\mathbf{q}} + e^{iqy}a^\dagger_{\mathbf{q}}\right)\middle|\,0\right\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\,2E_p}\,e^{-ip(x-y)}. \tag{3.134}$$

Ez csak $x-y$ függvénye (vákuum eltolás-invariáns!); jelöljük $i\Delta(x-y)$-nal. Fourier transzformáltjához a 4D Fourier transzformált definíciója

$$f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ipx}\,f(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-i(p_0x_0-\mathbf{px}}\,f(p), \qquad f(p) = \int d^4x\,e^{ipx}\,f(x). \tag{3.135}$$

Felhasználva, hogy

$$\delta(p^2-m^2) = \frac{1}{2E_p}\left(\delta(p_0-E_p) + \delta(p_0+E_p)\right), \tag{3.136}$$

átírható $i\Delta$:

$$i\Delta(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\Theta(p_0)\,2\pi\,\delta(p^2-m^2)\,e^{-ip(x-y)} \quad \Rightarrow \quad i\Delta(p) = \Theta(p_0)\,2\pi\,\delta(p^2-m^2). \tag{3.137}$$

Ez expliciten relativisztikusan invariáns $\Rightarrow$ $i\Delta(x)$ is rel. invariáns.

Másképp kiszámolva: Φ a vákuumból egy részecske állapotokba képez, vagyis közbeszúrhatunk egy teljes egy-részecske állapot rendszert. Általánosan energia-impulzus sajátállapotokat közbeszúrva, Heisenberg képben, véges térfogatban, térfogati normálást használva:

$$\begin{aligned}\langle 0|\Phi(x)\Phi(0)|0\rangle &= \sum_{E,\mathbf{p}} \langle 0|\Phi(x)|E,\mathbf{p}\rangle\,\langle E,\mathbf{p}|\Phi(0)|0\rangle = \sum_{E,\mathbf{p}} \left\langle 0|e^{iHt+i\mathbf{Px}}\Phi(0)e^{-iHt-i\mathbf{Px}}|E,\mathbf{p}\right\rangle_V \langle E,\mathbf{p}|\Phi(0)|0\rangle_V \\ &= \sum_{E,\mathbf{p}} |\,\langle 0|\Phi(0)|E,\mathbf{p}\rangle_V\,|^2\,e^{-ipx}.\end{aligned} \tag{3.138}$$

Áttérve fizikai normálásra

$$|\,\langle 0|\Phi(0)|E,\mathbf{p}\rangle_V\,|^2 = \frac{1}{V}|\left\langle 0|\Phi(0)a^\dagger_p|0\right\rangle_V|^2 = \frac{1}{2E_pV}|\,\langle 0|\Phi(0)|E,\mathbf{p}\rangle\,|^2. \tag{3.139}$$

Áttérve végtelen térfogatra a szummákból integrál lesz: mivel $\Delta p = 2\pi/L$, ezért

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \tag{3.140}$$

Ezért

$$\Delta(x) = \sum_E \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \,|\, \langle 0|\Phi(0)|E,\mathbf{p}\rangle \,|^2\, e^{-ipx}. \tag{3.141}$$

A Fourier transzformáció után

$$\Delta(p) = \Theta(p_0) \sum_E 2\pi\delta(p_0^2 - E^2)|\, \langle 0|\Phi(0)|p\rangle \,|^2. \tag{3.142}$$

azaz $i\Delta(p)$ ott nem 0, ahol létezik p_0 energiájú $\mathbf{p}$impulzusú állapot $\Rightarrow$ folytonos esetben az állapotsűrűséggel arányos.

A szabad esetben $E^2 = E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, és $\langle 0|\Phi(0)|\mathbf{p}\rangle = 1$, így visszakapjuk a korábbi eredményeket.

A $\delta(p^2 - m^2)$ függés miatt

$$(p^2 - m^2)\, i\Delta(p) = 0; \tag{3.143}$$

ez onnan is jön, hogy $(\partial^2 + m^2)\Phi = 0$.

Spektrálfüggvény

A spektrálfüggvény definíciója

$$\varrho(x-y) = \langle[\Phi(x), \Phi(y)]\rangle = i\Delta(x-y) - i\Delta(y-x) \quad \Rightarrow \quad \varrho(x) = i\Delta(x) - i\Delta(-x). \tag{3.144}$$

Mivel Δ Lorentz-invariáns volt, ezért ϱ is az. Ahol tehát az $x \to -x$ csere folytonos transzformációkkal elvégezhető, ott $\varrho(x) = 0$. Ezek a *térszerű* négyesvektorok; az időszerű vektoroknál ugyanis $\mathrm{sgn}(x_0)$ nem változhat folytonos trf-ra! $\Rightarrow$ ϱ csak az időszerű tartományokban nem nulla.

Értelmezés: az x és y téridő-pontokban keltett részecskék befolyásolhatják-e egymást? $\Rightarrow$ kauzalitás.

A Fourier-transzformáltakra felhasználjuk, hogy

$$f_-(x) := f(-x) \quad \Rightarrow \quad f_-(k) = \int d^4x\, e^{ikx} f(-x) = \int d^4x\, e^{-ikx} f(x) = f(-k). \tag{3.145}$$

Emiatt

$$\varrho(p) = i\Delta(p) - i\Delta(-p) = (2\pi)\ \mathrm{sgn}(p_0)\, \delta(p^2 - m^2). \tag{3.146}$$

Retardált Green-függvény

def.:

$$iG_R(x) = \Theta(t)\varrho(x). \tag{3.147}$$

Ezért G_R csak az jövőbeli fénykúp belsejében nem 0 $\Rightarrow$ kauzális

Fourier transzformált alakjához: t-ben szorzat a valós térben $\Rightarrow$ konvolúció a Fourier térben. Mi lesz $\Theta(t)$ Fourier transzformáltja?

Tétel:

$$\Theta(\omega) = \frac{i}{\omega + i\varepsilon}, \qquad \varepsilon \to 0^+. \tag{3.148}$$

Bizonyítás.: Az inverz transzformációra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i}{\omega + i\varepsilon}\, e^{-i\omega t} = ?. \tag{3.149}$$

Az integrandusnak pólusa van $\omega = -i\varepsilon$-nál.

Ha $t > 0$, akkor a negatív imaginárius részű komplex ω síkon $\omega = \omega_R - i\zeta$, ezért

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_R t - \zeta t}, \tag{3.150}$$

azaz nagy t-re explonenciálisan lecseng $\Rightarrow$ bezárhatom a kontúrt alul. A Cauchy tétel miatt a $2\pi i\times$ reziduumot csípem fel a pólus helyén, -1 a körbejárás irány miatt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega t} = -2\pi i \frac{i}{2\pi} e^{-\varepsilon t} \to 1. \tag{3.151}$$

Ha $t < 0$, akkor ugynezzel a gondolatmenettel felül zárhatom be a kontúrt, ahol azonban nincs pólus $\Rightarrow$ ott az integrál 0. QED.

Emiatt a retardált Green-függvény Fourier-térbeli alakja

$$G_R(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varrho(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega + i\varepsilon}. \tag{3.152}$$

Véve ennek az imaginárius részét, felhasználva, hogy

$$\operatorname{Im} \frac{1}{k_0 - \omega + i\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{(k_0 - \omega)^2 + \varepsilon^2} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} -\pi\delta(k_0 - \omega), \tag{3.153}$$

kapjuk

$$\operatorname{Im} G_R(k) = -\frac{1}{2}\varrho(k). \tag{3.154}$$

Vagyis a retardált Green függvény eleget tesz a Kramers-Krönig összefüggésnek.

Klein-Gordon esetben

$$\begin{aligned} G_R(k) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2\pi}{2E_k} \left(\delta(\omega - E_k) - \delta(\omega + E_k)\right) \frac{1}{k_0 - \omega + i\varepsilon} = \frac{1}{2E_k} \left[\frac{1}{k_0 - E_k + i\varepsilon} - \frac{1}{k_0 + E_k + i\varepsilon}\right] = \\ &= \frac{1}{(k_0 + i\varepsilon)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2} = \frac{1}{k^2 - m^2}\bigg|_{k_0 \to k_0 + i\varepsilon} = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon \operatorname{sgn} k_0}. \end{aligned} \tag{3.155}$$

Az utolsó kifejezésnél felhasználtuk, hogy $\varepsilon \to 0^+$, vagyis az őt szorzó függvénynek csak az előjele számít. Hogy a retardált Green-függvényeket k_0 imaginárius eltolásával kell értelmezni, Landau előírásnak is hívják.

A Fourier alakból következik, hogy $(p^2 + m^2)G_R(p) = 1$, azaz

$$(\partial^2 - m^2)\, G_R(x) = -\delta(x - y). \tag{3.156}$$

Az ilyen tulajdonságú függvényeket hívják Green-függvénynek. Ezzel ugyanis megoldható az inhomogén mozgásegyenlet

$$(\partial^2 - m^2)\, f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = f_0(x) - \int d^4y\, G_R(x - y)\, g(y), \tag{3.157}$$

ahol $(\partial^2 - m^2)f_0 = 0$ a homogén rész általános megoldása. A fenti megoldás automatikusan csak az $x_0 > y_0$ feltételt kielégítő $g(y)$ értékeket veszi figyelembe $\Rightarrow$ retardált.

Feynman propagátor

def.:

$$iG_F(x) = \Theta(t)\, \langle 0|\Phi(x)\Phi(0)|0\rangle + \Theta(-t)\, \langle 0|\Phi(0)\Phi(x)|0\rangle = \Theta(t)\Delta(x) + \Theta(-t)\Delta(-x). \tag{3.158}$$

A Fourier térbeli alakjához

$$(\Theta\Delta)(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2\pi}{2E_k} \delta(\omega - E_k) \frac{1}{k_0 - \omega + i\varepsilon} = \frac{1}{2E_k} \frac{1}{k_0 - E_k + i\varepsilon}. \tag{3.159}$$

Innen

$$G_F(k) = (\Theta\Delta)(k) + (\Theta\Delta)(-k) = \frac{1}{2E_k} \left[\frac{1}{k_0 - E_k + i\varepsilon} + \frac{1}{-k_0 - E_k + i\varepsilon}\right] = \frac{1}{2E_k} \frac{-2E_k + 2i\varepsilon}{(E_k - i\varepsilon)^2 - k_0^2}. \tag{3.160}$$

Mivel $\varepsilon \to 0^+$, ezért a fenti kifejezés egyenértékű a következővel

$$G_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{3.161}$$

3.4 Fermionok

A valóságban a skalár részecskék mellett spinnel rendelkező részecskék is előfordulnak. Mi a relativisztikus kvantumtérelméletben a spin, és hogyan kell az ilyen részecskéket reprezentálni?

Egy tetszőleges mező $\Psi : M \to V$, ezen egy transzformáció (pl. Lorentz-csoport) hatása $(R\Psi)(x) = R_V \Psi(R_M^{-1}x)$. Egymás utáni transzformációk esetén $R_1 R_2 = R_3$ kell

$$(R_1R_2\Psi)(x) = R_{1V}(R_2\Psi)(R_{1M}^{-1}x) = R_{1V}R_{2V}\Psi(R_{2M}^{-1}R_{1M}^{-1}x) = R_{1V}R_{2V}\Psi((R_{1M}R_{2M})^{-1}x) = R_{3V}\Psi(R_{3M}^{-1}x), \tag{3.162}$$

azaz $R_{1V}R_{2V} = R_{3V}$, vagyis a csoport hatása ábrázolódik a vektrotéren. Multiplettek, ahogy korábban láttuk, az irreducibilis ábrázolásból jönnek.

Keressük tehát meg a Lorentz csoport irreducibilis ábrázolásait!

3.4.1 A Lorentz csoport spinor ábrázolásai

A Lorentz csoport definíciója: olyan $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképzések, amelyek $x \mapsto x'$ transzformáció után a négyes hosszt invariánsan hagyják: $(x')^2 = x^2$. Mint szó olt róla, ez a csoport 6 valós paramétert tartalmaz.

Lorentz csoport leképezése 2D mátrixokra

Végezzünk el egy leképzést a Minkowski térről a 2×2 hermitikus komplex mártixok terére

$$x \mapsto x^\mu \sigma_\mu, \qquad \sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x^\mu\sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \tag{3.163}$$

A Pauli-mátrixok teljesítik a $\operatorname{Tr}\sigma_\mu\sigma_\nu = 2\delta_{\mu\nu}$ összefüggést.

Mivel $\det x^\mu\sigma_\mu = x^2$, éppen az x négyes hossza, ezért a Lorentz csoport azonosítható azon $H \to H$ 2D hermitikus mátrixot hermitikus mátrixba leképező lineáris transzformációk csoportjával, amelyek a mátrix determinánsát invariánsan hagyják.

Vegyük az alábbi leképzést: L legyen 2×2-es egységnyi determinánsú mátrix, ezzel A hermitikus mátrixra úgy hatunk, mint

$$A \mapsto LAL^\dagger. \tag{3.164}$$

A jobb oldal nyilvánvalóan hermitikus, és, mivel $\det L = 1$, determinánsa is 1. Ezért minden $x \in \mathbf{M}$ elemhez létezik olyan $x' \in \mathbf{M}$, hogy

$$L(x^\mu\sigma_\mu)L^\dagger = x'^\nu\sigma_\nu, \tag{3.165}$$

és $x^2 = x'^2$. Vagyis L egy Lorentz csoport hatást valósít meg. Jelöljük ezt a transzformációt Λ-val, azaz $x'^\nu = \Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}x^\mu$. Ezzel

$$x^\mu L\sigma_\mu L^\dagger = x^\mu\Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}\sigma_\nu \quad \Rightarrow \quad L\sigma_\mu L^\dagger = \Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}\sigma_\nu, \qquad \text{valamint} \quad \Lambda^\mu_\varrho\sigma_\mu = L^{-1}\sigma_\nu(L^{-1})^\dagger. \tag{3.166}$$

Mivel $\operatorname{Tr}\sigma_\mu\sigma_\nu = 2\delta_{\mu\nu}$, ezért

$$\Lambda^\nu_{\cdot\,\mu} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\sigma_\nu L\sigma_\mu L^\dagger. \tag{3.167}$$

Látható, hogy L-hez és $-L$-hez ugyanaz a Lorentz trf. tartozik.

L-ek csoportot alkotnak, az egységnyi determinánsú 2×2 komplex mátrixok csoportját, azaz $SL(2,\mathbf{C})$-t.

Ha L_1-hez Λ_1, L_2-höz Λ_2 tartozik, akkor mi tartozik L_1^{-1}-hez, illetve L_1L_2-höz?

$$\begin{aligned} &\sigma_\mu = \Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}L^{-1}\sigma_\nu L^{\dagger\,-1} \quad \Rightarrow \quad L^{-1} \mapsto \Lambda^{-1} \\ &L_1L_2\sigma_\mu(L_1L_2)^\dagger = L_1\Lambda_2{}^\nu_{\cdot\,\mu}\sigma_\nu L_1^\dagger = \Lambda_2{}^\nu_{\cdot\,\mu}\Lambda_1{}^\varrho_{\cdot\,\nu}\sigma_\varrho = (\Lambda_1\Lambda_2)^\varrho_{\cdot\,\mu}\sigma_\varrho \quad \Rightarrow \quad L_1L_2 \mapsto \Lambda_1\Lambda_2. \end{aligned} \tag{3.168}$$

Ezenfelül $1 \mapsto 1$. Ezért L-ek csoportja, $SL(2,\mathbf{C})$ ábrázolása a Lorentz csoportnak.

Minden x' elérhető így? Induljunk ki $x = (1,0,0,0)$-ból, erre $x^\mu\sigma_\mu = 1$ és $Lx^\mu\sigma_\mu L^\dagger = LL^\dagger = x'^\mu\sigma_\mu$ valamilyen hermitikus mátrix. Ennek sajátértékeire

$$LL^\dagger\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mathbf{v}^\dagger LL^\dagger\mathbf{v} = (L^\dagger\mathbf{v})^2 > 0. \tag{3.169}$$

Mivel $x^\mu\sigma_\mu$ sajátértékei $x^0 \pm |\mathbf{x}|$, ez azt jelenti, hogy $x^0 > 0$ és $x^0 > |\mathbf{x}|$, vagyis x a pozitív fénykúpban van. Tehát L csak olyan Lorentz transzformációkat tud leírni, amely a pozitív fénykúpot önmagába képezi, azaz $\mathcal{L}^{++}$.

Mindez azt jelenti, hogy $SL(2,\mathbf{C})$ kétszeresen lefedi $\mathcal{L}^{++}$-t.

L paraméterezése

Minden mátrix felírható úgy, mint $M = e^{\ln M}$. Mivel a 2×2-es mátrixok terében σ_μ bázist alkot, ezért $\ln M$ felírható ezek segítségével. Azaz minden 2D komplex mátrix úgy írható, mint

$$M = e^{-\frac{i}{2}(\omega^\mu + iu^\mu)\sigma_\mu}, \tag{3.170}$$

ez nyolc paraméter. M determinánsa

$$\det M = e^{\operatorname{Tr}\ln M} = e^{-\frac{i}{2}(\omega^\mu+iu^\mu)\operatorname{Tr}\sigma_\mu} = e^{-i(\omega^0+iu^0)} \tag{3.171}$$

Azaz ha megköveteljük, hogy $\det L = 1$ legyen, akkor $\omega^0 = u^0 = 0$. Vagyis L kifejezhető, mint

$$L = e^{-\frac{i}{2}(\omega^i+iu^i)\sigma_i}, \tag{3.172}$$

itt már csak a Pauli mátrixok jönnek be. Ez 6 paramétert jelent, ahogyan a Lorentz csoporttal való homomorfizmusból vártuk is.

Milyen Lorentz-transzformáció tartozik az egyes paraméterekhez?

- ha $\omega_3 \neq 0$, a többi paraméter nulla, akkor

$$L = e^{-\frac{i}{2}\omega\sigma_3} = \sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{-i\omega}{2}\right)^n \sigma_3^n = \sum_{n\,\mathrm{ps.}} \frac{1}{n!}\left(\frac{-i\omega}{2}\right)^n + \sigma_3 \sum_{n\,\mathrm{prtl.}} \frac{1}{n!}\left(\frac{-i\omega}{2}\right)^n = \cos\frac{\omega}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\omega}{2}. \tag{3.173}$$

  Ezért

$$L\sigma_\mu L^\dagger = (\cos\frac{\omega}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\omega}{2})\sigma_\mu(\cos\frac{\omega}{2} + i\sigma_3\sin\frac{\omega}{2}) = \sigma_\mu\cos^2\frac{\omega}{2} + \sigma_3\sigma_\mu\sigma_3\sin^2\frac{\omega}{2} + i\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}[\sigma_\mu,\sigma_3] = \Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}\sigma_\nu. \tag{3.174}$$

  Innen $\Lambda^\nu_0 = \delta^\nu_0$, $\Lambda^\nu_3 = \delta^\nu_3$, az 1-2 esetben pedig

$$\Lambda^i_{\cdot\,j} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, \tag{3.175}$$

  azaz egy xy síkban történő ω szögű forgatásnak felel meg.

- ha $u_3 \neq 0$, a többi paraméter nulla, akkor

$$L = e^{\frac{1}{2}u\sigma_3} = \cosh\frac{u}{2} + \sigma_3\sinh\frac{u}{2}. \tag{3.176}$$

  Ezért

$$L\sigma_\mu L^\dagger = \sigma_\mu\cosh^2\frac{u}{2} + \sigma_3\sigma_\mu\sigma_3\sinh^2\frac{u}{2} + \sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{u}{2}\{\sigma_\mu,\sigma_3\} = \Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}\sigma_\nu. \tag{3.177}$$

  Mivel $\{\sigma_i,\sigma_j\} = 2\delta_{ij}$, ezért $\Lambda^i_{\cdot\,j} = \delta^i_j$, ha $i,j \neq 3$. A 0-3 szektorban pedig

$$\Lambda^i_{\cdot\,j} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}, \tag{3.178}$$

  azaz egy z irányú $\eta = u$ rapiditású boost. Ez a mátrix nem unitér!

A spinorok

A Lorentz csoportnak tehát megtaláltuk egy 2D árázolását. Az alaptér elemeit $\Psi \in \mathbf{C}^2$ spinoroknak nevezzük (Weyl-spinorok) $\Rightarrow$ két komponensű, $\Psi = (\Psi^1, \Psi^2) \equiv \Psi^\alpha$.

A spinorok transzformációjára több választásunk van: ha ugyanis L ábrázolás, akkor ábrázolás még $L^*, L^{T\,-1}$ és $L^{\dagger\,-1}$ is. 2×2-es egységnyi determinánsú mátrixoknál $L^{T\,-1}$ és L unitér ekvivalensek, mert:

$$\varepsilon_{ij} \det L = \varepsilon_{i'j'} L_{ii'} L_{jj'} \quad \Rightarrow \quad (i\varepsilon)^\dagger_{ki} L_{ii'} (i\varepsilon)_{i'j'} L^T_{j'j} = \delta_{kj} \quad \Rightarrow \quad L^{T\,-1} = (i\varepsilon)^\dagger L (i\varepsilon), \tag{3.179}$$

hiszen $(i\varepsilon)^\dagger = (i\varepsilon)^{-1} = (i\varepsilon)$, unitér mátrix. Így két választásunk van: L vagy $L^{\dagger\,-1}$.

Az első esetben Lorentz-csoport hatására

$$\Psi'_R = L\Psi_R = e^{-\frac{i}{2}(\omega^i + iu^i)\sigma_i} \Psi_R. \tag{3.180}$$

Láthatóan boost hatására nem marad meg a hullámfüggvény normája, hiszen $\exp(u/2\sigma)$ nem unitér. Mi történik ekkor? Ehhez vizsgáljuk meg $\Psi^*_R \sigma_\mu \Psi_R$ transzformációját.

$$(\Psi^*_R \sigma_\mu \Psi_R)' = \Psi^*_R L^\dagger \sigma_\mu L \Psi_R. \tag{3.181}$$

Mivel σ_μ bázist alkot, $L^\dagger \sigma_\mu L$ kifejthető mint

$$L^\dagger \sigma_\mu L = f_{\mu\nu} \sigma_\nu \quad \Rightarrow \quad f_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sigma_\nu L^\dagger \sigma_\mu L = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sigma_\mu L \sigma_\nu L^\dagger = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu}. \tag{3.182}$$

Ezért tehát $\Psi^*_R \sigma_\mu \Psi_R$ úgy transzformálódik, mint egy *kontravariáns* négyesvektor. Bevezetve

$$j^\mu_R := \Psi^*_R \sigma_\mu \Psi_R \equiv \Psi^*_R \bar{\sigma}^\mu \Psi_R \quad \Rightarrow \quad j'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu} j^\nu, \tag{3.183}$$

ahol bevezettük a $\bar{\sigma}^\mu = \sigma_\mu$ jelölést. Tehát valóban kisebb lesz $|\Psi_R|^2$, azonban ez azért van, mert a sűrűség egy négyesvektor első komponense.

A másik lehetőség, hogy Ψ úgy transzformálódik, hogy

$$\Psi'_L = L^{\dagger -1} \Psi_L = e^{-\frac{i}{2}(\omega^i - iu^i)\sigma_i} \Psi_L. \tag{3.184}$$

Ebben az esetben $\Psi^*_L \sigma_\mu \Psi_L$ transzformációja, felhasználva (3.166)-t:

$$(\Psi^*_L \sigma_\mu \Psi_L)' = \Psi^*_L L^{-1} \sigma_\mu (L^{-1})^\dagger \Psi_L = \Lambda_{\mu}^{\cdot\,\nu} \Psi^*_L \sigma_\nu \Psi_L. \tag{3.185}$$

Ekkor tehát $\Psi^*_L \sigma_\mu \Psi_L$ úgy transzformálódik, mint egy *kovariáns* négyesvektor. Ebben az esetben tehát

$$j^\mu_L = \Psi^*_L \sigma^\mu \Psi_L \quad \Rightarrow \quad j'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu} j^\nu. \tag{3.186}$$

3.4.2 Tértükrözés

Legyen P a tértükrözést jellemző operátor $\mathbf{C}^2$-n, azaz a tértükrözött spinor $P\Psi$. Tértükrözés hatására $\omega \to \omega$ (a szögsebesség vektor nem vált irányt) és $u \to -u$ (a sebesség irányt vált). Például ha egy adott Ψ_R transzformációja L-lel ment ω és u paraméterekkel, akkor $P\Psi_R$ transzformációja ugyanazzal az L-lel megy, csak ω és $-u$ paraméterekkel. Mivel

$$L(\omega, -u) = e^{-\frac{i}{2}(\omega^i - iu^i)\sigma_i} = L(\omega, u)^{\dagger\,-1}, \tag{3.187}$$

ezért a tértükrözés a fent tárgyalt két ábrázolás közt vált: $P\Psi_R = \Psi_L$. Innen az elnevezés is Ψ_R balkezes, Ψ_L jobbkezes spinorok, a tükrözés a jobbkezest a balkezesbe viszi.

Mivel Ψ_L és $P\Psi_L$ különbözőképpen transzformálódnak, ezért különböző vektorterek elemi kell legyenek. Ha a tükrözés megvalósul a rendszerben (azaz létezik tükrözött állapot), akkor csak a Ψ_R-k és $P\Psi_R$-k együttes terén lehet értelmezni $\Rightarrow$ $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ tér kell. Ez már 4D, elemeit *bispinoroknak* nevezzük:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.188}$$

A Ψ Lorentz transzformációja

$$\Psi' = \hat{L}\Psi \qquad \hat{L} = \begin{pmatrix} L^{\dagger\,-1} & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\omega^i - iu^i)\sigma_i} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\omega^i + iu^i)\sigma_i} \end{pmatrix}. \tag{3.189}$$

Ezt a felírást nevezik Weyl-bázisnak. Áttérhetünk más reprezentációra:

$$\Psi_{u/v} = \frac{\Psi_R \pm \Psi_L}{\sqrt{2}}, \qquad \Psi_D = \begin{pmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Psi \equiv K\Psi, \qquad P_D = KPK^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.190}$$

a Dirac-bázis.

3.4.3 Lagrange függvény

A Lorentz csoport akkor szimmetriája egy dinamikai rendszernek, ha a hatásfüggvény invariáns marad a csoport hatása alatt. Most a spinorokból (bispinorokból) képzett hullámfüggvényekre akarunk felírni Lagrange függvényt. Erre igaz kell legyen $S[\Psi] = S[\Psi']$, ahol a transzformált tér

$$\Psi'(x) = L\Psi(\Lambda^{-1}x). \tag{3.191}$$

Milyen tagokat tartalmazhat a hatásfüggvény?

Ha a hatásfüggvényt úgy írjuk fel, mint

$$S[\Psi] = \int d^4x\, \mathcal{L}(\partial_\mu \Psi(x), \Psi(x)) \quad \Rightarrow \quad S[\Psi'] = \int d^4x\, \mathcal{L}(\partial_\mu L\Psi(\Lambda^{-1}x), L\Psi(\Lambda^{-1}x)) \tag{3.192}$$

Áttérve $x' = \Lambda^{-1}x$, a derivált úgy transzformálódik, mint $\partial_\mu \to \Lambda_\mu^{\cdot\nu}\partial_\nu$, és így

$$S[\Psi'] = \int d^4x'\, \mathcal{L}(\Lambda_\mu^{\cdot\nu}\partial_\nu L\Psi(x'), L\Psi(x')). \tag{3.193}$$

Ez akkor azonos $S[\Psi]$-vel, ha

$$\mathcal{L}(\partial_\mu \Psi(x), \Psi(x)) = \mathcal{L}(\Lambda_\mu^{\cdot\nu}\partial_\nu L\Psi(x'), L\Psi(x')). \tag{3.194}$$

Láttuk, hogy $\Psi_L^* \sigma^\mu \Psi_L$ és $\Psi_R^* \bar{\sigma}^\mu \Psi_R$ kontravariáns négyesvektor. Emiatt

$$\begin{aligned} (\Psi_L^* \sigma^\mu \partial_\mu \Psi_L)' &= \Lambda_{\cdot\nu}^{\mu} \Lambda_\mu^{\cdot\varrho} (\Psi_L^* \sigma^\nu \partial_\varrho \Psi_L) = \Psi_L^* \sigma^\mu \partial_\mu \Psi_L \\ (\Psi_R^* \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_R)' &= \Lambda_{\cdot\nu}^{\mu} \Lambda_\mu^{\cdot\varrho} (\Psi_R^* \bar{\sigma}^\nu \partial_\varrho \Psi_R) = \Psi_R^* \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_R \end{aligned} \tag{3.195}$$

invariáns kombinációk $\Rightarrow$ jöhetnek a Lagrange függvénybe! A két tag tetszőleges együtthatóval jöhet, de megfelelő normálással írhatjuk

$$\mathcal{L} = \Psi_L^* \sigma^\mu i\partial_\mu \Psi_L + \Psi_R^* \bar{\sigma}^\mu i\partial_\mu \Psi_R = {}^{(\Psi_L^*,\ \Psi_R^*)} \begin{pmatrix} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} i\partial_\mu \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}. \tag{3.196}$$

Bevezetjük a Dirac-féle gamma mátrixokat és Dirac-adjungáltat:

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0, \qquad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.197}$$

illetve Dirac-bázisban

$$\gamma_D^\mu = K\gamma_\mu K^{-1} \quad \Rightarrow \quad \gamma_D^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_D^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.198}$$

Bármely bázisban igaz

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{3.199}$$

Szokás még bevezetni

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_{D5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \qquad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{3.200}$$

Ezzel a fenti Lagrange függvény írható mint

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu\Psi = \bar{\Psi}i\partial\!\!\!/\Psi. \tag{3.201}$$

A másik kvadratikus lehetőség összeköti a bal és jobbkezes spinorokat

$$\Psi_R^*\Psi_L \quad \Rightarrow \quad (\Psi_R^*\Psi_L)' = \Psi_R^* L^{-1} L\Psi_L = \Psi_R^*\Psi_L, \tag{3.202}$$

vagyis invariáns. A Lagrange függvény valós kell legyen, ezért a lehetséges tag

$$\Psi_R^*\Psi_L + \Psi_L^*\Psi_R = (\Psi_L^*,\ \Psi_R^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = \Psi^\dagger\gamma_0\Psi = \bar{\Psi}\Psi. \tag{3.203}$$

Ez a tag azonban csak akkor lehetséges, ha mind a bal, mind a jobbkezes fermion létezik. Ha csak a balkezes létezik (pl. neutrinó), akkor ilyen tagot nem lehet konstruálni $\Rightarrow$ nulla tömegű részecske (l. később).

A szokásos kvadratikus Lagrange-függvény tehát

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}i\partial\!\!\!/\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \tag{3.204}$$

a Dirac-féle Lagrange-függvény. Az ebből származó mozgásegyenlet a

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\Psi}} = 0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = (i\partial\!\!\!/ - m)\Psi, \tag{3.205}$$

a Dirac-egyenlet.

Még nézzük meg, hogyan transzformálódik $\bar{\Psi}$

$$\bar{\Psi}' = (\Psi')^*\gamma_0 = \Psi^*\hat{L}^\dagger\gamma_0 = \bar{\Psi}\hat{L}^{-1}, \qquad \text{mert} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^\dagger & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix} = \hat{L}^{-1}. \tag{3.206}$$

Megállapíthatjuk a γ^μ transzformćióját is. Mivel

$$\hat{L}^\dagger \begin{pmatrix} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \hat{L} = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu} \begin{pmatrix} \sigma^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\nu \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{L}^\dagger\gamma_0\gamma^\mu\hat{L} = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu}\gamma_0\gamma^\nu \quad \Rightarrow \quad \hat{L}^{-1}\gamma^\mu\hat{L} = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu}\gamma^\mu. \tag{3.207}$$

azaz γ^μ kontravarians negyesvektor-operátor.

3.4.4 A Dirac egyenlet kvantálása és a spin-statisztika tétel

A kanonikusan konjugált impulzus

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}_\alpha} = i\Psi_\alpha^\dagger. \tag{3.208}$$

Az impulzus és a mező felcserélésére vagy kommutátort vagy antikommutátort kell használni. A spin-statisztika tétel szerint egész spinű részecskékre kommutátort, félegész spinűekre antikommutátort kell használni. Hogy megértsük a tétel lényegét, nézzük most a balkezes fermionok egy speciális esetét:

Vegyünk két balkezes fermiont az $\mathbf{x} = (x_0, 0, 0)$ és az $\mathbf{x} = (-x_0, 0, 0)$ helyen az egyszerűség kedvéért s állapotban, mindkettő sipnje legyen z irányú, felfelé mutató. A közös hullámfüggvényt vegyük egyelőre két hullámfüggvény szorzatának, azaz

$$\Psi_{12}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\ \ \Psi_s(t, x - x_0, y, z)\Psi_s(t, x' + x_0, y', z'). \tag{3.209}$$

Mi történik a közös sajátfüggvénnyel, ha megcseréljük a két részecskét? A két részecske felcserélése ebben a speciális esetben elérhető úgy is, hogy z tengely körül elforgatom a rendszert 180°-kal[1]! Ekkor $(x, y, z) \to$

[1] Ehhez legalább két dimenziós tér kell; 1D rendszerekben a statisztika nem kötődik a forgatásokhoz, így nem igaz a spin-statisztika tétel sem. Lehetnek pl. egzotikus statisztikájú "anyonok"

$(-x,-y,z)$, de mivel s állapotban voltak a részecskéim, a hullámfüggvény térbeli része nem változik – attól eltekintve, hogy most $x-x_0$ helyett $x+x_0$ jelenik meg. A hullámfüggvény azonban még spinor indexekkel is rendelkezik, azaz ott is forgatni kell. A forgatást végző operátor

$$L(\omega_3=\pi)=e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_3}=\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{3.210}$$

azaz a felfelé mutató spint egyszerűen i-vel szorozza. Ezért a részecskék felcserélése után kapott hullámfüggvény

$$\Psi_{21}(t,\mathbf{x},\mathbf{x}')=-\left|\uparrow\right\rangle\otimes\left|\uparrow\right\rangle\ \Psi_s(t,x+x_0,y,z)\Psi_s(t,x'-x_0,y',z')=-\Psi_{12}(t,\mathbf{x}',\mathbf{x}), \tag{3.211}$$

vagyis kaptunk egy extra -1 faktort. Bozonikus esetben a 180°-kal való elforgatás operátora ±1-et ad, ami két azonos hullámfüggvény esetében mindig 1-re egészíti ki egymást.

Ennek alapján tehát a részecskéket keltő operátoroknak antikommutálniuk kell. Mivel a kommutátorból, ahogy láttuk, kommutáló részecskéket kapunk, ezért antikommutátort kell vennünk:

$$\{\Psi_\alpha(t,\mathbf{x}),\Pi_\beta(t,\mathbf{x}')\}=i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\quad\Rightarrow\quad\{\Psi(t,\mathbf{x}),\Psi^\dagger(t,\mathbf{x}')\}=\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{3.212}$$

3.4.5 A Dirac-Hamilton operátor spektruma

A Hamilton operátor

$$\mathcal{H}=\Pi\dot{\Psi}-\mathcal{L}=i\Psi^\dagger\dot{\Psi}-\Psi^\dagger\gamma^0(i\partial_0\gamma^0+i\partial_i\gamma^i-m)\Psi=\Psi^\dagger\gamma_0(-i\partial_i\gamma^i+m)\Psi=\Psi^\dagger\,h(i\partial)\Psi, \tag{3.213}$$

ahol

$$h(i\partial):=\gamma_0(-i\partial_i\gamma^i+m) \tag{3.214}$$

Keressük meg $h(i\partial)$ sajátfüggvényeit. Mivel h hermitikus, ezek ortonormált bázist képeznek, és így

$$h(i\partial)\psi_i(\mathbf{x})=E_i\psi_i(\mathbf{x})\quad\Rightarrow\quad\Psi=a_i\psi_i,\quad H=\int d^3\mathbf{x}\,\Psi^\dagger(\mathbf{x})h(i\partial)\Psi(\mathbf{x})=\sum_i E_i a_i^\dagger a_i, \tag{3.215}$$

diagonális lesz a Hamilton operátor.

Áttérve Fourier térbe

$$\psi(p)=\int d^3\mathbf{x}\,e^{ip_ix^i}\psi(x),\qquad\psi(\mathbf{x})=\int\frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\,e^{-ip_ix^i}\psi(\mathbf{p}), \tag{3.216}$$

azaz

$$h(\mathbf{p})=\gamma_0(-p_i\gamma^i+m)\quad\Rightarrow\quad h(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p})=E_{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{p}). \tag{3.217}$$

Ezt átalakítva, és bevezetve $p_0=E_{\mathbf{p}}$ jelölést

$$(p_\mu\gamma^\mu-m)\psi(\mathbf{p})=0, \tag{3.218}$$

azaz $\psi(\mathbf{p})$ a Dirac-egyenlet Fourier transzformáltját elégíti ki.

Megszorozva ezt $(p_\mu\gamma^\mu+m)$-mel:

$$(p_\mu\gamma^\mu+m)(p_\nu\gamma^\nu-m)\psi(\mathbf{p})=(p^2-m^2)\psi(\mathbf{p})=0\quad\Rightarrow\quad E_{\mathbf{p}}=\pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}. \tag{3.219}$$

Ez azt jelenti, hogy a sajátértékek a relatiisztikus képlettel adhatók meg, azonban egyaránt lesz pozitív és negatív sajátérték is. A szimmetria miatt 2 pozitív és 2 negatív sajátérték lesz. A pozitív sajátértékhez tartozó sajátvektorokat jelöljük $u_r(\mathbf{p})$-vel, a negatívokhoz tartozót $v_r(-\mathbf{p})$-vel, $r=\pm$. Negatív sajátérték esetén

$$0=(-E_{\mathbf{p}}\gamma^0+p_i\gamma^i-m)v_r(-\mathbf{p})\quad\Rightarrow\quad0=(E_{\mathbf{p}}\gamma^0+p_i\gamma^i+m)v_r(\mathbf{p})=(p_\mu\gamma^\mu+m)v_r(\mathbf{p}), \tag{3.220}$$

vagyis az a pozitív tömegű változatot elégíti ki.

A Függelék A.2 fejezetében megadjuk a konstruktív eljárást ezen egyenlet megoldásaira, itt most megadjuk az eredményt és bebizonyítjuk, hogy valóban megoldás. Használjuk a Weyl reprezentációt, ahol a Dirac egyenlet alakja

$$\begin{pmatrix} \mp m & p_\mu \bar{\sigma}^\mu \\ p_\mu \sigma^\mu & \mp m \end{pmatrix} \psi(\mathbf{p}) = 0. \tag{3.221}$$

Állítás az, hogy ebben a reprezentációban a megoldások

$$u_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_r \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_r \end{pmatrix}, \qquad v_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_r \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_r \end{pmatrix}, \tag{3.222}$$

ahol $\xi_+ = (1,0)$, $\xi_- = (0,1)$.
Bizonyítás: arra alapszik, hogy

$$\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \sqrt{p_\nu \sigma^\nu} = \sqrt{(E_\mathbf{p} + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})(E_\mathbf{p} - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{E_\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2} = m. \tag{3.223}$$

Emiatt $u_r(\mathbf{p})$ esetén

$$\begin{pmatrix} -m & p_\mu \bar{\sigma}^\mu \\ p_\mu \sigma^\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_r \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-m\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} + p_\mu \bar{\sigma}^\mu \sqrt{p_\mu \sigma^\mu})\, \xi_r \\ (p_\mu \sigma^\mu \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} - m\sqrt{p_\mu \sigma^\mu})\, \xi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}\, (-m + \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu})\, \xi_r \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\, (\sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} - m)\, \xi_r \end{pmatrix} = 0. \tag{3.224}$$

Hasonlóképpen $v_r(\mathbf{p})$-re

$$\begin{pmatrix} m & p_\mu \bar{\sigma}^\mu \\ p_\mu \sigma^\mu & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_r \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-m\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} + p_\mu \bar{\sigma}^\mu \sqrt{p_\mu \sigma^\mu})\, \xi_r \\ (-p_\mu \sigma^\mu \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} + m\sqrt{p_\mu \sigma^\mu})\, \xi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}\, (-m + \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu})\, \xi_r \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\, (-\sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} + m)\, \xi_r \end{pmatrix} = 0. \tag{3.225}$$

QED

Ezzel a formával bizonyítható néhány fontos összefüggés (használjuk a σ mátrixok tulajdonságát: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$, valamint hogy $p_\mu \sigma^\mu = E - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}$, és $p_\mu \bar{\sigma}^\mu = E + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}$)

$$\begin{aligned}
u_r(\mathbf{p})^\dagger u_s(\mathbf{p}) &= \left(\xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}, \xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\right) \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_s \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_s \end{pmatrix} = \xi_r^\dagger (p_\mu \bar{\sigma}^\mu) \xi_s + \xi_r^\dagger (p_\mu \sigma^\mu) \xi_s = 2E_p \xi_r^\dagger \xi_s = 2E_p \delta_{rs}, \\
\bar{u}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) &= \left(\xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}, \xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_s \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_s \end{pmatrix} = 2\xi_r^\dagger \sqrt{(p_\mu \bar{\sigma}^\mu)(p_\mu \sigma^\mu)} \xi_s = 2\sqrt{E^2 - p^2}\, \xi_r^\dagger \xi_s = 2m\delta_{rs}, \\
v_r(\mathbf{p})^\dagger v_s(\mathbf{p}) &= \left(-\xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}, \xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\right) \begin{pmatrix} -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_s \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_s \end{pmatrix} = \xi_r^\dagger (p_\mu \bar{\sigma}^\mu) \xi_s + \xi_r^\dagger (p_\mu \sigma^\mu) \xi_s = 2E_p \xi_r^\dagger \xi_s = 2E_p \delta_{rs}, \\
\bar{v}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) &= \left(-\xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}, \xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_s \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_s \end{pmatrix} = -2\xi_r^\dagger \sqrt{(p_\mu \bar{\sigma}^\mu)(p_\mu \sigma^\mu)} \xi_s = -2\sqrt{E^2 - p^2}\, \xi_r^\dagger \xi_s = -2m\delta_{rs}, \\
u_r(\mathbf{p})^\dagger v_s(-\mathbf{p}) &= \left(\xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}, \xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\right) \begin{pmatrix} -\sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_s \\ \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_s \end{pmatrix} = 0, \\
\bar{u}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) &= \left(\xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}, \xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_s \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_s \end{pmatrix} = 0, \\
\sum_r u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) &= \sum_r \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_r \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_r \end{pmatrix} \left(\xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}, \xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\mu \bar{\sigma}^\mu & \sqrt{(p_\mu \bar{\sigma}^\mu)(p_\mu \sigma^\mu)} \\ \sqrt{(p_\mu \bar{\sigma}^\mu)(p_\mu \sigma^\mu)} & p_\mu \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} m & p\bar{\sigma} \\ p\sigma & m \end{pmatrix} = p\gamma + m, \\
\sum_r v_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r(\mathbf{p}) &= \sum_r \begin{pmatrix} -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_r \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi_r \end{pmatrix} \left(-\xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}, \xi_r^\dagger \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\mu \bar{\sigma}^\mu & -\sqrt{(p_\mu \bar{\sigma}^\mu)(p_\mu \sigma^\mu)} \\ -\sqrt{(p_\mu \bar{\sigma}^\mu)(p_\mu \sigma^\mu)} & p_\mu \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -m & p\bar{\sigma} \\ p\sigma & -m \end{pmatrix} = p\gamma - m.
\end{aligned} \tag{3.226}$$

Vezessük be a $h = \frac{1}{2}\hat{p}_i \sigma_i \otimes \mathbf{1}$ *helicitás* operátort: ez forgásinvariáns operátor, használjuk abban a koordinátarendszerben, ahol $\mathbf{p} = (0,0,p)$. Itt, felhasználva, hogy $\sqrt{p_\mu \sigma^\mu} = \sqrt{E - p\sigma_3}$ illetve $\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} =$

$\sqrt{E+p\sigma_3}$, írhatjuk:

$$hu_r(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\xi_r\\ \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\xi_r\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\sigma_3\xi_r\\ \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\sigma_3\xi_r\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}u_r(\mathbf{p}), \tag{3.227}$$

azaz sajátfüggvény. Mivel a $\hat{\mathbf{p}}$ körüli ω szögű forgatásra $\hat{L} = e^{-i\omega h}$, emiatt $u_r(\mathbf{p})$ úgy transzformálódik a forgatás alatt mint egy 1/2 spinű részecske.

Most térjünk vissza a spektrumra: (3.213) szerint a Hamilton-sűrűség $\mathcal{H}(x) = \Psi^\dagger(x)h(i\partial)\Psi(x)$. Fejtsük most ki $\Psi(x)$-et a fenti u és v szerint:

$$\Psi(t,\mathbf{x}) = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}e^{i\mathbf{px}}\sum_{s=1,2}\left(a_s(t,\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) + \bar{b}_s(t,-\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p})\right), \tag{3.228}$$

ahol a és $\bar{b}$ operátorok. Az inverz reláció levezetése:

$$\sum_{s=1,2}\left(a_s(t,\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) + \bar{b}_s(t,-\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p})\right) = \sqrt{2E_p}\int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{px}}\Psi(t,\mathbf{x}) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a_s(t,\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{px}}u_s^\dagger(\mathbf{p})\Psi(t,\mathbf{x})\\ \bar{b}_s(t,-\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{px}}v_s^\dagger(-\mathbf{p})\Psi(t,\mathbf{x}).\end{cases} \tag{3.229}$$

Ezért az a és $\bar{b}$ operátorokra vonatkozó antikommutációs relációk

$$\{a_s(t,\mathbf{p}), a_r^\dagger(t,\mathbf{q})\} = \frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}\, e^{-i\mathbf{px}+i\mathbf{qy}}u_{s\alpha}^\dagger(\mathbf{p})\{\Psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \Psi_\beta^\dagger(t,\mathbf{y})\}u_{r\beta}(\mathbf{q}) = (2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\delta_{rs}. \tag{3.230}$$

Hasonlóan

$$\{\bar{b}_s(t,\mathbf{p}), \bar{b}_r^\dagger(t,\mathbf{q})\} = (2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\delta_{rs}, \qquad \{a_s(t,\mathbf{p}), a_r(t,\mathbf{q})\} = \{b_s(t,\mathbf{p}), b_r(t,\mathbf{q})\} = \{a_s(t,\mathbf{p}), b_r^\dagger(t,\mathbf{q})\} = \{b_s(t,\mathbf{p}), a_r^\dagger(t,\mathbf{q})\} = 0. \tag{3.231}$$

Ezzel H kifejezése

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\mathbf{x}\,\bar{\Psi}(x)h(i\partial)\Psi(x) = \\
&= \int d^3\mathbf{x}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}}e^{-i\mathbf{px}}\sum_{s=1,2}\left(a_s^\dagger(t,\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}) + \bar{b}_s^\dagger(t,-\mathbf{p})v_s^\dagger(-\mathbf{p})\right)h(i\partial)e^{i\mathbf{qx}}\sum_{r=1,2}\left(a_r(t,\mathbf{q})u_r(\mathbf{q}) + \bar{b}_r(t,-\mathbf{q})v_r(-\mathbf{q})\right)\\
&= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{r,s}\left(a_s^\dagger(t,\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}) + \bar{b}_s^\dagger(t,-\mathbf{p})v_s^\dagger(-\mathbf{p})\right)h(\mathbf{p})\left(a_r(t,\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) + \bar{b}_r(t,-\mathbf{p})v_r(-\mathbf{p})\right) = \\
&= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{r,s}\left(a_s^\dagger(t,\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}) + \bar{b}_s^\dagger(t,-\mathbf{p})v_s^\dagger(-\mathbf{p})\right)\left(a_r(t,\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) - \bar{b}_r(t,-\mathbf{p})v_r(-\mathbf{p})\right) = \\
&= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}E_p\sum_{r,s}\left(a_s^\dagger(t,\mathbf{p})a_s(t,\mathbf{p}) - \bar{b}_s^\dagger(t,\mathbf{p})\bar{b}_s(t,\mathbf{p})\right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

A bozonikus rendszerhez hasonlóan a spektrum innen már előállítható: van egy vákuumállapot $|\bar{0}\rangle$, amelyet a és $\bar{b}$ operátorok eltüntetnek; a részecske-állapotokat $a^\dagger$ és $b^\dagger$ ismételt hatásával kapjuk. Mivel a és $\bar{b}$ operátorok antikommutálnak, fermionokat írtunk le.

Mekkora az energiája $\bar{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|\bar{0}\rangle$ álapotnak?

$$H\bar{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|\bar{0}\rangle = -\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}E_q\sum_{r,s}\bar{b}_s^\dagger(t,\mathbf{q})\bar{b}_s(t,\mathbf{q})\bar{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|\bar{0}\rangle = -E_p\bar{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|\bar{0}\rangle. \tag{3.233}$$

Vagyis a részecskének *negatív* energiája van. Ha kölcsönhatásba lép más terekkel (pl. fotontérrel), akkor egy $\bar{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|\bar{0}\rangle$ részecske keltése energetikailag kedvező, a maradék energia kisugárzódik. Vagyis így a vákuum hamar feltöltődik $\bar{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\,|\bar{0}\rangle$ részecskékkel, azaz $|\bar{0}\rangle$ vákuum nem stabil. Ha már az összes $\bar{b}$ állapot betöltődött,

akkor stabilizálódik a helyzet: a stabil alapállapotot hívjuk az új vákuumnak, $|0\rangle$. Mivel itt már minden $\bar{b}$ állapot foglalt, ezért bármely $\bar{b}^\dagger$ hatása a vákuumra nullát ad:

$$\bar{b}_s^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle = 0. \tag{3.234}$$

Ezért az új vákuumon $\bar{b}_s^\dagger$ játssza az eltüntető operátor szerepét, így jelölhetjük

$$b_r(\mathbf{p}) = \bar{b}_r^\dagger(\mathbf{p}), \qquad b_r^\dagger(\mathbf{p}) = \bar{b}_r(\mathbf{p}) \quad \Rightarrow \quad \{b_r(\mathbf{p}), b_s^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta_{rs}, \tag{3.235}$$

az antikommutációs relációk nem változnak. $\bar{b}$ hatása az új vákuumra: eltüntet egy $\bar{b}$ részecskét, azaz $b_r^\dagger$ az eredeti nyelven egy lyukat hoz létre, az új nyelven azonban egy részecskét.

Az új operátorokkal kifejezhetjük a teret és a Hamilton-operátort is

$$\Psi(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(a_s(t,\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{i\mathbf{px}} + b_s^\dagger(t,\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{px}}\right),$$

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,E_p \sum_s \left(a_s^\dagger(t,\mathbf{p})a_s(t,\mathbf{p}) - b_s(t,\mathbf{p})b_s^\dagger(t,\mathbf{p})\right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,E_p \sum_{r,s} \left(a_s^\dagger(t,\mathbf{p})a_s(t,\mathbf{p}) + b_s^\dagger(t,\mathbf{p})b_s(t,\mathbf{p})\right) + \text{konst.} \tag{3.236}$$

Vagyis Ψ eltüntet egy a részecskét, és kelt egy b részecskét. A b részecske energiája

$$Hb_r^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle = E_p\, b_r^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle\,, \tag{3.237}$$

azaz ugyanakkora mint az $a^\dagger(p)$-vel keltett állapotnak.

Részecske-állapotokat most is relativisztikusan normáljuk

$$|\mathbf{p},s\rangle = \sqrt{2E_p}\; a_s^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle\,, \qquad \overline{|\mathbf{p},s\rangle} = \sqrt{2E_p}\; b_s^\dagger(\mathbf{p})\,|0\rangle\,. \tag{3.238}$$

A téroperátor egy részecske állapot és a vákuum közötti mátrixeleme (form faktor)

$$\begin{aligned}
\langle 0|\Psi(0)|\mathbf{p},s\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{r=1,2} \left\langle 0 \left| a_r(\mathbf{q})\sqrt{2E_p}a_s^\dagger(\mathbf{p}) \right| 0 \right\rangle u_r(\mathbf{q}) = u_s(\mathbf{p}),\\
\overline{\langle \mathbf{p},s|}\Psi(0)|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{r=1,2} \sqrt{2E_p}\,\langle 0|b_s(\mathbf{p})b_r^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle\, v_r(\mathbf{q}) = v_s(\mathbf{p}),\\
\langle 0|\bar{\Psi}(0)\overline{|\mathbf{p},s\rangle} &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{r=1,2} \bar{v}_s(\mathbf{q}) \left\langle 0|b_r(\mathbf{q})\sqrt{2E_p}b_s^\dagger(\mathbf{p})|0 \right\rangle v_r(\mathbf{q}) = \bar{v}_s(\mathbf{p}),\\
\langle \mathbf{p},s|\bar{\Psi}(0)|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{r=1,2} \sqrt{2E_p}\,\langle 0 \left| a_s(\mathbf{p})a_r^\dagger(\mathbf{q}) \right| 0\rangle\, \bar{u}_r(\mathbf{q}) = \bar{u}_s(\mathbf{p}).
\end{aligned} \tag{3.239}$$

Többrészecske állapotok:

$$\left|p_1,s_1;\ldots;p_n,s_n;\ldots;\overline{p_1',s_1'};\ldots;\overline{p_m',s_m'};\ldots\right\rangle = \sqrt{2E_{p_1}}a_{s_1}^\dagger(\mathbf{p}_1)\ldots\sqrt{2E_{p_n}}a_{s_n}^\dagger(\mathbf{p}_n)\ldots\sqrt{2E_{p_1'}}b_{s_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1')\ldots\sqrt{2E_{p_m'}}b_{s_m'}^\dagger(\mathbf{p}_m')\,|0\rangle\,. \tag{3.240}$$

- Mivel $(a_s^\dagger(\mathbf{p}))^2 = \frac{1}{2}\{a_s^\dagger(\mathbf{p}), a_s^\dagger(\mathbf{p})\} = 0$, ezért nem lehet két részecske ugyanabban az állapotban (Pauli elv)
- Mivel $\{a_s^\dagger(\mathbf{p}), a_r^\dagger(\mathbf{q})\} = 0$, ezért két részecske felcserélésével az állapot előjelet vált
- A fenti állapot energia-sajátállapot, energiája az egyrészecske energiák összege $\sum(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'})$; hasonló igaz az impulzusokra is.

Mindezek miatt a fenti állapot független szabad fermionok rendszerét írja le.

3.4.6 Időfüggés

$$\dot{a}_s(t,\mathbf{p}) = i[H, a_s(t,\mathbf{p})] = i\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\, E_q \sum_r [a_r^\dagger(t,\mathbf{q})a_r(t,\mathbf{q}), a_s(t,\mathbf{p})] = -iE_p a_s(t,\mathbf{p}), \tag{3.241}$$

mert

$$\begin{aligned}[a_r^\dagger(t,\mathbf{q})a_r(t,\mathbf{q}), a_s(t,\mathbf{p})] &= a_r^\dagger(t,\mathbf{q})a_r(t,\mathbf{q})a_s(t,\mathbf{p}) + a_r^\dagger(t,\mathbf{q})a_s(t,\mathbf{p})a_r(t,\mathbf{q}) - a_r^\dagger(t,\mathbf{q})a_s(t,\mathbf{p})a_r(t,\mathbf{q}) - a_s(t,\mathbf{p})a_r^\dagger(t,\mathbf{q})a_r(t,\mathbf{q}) = \\ &= -(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta_{rs}a_r(t,\mathbf{q}).\end{aligned} \tag{3.242}$$

Mivel b-re ugyanez adódik, kapjuk:

$$a_s(t,\mathbf{p}) = e^{-iE_p t}a_s(\mathbf{p}), \qquad a_s(t,\mathbf{p}) = e^{-iE_p t}a_s(\mathbf{p}) \quad \Rightarrow \quad \Psi(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_{s=1,2}\left(a_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{-ipx} + b_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{ipx}\right). \tag{3.243}$$

3.4.7 Korrelátorok

Most is definiálhatunk különböző korrelációs függvényeket:

$$\begin{aligned} i\Delta(x) = \left\langle 0 \left| \Psi(x)\bar{\Psi}(0) \right| 0 \right\rangle &= \sum_{r,s}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}}e^{-ipx}\sum_{r,s}u_s(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{q})\left\langle 0\left|a_s(\mathbf{p})a_r^\dagger(\mathbf{q})\right|0\right\rangle = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_s u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p})e^{-ipx} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}(\not{p}+m)e^{-ipx} = \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{2\pi}{2E_p}\delta(p_0-E_p)(\not{p}+m)e^{-ipx}. \end{aligned} \tag{3.244}$$

Fourier térben

$$i\Delta(p) = (\not{p}+m)\,2\pi\Theta(p_0)\delta(p^2-m^2) \quad \Rightarrow \quad \Delta(p) = (\not{p}+m)\Delta_\Phi(p), \tag{3.245}$$

ahol Δ_Φ a skalár tér delta-korrelátora. Általában: minden szabad, relativisztikus elmélet delta-korrelátora arányos Δ_Φ-vel, az arányossági tényező a Klein-Gordon osztó.

Ugyanilyen számolással

$$\begin{aligned} i\bar{\Delta}(x) = \left\langle 0 \left| \bar{\Psi}(0)\Psi(x) \right| 0 \right\rangle &= \sum_{r,s}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}}e^{ipx}\sum_{r,s}\bar{v}_s(\mathbf{p})v_r(\mathbf{q})\left\langle 0\left|b_s(\mathbf{p})b_r^\dagger(\mathbf{q})\right|0\right\rangle = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_s v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p})e^{ipx} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}(\not{p}-m)e^{ipx} = \\ &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{2\pi}{2E_p}\delta(p_0+E_p)(\not{p}+m)e^{-ipx}. \end{aligned} \tag{3.246}$$

A Feynman propagátor definíciója most:

$$iG_F(x) = \left\langle 0 \left| \mathrm{T}\Psi(x)\bar{\Psi}(0) \right| 0 \right\rangle = \Theta(t)\left\langle 0\left|\Psi(x)\bar{\Psi}(0)\right|0\right\rangle - \Theta(-t)\left\langle 0\left|\bar{\Psi}(0)\Psi(x)\right|0\right\rangle. \tag{3.247}$$

Ezért a Feynman propagátor

$$\begin{aligned} G_F(p) &= \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{2\pi}{2E_p}\left(\delta(\omega-E_p)\frac{\omega\gamma_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} + m}{p_0-\omega+i\varepsilon} + \delta(\omega+E_p)\frac{\omega\gamma_0-\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}+m}{-p_0+\omega+i\varepsilon}\right) = \\ &= \frac{1}{2E_p}\left(\frac{E_p\gamma_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0-E_p+i\varepsilon} + \frac{-E_p\gamma_0-\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}+m}{-p_0-E_p+i\varepsilon}\right) = \\ &= \frac{1}{2E_p}\frac{2p_0E_p\gamma_0 + 2E_p(-\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}+m)}{p_0^2-(E_p-i\varepsilon)^2} = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.248}$$

3.5 Lorentz-vektor mezők

Miután megtaláltuk a Lorentz-csoport ábrázolását, a spinekhez hasonlóan összetett ábrázolásokat is vizsgálhatunk. A legegyszerűbb eset az $A_{\alpha\beta} = \Psi_{L,\alpha}\Psi_{R,\beta}$ eset, ez egy $2\times 2 = 4$ dimenziós ábrázolás. Ennek transzformációja:

$$A' = (\Psi_L\Psi_R)' = L\Psi_L L^{\dagger\,-1}\Psi_R = L\Psi_L\Psi_R L^{*-1}. \tag{3.249}$$

Mivel $L^{\dagger\,-1}$ unitér ekvivalens L^*-gal, ezért a fenti alak unitér ekvivalens azzal, hogy

$$A' = LAL^\dagger. \tag{3.250}$$

Vagyis ez az összetett ábrázolás megfelel a Lorentz vektorok ábrázolásának.

Lorentz vektormezőkből és annak deriváltjaiból többféle invariáns képezhető, pl.:

$$A_\mu A^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu, \quad \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu. \tag{3.251}$$

Ezek mindegyike szerepelhet a Lagrange-függvényben. Kiemelkedő szerepe van azonban a következő kombinációnak:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad \text{ahol} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{3.252}$$

ez írja le az elektromágneses tér Lagrange függvényét. Kifejtve

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\right). \tag{3.253}$$

Képezhetjük az elektromos és mágneses térerősségeket $F^{0i} = E_i$ és $F^{ij} = \varepsilon_{ijk}B_k$ alapján. Így a fenti alak

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(E^2 - B^2\right). \tag{3.254}$$

A mozgásegyenletek:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A_\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} E = 0, \quad \partial_0 E - \operatorname{rot} B = 0, \tag{3.255}$$

szabad (forrásmentes) Maxwell egyenletek. A maradék két Maxwell egyenlet:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \qquad \text{ahol} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}, \tag{3.256}$$

ahol $\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$ teljesen antiszimmetrikus. A fenti egyenlet valójában azonosság (Bianchi), ami ε antiszimmetriája illetve a vegyes parciális deriváltak szimmetriája miatt teljesül.

A fenti Lagrange függvénynek van egy különleges szimmetriája: ha $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu\alpha(x)$ *helyfüggő* (mérték) transzfromáció, akkor a térerősségtenzor változása

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu = 0. \tag{3.257}$$

Vagyis a terek mozgását meghatározó Lagrange-függvény mértékinvariáns.

Az energia-impulzus tenzor kifejezése

$$T_{\mu\nu} = \partial_\nu A^\varrho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\varrho)} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} = \partial_\nu A^\varrho F_{\varrho\mu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}FF. \tag{3.258}$$

Ez nem szimmetrikus μ-ν-ben; azonban hozzáadhatjuk

$$\partial^\varrho(A_\nu F_{\varrho\mu}) \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu\partial^\varrho(A_\nu F_{\varrho\mu}) = 0, \tag{3.259}$$

hiszen F antiszimmetrikus μ-ν-ben, míg a vegyes derivált szimmetrikus. Ezért a szimmertikus energia-impulzus tenzor alakja:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = g^{\varrho\varrho'}F_{\nu\varrho'}F_{\varrho\mu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}FF. \tag{3.260}$$

Speciálisan

$$\bar{T}_{00} = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right). \tag{3.261}$$

Mivel a tér spinje 1, ezért bozon, vagyis kommutátorral kell kvantálni. Ilyet már láttunk korábban a skalár tér esetén. Először meg kell mondani a kanonikusan konjugált momentumot:

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^0 A^\mu} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 \quad \Rightarrow \quad \Pi^0 \equiv 0! \tag{3.262}$$

Ez annak a következménye, hogy a Lagrange-függvény mértékinvariáns. Ezért nem róhatjuk ki a $[A^0, \Pi^0] = i\delta$ kommutációs relációt!

Hogy orvosoljuk a bajt, mértéket kell rögzítenünk. Szokásos választás

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.263}$$

Lorentz mérték. Ezzel a Lagrange-függvény alakja

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu = \frac{1}{2}(-g^{\nu\nu'})\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A_{\nu'} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_0 \partial^\mu A_0 + \frac{1}{2}\partial_\mu A_i \partial^\mu A_i. \tag{3.264}$$

Láthatóan az A_i terek teljesen olyanok, mint 3 független $m = 0$ tömegű skalártér. Az A_0 tér előjele azonban különbözik – ez az az ár amit fizetnünk kell a mértékrögzítésért. Most már definiálhatók a kanonikusan konjugált impulzusok

$$\Pi^\mu = -\partial_0 A_\mu \quad \Rightarrow \quad \Pi_0 = -\partial_0 A_0, \qquad \Pi_i = \partial_0 A_i. \tag{3.265}$$

A kommutációs relációk tehát

$$[A_\mu(t,\mathbf{x}), \Pi_\nu(t,\mathbf{y})] = i\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad [A_\mu(t,\mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t,\mathbf{y})] = -ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{3.266}$$

a többi nulla.

A korábbiakhoz hasonlóan itt is bevezethetjük a keltő-eltüntető operátorokat, azonban nem kell teljesen az eredeti terek kiosztását követni. Szokás bevezetni egy polarizációs vektor-sereget:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2p}} \sum_{\varrho=0}^{3} \left[\varepsilon_\mu^\varrho(\mathbf{p}) a_{\varrho\mathbf{p}}(t) e^{i\mathbf{px}} + \varepsilon_\mu^{*\varrho}(\mathbf{p}) a^\dagger_{\varrho,\mathbf{p}}(t) e^{-i\mathbf{px}}\right], \\ \partial_0 A_\mu(x) &= -i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{p}{2}} \sum_{\varrho=0}^{3} \left[\varepsilon_\mu^\varrho(\mathbf{p}) a_{\varrho\mathbf{p}}(t) e^{i\mathbf{px}} - \varepsilon_\mu^{*\varrho}(\mathbf{p}) a^\dagger_{\varrho,\mathbf{p}}(t) e^{-i\mathbf{px}}\right], \end{aligned} \tag{3.267}$$

ahol

$$\sum_{\varrho=0}^{3} \varepsilon^*_{\varrho\mu}(\mathbf{p})\varepsilon^\varrho_\nu(\mathbf{p}) = g_{\mu\nu}, \qquad \varepsilon_\mu^{*\varrho}(\mathbf{p})\varepsilon^{\varrho'\mu}(\mathbf{p}) = g^{\varrho\varrho'}. \tag{3.268}$$

Például

$$\varepsilon^0 = (1,0,0,0), \quad \varepsilon^3 = \hat{\mathbf{p}}, \quad \varepsilon^{1,2} \perp \mathbf{p}. \tag{3.269}$$

Ezzel az inverz reláció

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p}{2}}\varepsilon_\varrho^{*\mu}(\mathbf{p}) \int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{px}} \left(A_\mu(t,\mathbf{x}) + \frac{i\dot{A}_\mu(t,\mathbf{x})}{p}\right) &= a_{\varrho\mathbf{p}}(t) \\ \sqrt{\frac{p}{2}}\varepsilon_\varrho^{\mu}(\mathbf{p}) \int d^3\mathbf{x}\, e^{i\mathbf{px}} \left(A_\mu(t,\mathbf{x}) - \frac{i\dot{A}_\mu(t,\mathbf{x})}{p}\right) &= a^\dagger_{\varrho,\mathbf{p}}(t). \end{aligned} \tag{3.270}$$

A kommutációs reláció

$$[a_{\varrho\mathbf{p}}(t), a^\dagger_{\varrho',\mathbf{q}}(t)] = -g_{\varrho\varrho'}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{3.271}$$

a többi kommutál.

A Hamilton operátor ebben a mértékben

$$: H := - : \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left(\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + \boldsymbol{\partial} A_\mu \boldsymbol{\partial} A^\mu \right) := \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \; p \, (-g^{\varrho\varrho'}) a^\dagger_{\varrho\mathbf{p}} a_{\varrho'\mathbf{p}}. \tag{3.272}$$

A relativisztikusan normált részecskék

$$|\mathbf{p}\varrho\rangle = \sqrt{2p} \; a^\dagger_{\varrho\mathbf{p}} \, |0\rangle \quad \Rightarrow \quad H \, |\mathbf{p}\varrho\rangle = p \, |\mathbf{p}\varrho\rangle \, , \tag{3.273}$$

mert

$$: H : \; a^\dagger_{\varrho\mathbf{p}} \, |0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \; q \, (-g^{\sigma\sigma'}) a^\dagger_{\sigma\mathbf{q}} a_{\sigma'\mathbf{q}} a^\dagger_{\varrho\mathbf{p}} \, |0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \; q \, (-g^{\sigma\sigma'}) a^\dagger_{\sigma\mathbf{q}} [a_{\sigma'\mathbf{q}}, a^\dagger_{\varrho\mathbf{p}}] \, |0\rangle = p \, a^\dagger_{\varrho\mathbf{p}} \, |0\rangle \tag{3.274}$$

Probléma a negatív kommutátorral: a $\varrho = 0$ állapotok normálása rossz előjelű:

$$\langle \varrho, \mathbf{p} | \varrho', \mathbf{q} \rangle = \sqrt{4pq} \left\langle 0 | a_{\varrho\mathbf{p}} a^\dagger_{\varrho'\mathbf{q}} | 0 \right\rangle = -g_{\varrho\varrho'} \, 2p (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \tag{3.275}$$

Így a megtalálási valószínűség negatív $\Rightarrow$ nem lehet fizikai állapot! Hasonlóképpen találhatunk nulla normájú állapotokat:

$$| \, |0, \mathbf{p}\rangle + |3, \mathbf{p}\rangle \, |^2 = \langle 0, \mathbf{p} | 0, \mathbf{p} \rangle + \langle 3, \mathbf{p} | 3, \mathbf{p} \rangle = 0. \tag{3.276}$$

Itt a megtalálási valószínűség nulla, azaz ez sem lehet fizikai állapot.

A mértékrögzítés mellékhatása tehát nem fizikai állapotok megjelenése. A fizikai Hilbert tér a transzverzális módusokat tartalmazza csupán. Ennek ellenére az összes állapottal számolhatunk, mert mértékinvariáns mennyiséghez úgyis minden módusból ugyanakkora, csak a nulla módusból ellentétes előjelű járulékot kapunk $\Rightarrow$ marad két módus járuléka.

Az operátorok időfüggéséhez

$$\dot{a}_{\mu\mathbf{p}} = i[H, a_{\mu\mathbf{p}}] = i \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \; q \, (-g^{\varrho\varrho'}) \left\langle 0 | [a^\dagger_{\varrho\mathbf{q}} a_{\varrho'\mathbf{q}}, a_{\mu\mathbf{p}}] | 0 \right\rangle = i \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \; q \, (-g^{\varrho\varrho'}) g_{\varrho\mu} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) a_{\varrho'\mathbf{q}} = -ip a_{\mu\mathbf{p}}$$

$$\Rightarrow \quad a_{\mu\mathbf{p}}(t) = e^{-ipt} a_{\mu\mathbf{p}}(0). \tag{3.277}$$

A tér időfüggése

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2p}} \sum_{\varrho=0}^{3} \left[\varepsilon^\varrho_\mu(\mathbf{p}) a_{\varrho\mathbf{p}} e^{-ipx} + \varepsilon^{*\varrho}_\mu(\mathbf{p}) a^\dagger_{\varrho,\mathbf{p}} e^{ipx} \right]. \tag{3.278}$$

Kiszámolhatjuk a propagátorokat, először a Δ propagátort:

$$\Delta_{\mu\nu}(x) \; = \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4pq}} \sum_{\varrho\varrho'=0}^{3} \varepsilon^\varrho_\mu(\mathbf{p}) \varepsilon^{*\varrho'}_\nu(\mathbf{q}) e^{-ipx} \left\langle 0 | a_{\varrho\mathbf{p}} a^\dagger_{\varrho'\mathbf{q}} | 0 \right\rangle$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4pq}} \sum_{\varrho\varrho'=0}^{3} \varepsilon^\varrho_\mu(\mathbf{p}) \varepsilon^{*\varrho'}_\nu(\mathbf{q}) e^{-ipx} (-g_{\varrho\varrho'}) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p} e^{-ipx} \tag{3.279}$$

Fourier térben

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = -g_{\mu\nu} \Theta(p_0) \, 2\pi \, \delta(p^2). \tag{3.280}$$

Vagyis itt a Klein-Gordon osztó $-g_{\mu\nu}$. Ezzel a többi propagátor is kefejezhető:

$$\begin{aligned} \varrho_{\mu\nu}(x) &= \langle 0 | [A_\mu(x), A_\nu(0)] | 0 \rangle \quad \Rightarrow \quad \varrho_{\mu\nu}(p) = -g_{\mu\nu} \, \mathrm{sgn}(p_0) \, 2\pi \, \delta(p^2), \\ iG_{F,\mu\nu} &= \langle 0 | \mathrm{T} A_\mu(x), A_\nu(0) | 0 \rangle \quad \Rightarrow \quad G_{F,\mu\nu}(p) = \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.281}$$

A form-faktorok:

$$\langle 0 | A_\mu(0) | \mathbf{p}\varrho \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2q}} \sum_{\varrho'=0}^{3} \varepsilon^{\varrho'}_\mu(\mathbf{q}) \left\langle 0 | a_{\varrho'\mathbf{q}} \sqrt{2p} \, a^\dagger_{\varrho\mathbf{p}} | 0 \right\rangle = -\varepsilon_{\varrho\mu}(\mathbf{p})$$

$$\langle \mathbf{p}\varrho | A_\mu(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2q}} \sum_{\varrho'=0}^{3} \varepsilon^{*\varrho'}_\mu(\mathbf{q}) \left\langle 0 | \sqrt{2p} \, a_{\varrho\mathbf{p}} \, a^\dagger_{\varrho'\mathbf{q}} | 0 \right\rangle = -\varepsilon^*_{\varrho\mu}(\mathbf{p}). \tag{3.282}$$

3.6 Kölcsönhatások

Eddig szabad részecskék rendszerét vizsgáltuk – hogyan lehet a kölcsönhatásokat kezelni? A Hamilton operátor itt nem diagonalizálható egzaktul, ezért valójában még az energia-állapotokat (részecskéket) sem ismerjük. Hogy a helyzetet kezelni tudjuk, végezzük el a következő gondolatkísérletet: V térfogatú térbe t_i-ben beteszünk n db szabad részecskét, majd bekapcsoljuk a kölcsönhatásokat egy ideig, majd t_f-nél kikapcsolva azt megnézzük, milyen szabad állapotok keverékében van a rendszer.

Fizikai kérdés: átmeneti amplitúdó: $t = t_0$-ban előállítunk egy $|i\rangle$ állapotot, majd időfejlesztés után megnézzük az átfedését t-ben egy $|f\rangle$ állapottal: $\langle f, t|e^{-iH(t-t_0)}|i, t_0\rangle \equiv \langle f, t|i, t_0\rangle$.

Speciális kérdés: $t \to \infty$, $t_0 \to -\infty$; ekkor a fenti átmeneti amplitúdót

$$S_{fi} = \langle f, t \to \infty | i, t_0 \to -\infty\rangle \tag{3.283}$$

S-mátrixnak hívjuk (mátrix az állapotok terében). Ortogonális végállapotok bázisában dolgozva, teljes függvényrendszert beszúrva a kezdeti időpontban

$$\sum_i \langle f|i\rangle \langle i|f'\rangle = \langle f|f'\rangle = \delta_{ff'} \quad \Rightarrow \quad S\,S^\dagger = \mathbf{1}, \tag{3.284}$$

vagyis az S-mátrix unitér.

Szokás leválasztani a nem kölcsönható részt $S = 1 + iT$ módon. Relativisztikus kvantum térelméleteknél az energia és impulzus megmarad $\Rightarrow$ $T \sim \delta(P_f - P_i)$, ahol $P_{f,i}$ a kezdeti/végállapot teljes energia-impulzus négyesvektora. Ekkor szokásosan írhatjuk

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta(P_f - P_i)M_{fi}. \tag{3.285}$$

A következőkben elhagyjuk a kölcsönhatásmentes átmenet lehetőségét. Ekkor az átmeneti valószínűség

$$\mathcal{P}_{f\neq i} = |\langle f|i\rangle_{f\neq i}|^2 = [(2\pi)^4\delta(P_f - P_i)]^2|M_{fi}|^2. \tag{3.286}$$

Hogyan értelmezzük δ^2-et? $\Rightarrow$ Fermi-féle aranyszabály:

$$(2\pi)^4\delta(p) = \int d^4x\, e^{ipx} \quad \Rightarrow \quad [(2\pi)^4\delta(p)]^2 = (2\pi)^4\delta(p)\int d^4x\, e^{ipx}\Big|_{p=0} = V(t-t_0)\,(2\pi)^4\delta(p), \tag{3.287}$$

azaz a teljes téridő-tartománnyal arányos:

$$\mathcal{P}_{fi} = (2\pi)^4\delta(P_f - P_i)\,V\Delta t\,|M_{fi}|^2. \tag{3.288}$$

Δt értelmezése: időegység alatt bekövetkező reakciókat tudunk számolni: időegység alatti átmeneti valószínűség:

$$w_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{\Delta t} \tag{3.289}$$

3.6.1 Szórási folyamat jellemzése

Fizikai folyamat: szórás. Egymástól függetlenül ("végtelen távolságra") előállítunk n részecskét, amelyeket egymásnak lövünk, ütköznek, végül a végtelenbe távozva m részecskét találunk. Pontos megfogalmazás: a kölcsönhatás adiabatikus be- és kikapcsolása.

Vegyünk tehát n db független részecskét egy V térfogatú dobozban. Ennek hullámfüggvénye a térfogati normálással adható meg. Egy részecske hullámfüggvényekre láttuk

$$|\mathbf{p}\rangle_V = \frac{1}{\sqrt{V}}a^\dagger_{\mathbf{p}}\,|0\rangle\,, \qquad |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_p}\;a^\dagger_{\mathbf{p}}\,|0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{p}\rangle_V = \frac{|\mathbf{p}\rangle}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}\,V}}. \tag{3.290}$$

Sok részecskére

$$|i\rangle = \frac{|\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\rangle}{\prod_{i=1}^n \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}\,V}} \tag{3.291}$$

Ezzel az átmeneti mátrixelem négyzete egy $p_1, \dots p_n \to q_1, \dots q_m$ folyamat végén:

$$|M_{fi}|^2 = |\langle q_1, \dots q_m | p_1, \dots p_n \rangle_V|^2 = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_i} V} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_j} V} |\langle q_1, \dots q_m | p_1, \dots p_n \rangle|^2 \equiv \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_i} V} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_j} V} |M_{qp}|^2. \tag{3.292}$$

A fizikai normálással számolt $|M_{qp}|^2$ relativisztikusan invariáns.

A végállapotoknál azonban nehezen figyelhetünk meg egy adott impulzus-állapotba való átmenetet. Valójában csak egy d^3q_i impulzus-tartományba való átmenetet megfigyelhető. Mivel a végállapotok különbözőek, így az átmeneti valószínűségek adódnak össze. Mivel az átmeneti mátrixelem az impulzusok infinitezimális változásánál alig változnak, $|M_{qp}|^2$ ugyanaz marad, vagyis a teljes átmeneti valószínűség egyszerűn a végállapotok számával szorzódik. 1D esetén az energiszintek távolsága $\Delta q = 2\pi/L$, ahol L a dobozméret. Ezért dq tartományba eső állapotok száma $dq/\Delta q = Ldq/2\pi$. 3D esetén ez $Vd^3q/(2\pi)^3$. Minden végállapotra végigszorozva ezzel a faktorral:

$$|M_{fi}|^2 = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_i} V} \prod_{j=1}^{m} \frac{d^3\mathbf{q}_j}{(2\pi)^3\, 2E_{q_j}} |M_{qp}|^2. \tag{3.293}$$

Annak a valószínűsége tehát, hogy kezdő állapotként $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2 \dots, \mathbf{p}_n$ határozott impulzusú részecskével indulva a végállapotban $\mathbf{q}_1$ körül $d^3\mathbf{q}_1$ tartományban, $\mathbf{q}_2$ körül $d^3\mathbf{q}_2$ tartományban, $\dots \mathbf{q}_m$ körül $d^3\mathbf{q}_m$ tartományban egy-egy részecskét találjunk időegység alatt:

$$w_{fi} = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i)\, V^{1-n} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} 2E_{\mathbf{p}_i}} \prod_{j=1}^{m} \frac{d^3\mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_{q_j}} \left|M_{qp}\right|^2. \tag{3.294}$$

Bomlás

Ha egy bemenő állapot van ($n = 1$) és több kimenő állapot, akkor bomlásáról beszélünk. Az időegységre vonatkoztatott átmeneti valószínűség a bomlási valószínűség

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta(P_f - p) \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \prod_{j=1}^{m} \frac{d^3\mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_{q_j}} \left|M_{qp}\right|^2. \tag{3.295}$$

A teljes bomlási valószínűséget úgy kapjuk, hogy felösszegzünk az összes lehetséges végállapotra:

$$\Gamma = \frac{1}{2E_p} \int \prod_{j=1}^{m} \frac{d^3\mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_{q_j}} (2\pi)^4 \delta(\Sigma_j p_j - p) \left|M_{qp}\right|^2. \tag{3.296}$$

Az élettartam a bomlási állandó inverze.

Az integrál alatt álló kifejezés relativisztikusan invariáns. Ezért egy p impulzusú és egy álló részecske élettartamának aránya

$$\frac{\tau_p}{\tau_0} = \frac{E_p}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad \Rightarrow \quad \tau_p = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{3.297}$$

a relativitáselmélet jóslata szerint.

2-részecske szórás

Ha (3.294) egyenletbe $n = 2$-t írunk be, akkor $1/V$ faktor bennmarad $\Rightarrow$ annak a valószínűsége, hogy a két részecske eltalálja egymást. Ezért azt a felállást valósítjuk meg, mikor az egyik részecske áll, a másik pedig adott áramsűrűséggel szóródik rajta. Erre a bemenő részecskére tehát áram-normálást kell alkalmaznunk. Láttuk egy részecskére

$$|\mathbf{p}\rangle_j = \sqrt{\frac{E_p j}{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}} |0\rangle, \qquad |\mathbf{p}\rangle_V = \frac{1}{\sqrt{V}} a^\dagger_{\mathbf{p}} |0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{p}\rangle_j = \sqrt{\frac{VE_p j}{p}} |\mathbf{p}\rangle_V. \tag{3.298}$$

Vagyis az $|\ |^2$-ben ennek négyzetével kell szorozni, azaz az átmeneti valószínűség kifejezése $w_{fi} \sim j$. Az arányossági tényező a differenciális hatáskeresztmetszet:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) \frac{1}{4m_1|\mathbf{p}_2|} \prod_{j=1}^{m} \frac{d^3\mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_{q_j}} \left|M_{qp}\right|^2 . \tag{3.299}$$

Ez azonban csak a "labor rendszerben" (ahol az 1. részecske áll) használható így, hiszen m_1 ill. $\mathbf{p}_2$ definíció szerint az álló részecske tömege ill. a másik beeső részecske impulzusa. Azonban

$$\lambda = 2\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2} \quad \overset{\mathbf{p}_1\to 0}{\longrightarrow} \quad 2\sqrt{m_1^2(E_2^2 - m_2^2)} = 2m_1|\mathbf{p}_2|. \tag{3.300}$$

Ez a kifejezés már relativisztikusan invariáns, vagyis értéke minden rendszerben ugyanaz, a labor rendszerben pedig épp a kívánt formulát adja. Ezért

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) \frac{1}{2\lambda} \prod_{j=1}^{m} \frac{d^3\mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_{q_j}} \left|M_{qp}\right|^2 , \tag{3.301}$$

ez a hatáskeresztemtszet relativisztikusan invariáns kifejezése.

λ-ra másik kifejezés: definiáljuk $s = (p_1 + p_2)^2$-et. Ez relativisztikusan invariáns, és

$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1p_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2. \tag{3.302}$$

Bevezetve

$$\lambda(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda(s, m_1^2, m_2^2). \tag{3.303}$$

Példa: tömegközépponti rendszerben $2 \to 2$ bomlás esetén: bemenő részecskék legyenek p_1, p_2 négyesimpulzusúak, energiák E_1, E_2, tömegeik m_1, m_2; a kimenő részecskék q_1, q_2 impulzusúak, energiák E_1', E_2', tömegeik M_1, M_2. TK rendszerben $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, és $E^2 \equiv (E_1 + E_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \frac{d^3\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta(E - E_1' - E_2') \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \frac{1}{4E_1'E_2'} \frac{1}{2\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} |M|^2 = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} (2\pi) \delta(E - E_1' - E_2') \frac{1}{4E_1'E_2'} \frac{1}{2\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} |M|^2 = \frac{1}{32\pi^2\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \int d\Omega\, dq\, \frac{q^2}{E_1'E_2'} \delta(E - E_1' - E_2') |M|^2\end{aligned} \tag{3.304}$$

Új változó

$$x := E_1' + E_2' \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dq} = \frac{q}{E_1'} + \frac{q}{E_2'} = \frac{qE}{E_1'E_2'}, \tag{3.305}$$

vagyis ami marad

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \frac{q}{E} |M|^2. \tag{3.306}$$

Az energiamegmaradásból

$$E = \sqrt{q^2 + M_1^2} + \sqrt{q^2 + M_2^2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\lambda(s^2, M_1^2, M_2^2)}{2E}. \tag{3.307}$$

Így összesen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2\, s} \frac{\lambda(s, M_1^2, M_2^2)}{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} |M|^2. \tag{3.308}$$

Az $1/s$ faktor következménye: $s = (p_1 + p_2)^2 = (E^{TK})^2$, a tömegközépponti energia négyzete $\Rightarrow$ a hatáskeresztmetszetek tipikusan $1/E^2$ szerint csökkennek $\Rightarrow$ nagyobb energián ugyanannyi esemény eléréséhez több ütközésre van szükség!

3.6.2 Az átmeneti mátrixelem számítása

Szórás folyamán $|i,t_0\rangle \to |i,t\rangle$, ennek átfedését számoljuk valamilyen $|f\rangle$ állapottal:

$$\langle f,t|i,t\rangle = \left\langle f \left| e^{-iH(t-t_0)} \right| i \right\rangle . \tag{3.309}$$

Vegyünk a kezdeti ill. végállapotban (aszimptotikus) részecskéket, azaz H_0 sajátállapotait $\Rightarrow$ precízebben: kölcsönhatások adiabatikus ki- ill. bekapcsolása. Ekkor írható

$$\left\langle f \left| e^{-iH(t-t_0)} \right| i \right\rangle = \left\langle f \left| e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \right| i \right\rangle = e^{-iE_f(t-t_0)} \left\langle f \left| e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \right| i \right\rangle . \tag{3.310}$$

Bevezetve

$$U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt} \tag{3.311}$$

operátort, írhatjuk

$$\langle f,t|i,t\rangle = e^{-iE_f(t-t_0)} \langle f|U(t-t_0)|i\rangle , \tag{3.312}$$

vagyis a szabad időfejlődéshez tartozó fázisfaktor erejéig (ami kiesik a fizikailag releváns $|M|^2$-ből) számolhatunk az U operátorral is (kölcsönhatási kép).

Hogyan határozható meg U? Tulajdonságai

$$U(0) = \mathbf{1}, \qquad U^\dagger(t)U(t) = \mathbf{1}, \tag{3.313}$$

azaz unitér. Idő szerinti deriváltja

$$\dot{U}(t) = iH_0 e^{iH_0 t} e^{-iHt} - e^{iH_0 t}(iH)\, e^{-iHt}. \tag{3.314}$$

H Hamilton idő-független; azonban hozzárendelhetünk egy időfüggő operátort:

$$\bar{H}(t) = e^{iH_0 t} H\, e^{-iH_0 t}, \tag{3.315}$$

vagyis a szabad időfejlesztő operátorral adódó időfejlődését vesszük. Ezzel

$$\dot{U} = i(H_0 - \bar{H}(t))\, U(t). \tag{3.316}$$

A szorzó operátor

$$\bar{H}(t) - H_0 = e^{iH_0 t}(H - H_0)\, e^{-iH_0 t} = e^{iH_0 t} H_I\, e^{-iH_0 t} \equiv H_I^0(t). \tag{3.317}$$

Mivel $H - H_0$-ban a kvadratikusnál magasabb rendű (anharmonikus) tagok szerpelnek, amelyeket kihagytunk a részecske-kép kialakításában, így ezek a részecskék kölcsönhatásait írják le. Az U operátort tehát a kölcsönhatások fejlesztik

$$\dot{U}(t) = -iH_I^0(t)U(t), \qquad U(0) = \mathbf{1}. \tag{3.318}$$

Szukcesszív approximációs megoldás

A fenti egyenletet szukcesszív approximációval oldjuk meg. Ehhez átírjuk integrálegyenletté az egyenletet:

$$U(t) = \mathbf{1} + \int_0^t dt'\, (-iH_I^0(t'))\, U(t'). \tag{3.319}$$

A szukcesszív approximáció eljárása a következő iterációt jelenti

$$U_{n+1} = \mathbf{1} + \int_0^t dt'\, (-iH_I^0(t'))\, U_n(t'). \tag{3.320}$$

Az első néhány tagot kiírva:

$$
\begin{aligned}
&U_0 = 1,\\
&U_1 = 1 + \int_0^t dt_1\,(-iH_I^0(t_1)),\\
&U_2 = 1 + \int_0^t dt_1\,(-iH_I^0(t_1)) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\,(-iH_I^0(t_1))\,(-iH_I^0(t_2)),\\
&\dots\\
&U = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^1 dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\,(-iH_I^0(t_1))\,(-iH_I^0(t_2)) \dots (-iH_I^0(t_n)).
\end{aligned}
\tag{3.321}
$$

Az integrálási határok miatt $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$, és az iH_I^0 oprátorok ugyanebben a sorrendben követikm egymást. Érdemes tehát bevezetni az időrendezés fogalmát

$$
\mathrm{T}A(t)B(t') = \Theta(t-t')A(t)B(t') + \Theta(t'-t)B(t')A(t). \tag{3.322}
$$

A H_I^0-k szorzata theát írható úgy, mint

$$
\mathrm{T}\,(-iH_I^0(t_1))\,(-iH_I^0(t_2)) \dots (-iH_I^0(t_n)). \tag{3.323}
$$

Ebben az alakban azonban a fenti operátor szimmetrikus az időargumentumok minden permutációjára. Ezért ha egy változócserét végzünk úgy, hogy $t_1 \dots t_n \to$ ennek permutációja, akkor az integrandus változatlan marad. $n = 2$-re kiírva

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\,\mathrm{T}\,(-iH_I^0(t_1))\,(-iH_I^0(t_2)) = \frac{1}{2}\left[\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1\right] \mathrm{T}\,(-iH_I^0(t_1))\,(-iH_I^0(t_2)) =\\
&= \frac{1}{2}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2\,\mathrm{T}(-iH_I^0(t_1))\,(-iH_I^0(t_2)) = \frac{1}{2}\mathrm{T}\left[-i\int_0^t dt' H_I^0(t')\right]^2.
\end{aligned}
\tag{3.324}
$$

Az n-dik tagban $n!$-sal kell osztani, így végülis

$$
U(t) = \mathrm{T}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[-i\int_0^t dt' H_I^0(t')\right]^n = \mathrm{T}\,e^{-i\int_0^t dt' H_I^0(t')} \tag{3.325}
$$

3.7 Perturbációszámítás

A fenti képlet várható értékeit számoljuk ki különböző Fock-tér állapotok között. Mivel az exponenciális formában nem tudunk jól számolni, a kifejtett alakot használjuk. $H_I^0(x)$-ben, a kölcsönhatási kép következtében szabad tereket kell beírnunk, szabad időfejlődéssel. A kölcsönhatási Hamilton operátorban kvadratikusnál magasabb rendű tagok szerepelnek azonos helyen és időben

$$
H_I^0(t) = g\int d^3\mathbf{x}\Psi_1(x)\Psi_2(x)\Psi_3(x)\dots, \tag{3.326}
$$

ahol g-t nevezzük csatolási állandónak, Ψ_i-k általános mezők. U várható értékének kifejezésében emiatt a következő alakkal találkozunk:

$$
\langle p_1', \dots, p_m' \,|\mathrm{T}\,\Psi_1(x_1)\dots\Psi_n(x_n)|\, p_1, \dots, p_n\rangle\,. \tag{3.327}
$$

A be- ill. kimenő állapotoknál a vákuumból állítjuk elő az állapotot $\sqrt{2E_p}\,a_p^\dagger$-vel szorozva, vagyis amit ki kell számítani:

$$
\prod_{k=p_i,\,p_i'} \sqrt{2E_k}\,\left\langle 0\,\middle|a_{p_1'}\dots a_{p_m'}\mathrm{T}\,\Psi_1(x_1)\dots\Psi_n(x_n)a_{p_1}^\dagger\dots a_{p_n}^\dagger\,\middle|\,0\right\rangle. \tag{3.328}
$$

Ψ_i mindig tartalmaz egy keltő és egy eltüntető részt, azaz írhatjuk, hogy $\Psi_i = \Psi_i^+ + \Psi_i^-$, ahol Ψ_i^+ a keltő, Ψ_i^- az eltüntető operátort tartalmazza. Elkezdem Ψ_i^--t jobbra tolni, átkommutálva/antikommutálva a többi mezőn és $a^\dagger$-eken:

$$
\Psi_i^-\Psi_j = \pm\Psi_j\Psi_i^- + [\Psi_i^-, \Psi_j^+]_\pm. \tag{3.329}
$$

A kommutátor/antikommutátor egy szám, kiemelhető a várható érték elé. Következmény: Ψ_i^- vagy valakivel párba áll, és (anti) kommutátorként jelenik meg, vagy eléri a jobb oldali vákuumot. Ekkor azonban ezt eltünteti, azaz ez nulla járulékot ad. Tehát véges járulék csak onnan jön, ha a Ψ_i^- valamelyik másik mezővel (anti)kommutátort képez.

Először vizsgáljuk azt az esetet, mikor ez a járulék a $\Psi_i^-(x)$ és $\Psi_j^+(y)$ kommutátorából jön – azaz bozonikus tereink vannak, hogy ezt hangsúlyozzuk, írjunk $\Psi \to \Phi$. Ha $x_0 > y_0$ akkor a sorrend

$$\Phi^-(x)\Phi^+(y) = \Phi^+(y)\Phi^-(x) + [\Phi^-(x), \Phi^+(y)]. \tag{3.330}$$

Mivel a kommutátor arányos **1**-gyel, így vákuumvárható értéke önmaga. Másrészt $\langle 0|\Phi^+(y)\Phi^-(x)|0\rangle = 0$, hiszen Φ^- eltünteti a vákuumot. Ezért

$$[\Phi^-(x), \Phi^+(y)] = \big\langle 0|\Phi^-(x)\Phi^+(y)|0\big\rangle = \big\langle 0|(\Phi^-(x) + \Phi^+(x))(\Phi^-(y) + \Phi^+(y))|0\big\rangle = \langle 0|\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle = i\Delta(x-y). \tag{3.331}$$

Ha $x_0 > y_0$, akkor az időrendezett szorzat miatt fordítva szerepelnek az eredeti szorzatban a $\Phi(x)$ és $\Phi(y)$ operátorok, azaz az eredmény $x \leftrightarrow y$ helyettesítéssel jön. A két eset összefoglalva

$$\Theta(x_0 - y_0)i\Delta(x-y) + \Theta(y_0 - x_0)i\Delta(y-x) = iG_F(x-y), \tag{3.332}$$

ez a Feynman propagátor.

Másik lehetőség, hogy $\Phi^-(x)$ az egyik $a_{\mathbf{p}}^\dagger$-vel való kommutátora adja a járulékot:

$$\Phi^-(x)\sqrt{2E_p}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger = \sqrt{2E_p}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger \Phi^-(x) + [\Phi^-(x), \sqrt{2E_p}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \quad \Rightarrow \quad [\Phi^-(x), \sqrt{2E_p}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \langle 0|\Phi(x)|\mathbf{p}\rangle\,. \tag{3.333}$$

Ekkor tehát a form faktor jön be, a határozott impulzusú részecske hullámfüggvénye. Harmadik eset, ha a kimenő hullámfüggvényhez tartozó eltüntető operátorokat, $a_{p'}$-ket tolom el bal felé. Amikor ezek találkoznak Φ^+-szal, akkor a kommutátoruk az előző eset komplex konkugáltja lesz:

$$[\sqrt{2E_p}\, a_{\mathbf{p}}, \Phi^+(x)] = \langle \mathbf{p}|\Phi(x)|0\rangle\,, \tag{3.334}$$

a másik form faktor.

Ha a járulékunk Ψ_i^- és Ψ_j^+ antikommutátorából jön (azaz fermionjaink vannak), akkor a fenti gondolatmenethez nagyon hasonlóan kell eljárnunk. Azonban figyelni kell az antikommutálásnál fellépő negatív előjelekre. Mivel H_I^0-ben a fermionok mindig párban jelennek meg, ezért itt a következő megfontolás érvényes:

$$\Theta(t)\,\langle a|\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\bar{\Psi}(0)\Psi(0)|b\rangle + \Theta(-t)\,\langle a|\bar{\Psi}(0)\Psi(0)\bar{\Psi}(x)\Psi(x)|b\rangle\,, \tag{3.335}$$

és a második tagban egyszer át kell emelni két teret egymáson. Mivel itt a terek antikommutálnak, ezért ez behoz egy negatív előjelet. Emiatt a fenti $t < t_0$ esetben Δ-t negatív előjellel kell figyelembe venni, azaz a Feynman propagátor:

$$iG_F(x) = \Theta(x_0)\,\langle 0\,|\Psi(x)\bar{\Psi}(0)|\,0\rangle - \Theta(-x_0)\,\langle 0\,|\bar{\Psi}(0)\Psi(x)|\,0\rangle\,. \tag{3.336}$$

Mindkét (fermionikus és bozonikus) esetben tehát párosításokat kell figyelembe vennünk. Jelölés: ezeket a párosításokat jelöljük összekötéssel:

$$\langle \ldots \Psi(x) \ldots \Psi(y) \ldots\rangle\,. \tag{3.337}$$

Ha az összes $\Phi^\pm$ teret elvisszük a jobb ill. bal oldali vákuumhoz, akkor minden járulék ilyen párosításokból kell jöjjön. Ez a

Tétel: Wick tétel:

$$\begin{aligned}\langle p_1', \ldots, p_m'\,|\mathrm{T}\,\Psi_1(x_1)\ldots\Psi_n(x_n)|\,p_1, \ldots, p_n\rangle &= \sum_{\text{pairs}} \langle p_1', \ldots, p_m'\,|\mathrm{T}\,\Psi_1(x_1)\ldots\Psi_n(x_n)|\,p_1, \ldots, p_n\rangle = \\ &= \sum_{\text{pairs}} \prod_{\text{internal}} iG_F(x_i - x_j) \prod_{\text{external}} u(p)e^{-ipx}v(p')e^{ip'y},\end{aligned} \tag{3.338}$$

ahol u illetve v a megfelelő hullámfüggvényeket jelölik.

3.7.1 Szórási hatáskeresztmetszet a skalár modellben

Most már ki tudunk számolni egy 2–2 szórási hatáskeresztmetszetet a Φ^4 modellben. (3.308) szerint egyenlő tömegek esetén

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|M|^2}{64\pi^2\, s}, \tag{3.339}$$

és

$$(2\pi)^4\delta(q_1+q_2-p_1-p_2)M = \left\langle q_1, q_1 \left| \mathrm{T} e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I^0(t')} \right| p_1, p_2 \right\rangle, \qquad \text{ahol} \qquad H_I^0(t) = \int d^3\mathbf{x}\, \frac{\lambda}{24}\Phi_0^4(t,\mathbf{x}). \tag{3.340}$$

Első nemtriviális rendben

$$M = \frac{-i\lambda}{24}\int d^4x\, \left\langle q_1, q_1 \left| \Phi_0^4(x) \right| p_1, p_2 \right\rangle. \tag{3.341}$$

Ha p, q-k különböző impulzusok, akkor az egyetlen lehetséges járulék, ha a négy Φ_0-t a külső impulzusokhoz kötjük. Ezt összesen $4! = 24$ féleképp tehetjük meg, és mivel mindegyikben a hely x, ugyanazt a járulékot adják: $e^{\pm ipx}$. Tehát a járulék

$$-i\lambda \int d^4x\, e^{i(q_1+q_2-p_1-p_2)x} = -i\lambda\, (2\pi)^4\delta(q_1+q_2-p_1-p_2) \quad \Rightarrow \quad M = -i\lambda. \tag{3.342}$$

A szórási hatáskeresztmetszet tehát, tömegközépponti energiával kifejezve ($s = E^2$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2\, E^2}. \tag{3.343}$$

Az eredmény szögfüggetlen, vagyis megfelel egy merev gömbön való szórásnak. A szóró gömb sugara azonban függ a szórási energiától! Látható az is, hogy a λ paraméter szoros kapcsolatban van a szórási tulajdonságokkal. A teljes hatáskeresztmetszet

$$\sigma_{\mathtt{tot}} = \frac{\lambda^2}{16\pi\, E^2}. \tag{3.344}$$

3.7.2 Feynman diagramok

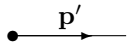
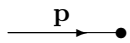
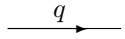
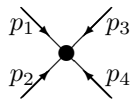
Az $e^{-i\int H_I}$ kifejtésénél valahanyadik rendben adódó kifejezés

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!}\left(\frac{-i\lambda}{24}\right)^n \int d^4x_1 \ldots d^4x_a \left\langle p' \ldots \left|\Phi^4(x_1)\ldots\Phi^4(x_a)\right| p \ldots \right\rangle \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{-i\lambda}{24}\right)^n \int d^4x_1 \ldots d^4x_a e^{ip'x_i} \ldots e^{ipx_j} \ldots \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, e^{-iq(x_u-x_v)} iG_F(q) \ldots \end{aligned} \tag{3.345}$$

Minden integrál pont 4 exponenciálishoz tartozik, mert 4-szer fodul elő egy adott $\Phi(x)$. Ezért amikor kiintegrálom az x_i-t, akkor

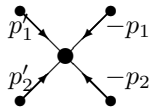
$$\int d^4x_i e^{ix_i(p_1+p_2+p_3+p_4)} = (2\pi)^4\delta(p_1+p_2+p_3+p_4). \tag{3.346}$$

A kiintegrálás után megmaradnak a Dirac-delták, a Feynman propagátorok és az integrálások a Feynman propagátorok impulzusaira. Ezeket a következő szabályokkal foglalhatjuk össze:

	befolyó impulzus	1 (form faktor)
	kimenő impulzus	1 (form faktor)
	belső propagátor	$iG_F(q)$
	vertex	$\frac{-i\lambda}{24}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)$

Ezekből az elemekből az összes lehetséges kombinációt össze kell állítani (Feynman diagramok), és a fenti szabályok szerint ki kell értékelni a diagramot.

A legegyszerűbb példa a 2-részecske szórásra



$$= -i\lambda\,(2\pi)^4\delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2), \tag{3.347}$$

a 24-es faktor a párosítások számával kiesik.

3.8 Az elektromágneses kölcsönhatás

A részcskék között négy alapvető kölcsönhatás lehetséges: az erős, az elektromágneses és a gyenge kölcsöhatás, valamint a gravitáció. Ez a sorrend a kölcsönhatások erősségének sorrendje is.

Miért látjuk a gyengébb kölcsönhatásokat? Ha pl. az e^- és e^+ között kétféle erő hatna, az elektromágneses, és egy milliószor kisebb erősségű másik kölcsönhatás, akkor ezt a másik erőt a mai kísérletek alapján nem látnánk. Az egyetlen lehetőség egy gyengébb erő számára, hogy kevesebb szimmetriája van, mint az erősebbnek. Ez valóban így van az alapvető erőknél. Az erős kölcsönhatás csak a kvarkokra (hadronokra) hat, az elektromágneses kölcsönhatás hat a leptonokra is; a gyenge kh. felelős az íz megváltoztatásáért.; végül a gravitáció mindenkire hat, és nem lehet leárnyékolni, ezért látható nagy méretekben.

3.8.1 Az elektromágneses kölcsönhatás Lagrange függvénye

Az elektromágnesség elméletét leíró Maxwell-egyenletek Lagrange-formában is megfogalmazhatóak. Ez már elvileg szerepelt az Elektrodinamika keretein belül; most ismételjük át gyorsan.

Kezdjük az anyag és elektromágneses sugárzás kölcsönhatásának hatásfüggvényével. Klasszikus érvelés: álló részecskére a potenciális energia $V = \int d^3\mathbf{x}\varrho(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$, ahol ϱ a töltéssűrűség, φ az elektromos potenciál. Mozgó részecskére a relativisztikus invariancia alapján írhatjuk, hogy $V = \int d^3\mathbf{x} j_\mu(\mathbf{x})A^\mu(\mathbf{x})$, ez írható a Lagrange függvénybe.

Ha kvantum szinten kezeljük a fermionokat, akkor Ψ hullámfüggvénnyel leírt részecske töltéseloszlása $\varrho(x) = e\Psi^*\Psi$; a Dirac-egyenlet szerint ez négyesvektorrá $j_\mu = e\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ módon alakítható. Ilyen módon egy fermionra az elemi kölcsönhatást leíró Lagrange-függvénysűrűség részlet

$$\mathcal{L}_I = -e\,\bar{\Psi}\gamma_\mu A^\mu\Psi. \tag{3.348}$$

A Dirac-féle szabad Lagrange sűrűséggel együtt

$$\bar{\Psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\Psi - e\bar{\Psi}\gamma_\mu A^\mu\Psi = \bar{\Psi}(\gamma_\mu(i\partial^\mu - eA^\mu) - m)\Psi. \tag{3.349}$$

Milyen általános elvek állnak a háttérben? Vegyük észre, hogy a vektorpotenciál egy megmaradó áramhoz csatolódik. Valóban, a szabad Dirac-Lagrange függvénynek van egy fázis-szimmetriája: $\Psi' = e^{-ie\alpha}\Psi$, erre valóban invariáns a $\Psi^*\Psi$ kombináció. A szimmetriához tartozó megmaradó áram megállapításához, mint láttuk, lokális infinitezimális transzformációt kell vennünk. Az infinitezimális transzformáció

$$\delta\Psi = -ie\alpha\Psi, \qquad \delta\bar{\Psi} = ie\alpha\bar{\Psi}, \tag{3.350}$$

és vegyünk $\alpha(x)$-et. Erre a Dirac-Lagrange függvény transzformációja

$$\delta\mathcal{L} = \delta\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\delta\Psi = ie\alpha\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)ie\alpha\Psi = e\partial_\mu\alpha\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad \Rightarrow \quad j^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \tag{3.351}$$

valóban az elektromos áram.

Mivel azonban a megmaradó áramhoz csatolódunk, lehetőségünk van arra, hogy akár helyfüggő transzformációra is biztosítsuk az invarianciát. Valóban, a vektorpotenciállal

$$\delta\mathcal{L} = \delta\left[\bar{\Psi}(\gamma_\mu(i\partial^\mu - eA^\mu) - m)\Psi\right] = e\partial^\mu\alpha\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi - e\delta A^\mu\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A^\mu = \partial^\mu\alpha. \tag{3.352}$$

Ha tehát a fermion hullámfüggvények lokális transzformációjával egyidejűleg a négyespotenciált a lokális transzformáció paraméterének deriváltjával változtatjuk, akkor a Lagrange függvény a *lokális* transzformációkra is invariáns marad.

Elektrodinamikában ezt a transzformációt mértéktranszformációnak hívtuk, azt a jelenséget, hogy a fizikai mennyiségek mértéktranszformációkor nem változnak, mértékinvarianciának neveztük. A fentiek miatt a mértékinvariancia segítségével a Lagrange-függvény globális fázis-invarianciáját lokális invarianciává lehetett tenni. A globális invariancia a töltésmegmaradással egyenértékű $\Rightarrow$ a kölcsönhatások a töltésmegmaradásból következnek. Ez a mérték-elv.

Korábban már néztük a Lorentz-vektor mezők Lagrange függvényét ($\varepsilon = \mu = 1$ mértékegységeket használva):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{3.353}$$

ahol $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ a térerősségtenzor. Ez szabad foton-gázt ír le. Láttuk, hogy ez a Lagrenge fügvény is mértékinvariáns $\Rightarrow$ a teljes Lagrange függvény mértékinvariáns!

Látható módon a mértékinvariancia közvetlen következménye, hogy a deriválás operátora megváltozik

$$\bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi \to \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\Psi, \tag{3.354}$$

azaz a közönséges deriváltat kicseréltük $i\partial_\mu \to i\partial_\mu - eA_\mu \equiv iD_\mu$. Ezt nevezzük kovariáns deriváltnak. Lokális fázistranszformáció esetén $i\partial_\mu\Psi$ nem homogén módon transzformálódik, azonban a kovariáns derivált már igen:

$$(iD_\mu\Psi)' = e^{-ie\alpha}\, iD_\mu\Psi. \tag{3.355}$$

A térerősségtenzor is kifejezhető a kovariáns deriválttal:

$$ieF_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = (\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial_\nu + ieA_\nu) - \{\mu \leftrightarrow \nu\}. \tag{3.356}$$

Mindezek alapján a globális transzformáció úgy tehető lokálissá, hogy a deriváltakat kicseréljük kovariáns deriváltra, és hozzáadjuk a kovariáns deriváltak kommutátorából képzett térerősségtenzor kvadratikus alakját.

A mérték-elv, azaz a lokálissá tett globális transzformáció generálta Lagrange függvény nemcsak az elektrodinamikában működik. A téridő globális transzformációja a Lorentz-transzformáció. Ezt is lokálissá lehet tenni: ehhez be kell vezetni egy "mérték-teret", amellyel az inhomogén módon transzformálódó derivált helyett homogén módon transzformálódó kovariáns deriváltat képezhetünk. Ezt a mértékteret Christoffel szimbólumnak nevezzük, és a geometriával hozzuk kapcsolatba. A lokálissá tett speciális relativitáselmélet pedig az általános relativitáselmélet, melynek Maxwell-egyenletei az Einstein egyenletek.

3.8.2 Elektromágneses folyamatok

Az elektromágneses kölcsönhatásnál a fermionok mezőkkel hatnak kölcsön, a kölcsönhatás erőssége a töltés. A kölcsönhatás közvetítő részcskéje a foton, nulla tömegű.

A QED Feynman szabályai

foton propagátor	$iG_{\mu\nu}(p) = \dfrac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}$
foton form faktorok	bejövő $\varepsilon_{\varrho\mu}(\mathbf{p})$; kimenő $\varepsilon^*_{\varrho\mu}(\mathbf{p})$
elektron propagátor	$i\mathcal{G}(p) = \dfrac{i}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon}$
elektron form faktorok	bejövő e^- $u_s(\mathbf{p})$, bejövő e^+ $\bar{v}_s(\mathbf{p})$; kimenő e^- $\bar{u}_s(\mathbf{p})$, kimenő e^+ $v_s(\mathbf{p})$
vertex	$-ie\gamma_\mu\ (2\pi)^4\delta(p + k - q)$

Milyenek a tipikus elektromágneses folyamatok? Az ábrázolásukhoz a Feynman diagramokat használjuk, amelyet egy idősornak is felfoghatunk. Az elemi kölcsönhatás egy töltött részecske elnyelése, egy foton és egy másik részecske kibocsátása. Diagram-nyelven:

A bemenő részecske $\equiv$ kimenő antirészecske ekvivalencia alapján, valamint mert a foton önmaga antirészecskéje, ez a diagram sokkal több dolgot is leír: lehet a foton bemenő; lehet bemenő és kimenő antirészecske; lehet egy bemenő foton, kimenő részecske és antirészecske, stb. A perturbációszámítás alapján

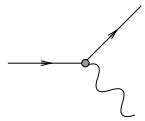


Figure 3.2: Elemi folyamat

ebből az elemi kölcsönhatásból kell felépíteni a bonyolultabb eseteket; fontos, hogy a "belső" vonalakon nem kell teljesíteni a $p^2 = m^2$ tömeghéj feltételt – a belső részecskék virtuális részecskék, számolásukkor az átmeneti amplitúdójukat leíró Feynmann propagátort kell használni. Az elektrodinamikában lehetséges tipikus másodrendű folyamatok:

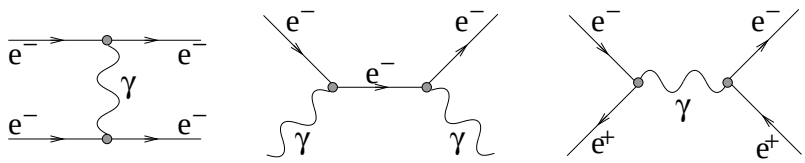


Figure 3.3: Másodrendű folyamatok: Coulomb-szórás, Compton-szórás, párkeltés.

A Coulomb szórás és a párkeltés lényegében hasonló folyamatok, hiszen megkaphatók a bemenő részecske $\equiv$ kimenő antirészecske azonosítás felhasználásával $\Rightarrow$ a mátrixelem ugyanaz.

Ezek variációja a fékezési sugárzás, mikor az atomok teréből kilépő foton okoz Compton szórást; vagy az atommag terében történő párkeltés, amely a Compton szórás elforgatottja.

3.8.3 Anomális mágneses momentum

Külső térbe helyezett e^- mozgását vizsgálva a mozgásegyenlet:

$$(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\Psi = 0. \tag{3.357}$$

Ezt megszorozva $i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ + m$ operátorral, és felhasználva, hogy

$$(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial_\nu - eA_\nu)\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial_\nu - eA_\nu)\left[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right] = (i\partial_\mu - eA_\mu)^2 - i\sigma^{\mu\nu}(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial_\nu - eA_\nu), \tag{3.358}$$

ahol

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \Rightarrow \quad \sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] = \varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}\Sigma_k, \qquad \sigma^{0i} = i\gamma^0\gamma^i \tag{3.359}$$

A megfelelő együtthatót is antiszimmetrizálni kell

$$(-i)\frac{1}{2}\left[(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial_\nu - eA_\nu) - (i\partial_\nu - eA_\nu)(i\partial_\mu - eA_\mu)\right] = -\frac{e}{2}F_{\mu\nu}. \tag{3.360}$$

Amit kapunk:

$$\left[(i\partial_\mu - eA_\mu)^2 - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2\right]\psi = \left[(i\partial_\mu - eA_\mu)^2 - m^2 + ie\gamma^0\gamma^i E_i - eB_k\Sigma_k\right]\psi = 0. \tag{3.361}$$

A skalár és vektorpotenciállal $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$. Homogén mágneses tér esetén $A_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_j x_k$, ekkor $\partial_i A_i = 0$, és Fourier térben

$$(i\partial_i + eA_i)^2 \to (p_i + eA_i)^2 = \mathbf{p}^2 + 2eA_i p_i + e^2\mathbf{A}^2 = \mathbf{p}^2 + e^2\mathbf{A}^2 + eB_i L_i, \tag{3.362}$$

vagyis ekkor Fourier térben, és felhasználva, hogy az elektron spinje $S_i = \frac{1}{2}\Sigma_i$:

$$\left[p^2 - m^2 - \frac{e^2}{4}(\mathbf{B}\times\mathbf{r})^2 - eB_i(L_i + 2S_i)\right]\psi = 0. \tag{3.363}$$

Láthatóan a spinhez kétszer akkora mágneses momentum tartozik, mint a pálya-impulzusmomentumhoz. Ez az arány a giromágneses faktor (vagy Landé-féle g-faktor), elektronra $g = 2$.

Ezt az eredményt megkaphatjuk az elektron szórás segítségével is. Ehhez nézzük a $\langle \mathbf{p}'\xi'|\mathbf{p}\xi\rangle$ mátrixelemet, ahol ξ az elektron spin hullámfüggvényét jelenti. Ha egy potenciálon szóródna az elektron, vagyis a Hamilton operátor kölcsönható része $H_I^0 = \Psi^\dagger V \Psi$ lenne, akkor ez a mátrixelem

$$i\mathcal{M} = -iu^\dagger_{\mathbf{p}'} V(q) u_{\mathbf{p}} \to -2im\xi'^\dagger V(q)\xi \tag{3.364}$$

módon lenne kiszámítható, ahol a jobb oldali alak a $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \approx 0$ nemrelativisztikus limeszben érvényes.

Az elektrodinamikában a kölcsönhatás Hamilton operátora $H_I^0 = eA_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$, ahol most A külső tér, ez legyen sztatikus. Fourier térben a kölcsönhatás:

$$-i\int dt H_I^0(t) = -ie\int d^4x A_\mu(x)\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) = -ie\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(p'-q-p)A_\mu(\mathbf{q})\bar{\Psi}(p')\gamma^\mu\Psi(p). \tag{3.365}$$

Ezen felül a klasszikus tér közel homogén is legyen, azaz ahol csak lehet $\mathbf{q} \to 0$ limeszt veszünk.

A $\langle \mathbf{p}'\xi'|\mathbf{p}\xi\rangle$ mátrixelem első rendben, Fourier térben

$$(-ie)A_\mu(\mathbf{q})\left\langle \mathbf{p}'\xi'|\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi|\mathbf{p}\xi\right\rangle \quad \Rightarrow \quad i\mathcal{M} = (-ie)A_\mu(q)\bar{u}_{\mathbf{p}'}\gamma^\mu u_{\mathbf{p}}. \tag{3.366}$$

Külső elektromos tér esetén $A_\mu = (\Phi, 0)$, azaz

$$i\mathcal{M} = (-ie\Phi(q))\bar{u}_{\mathbf{p}'}\gamma^0 u_{\mathbf{p}} = (-ie\Phi(q))u^\dagger_{\mathbf{p}'}u_{\mathbf{p}}. \tag{3.367}$$

Ez megfelel egy $V(x) = e\Phi(x)$ potenciálion történő nemrelativisztikus szórásnak, ahogyan várjuk is.

Külső mágneses tér esetén $A^\mu = (0, \mathbf{A})$, ekkor

$$i\mathcal{M} = -ieA_i(q)\bar{u}_{\mathbf{p}'}\gamma_i u_{\mathbf{p}}. \tag{3.368}$$

Felhasználva az u alakját $\mathbf{p} \to 0$ nemrelativisztikus határeset közelében, ahol $E \approx m$

$$u = \begin{pmatrix}\sqrt{p\bar{\sigma}}\xi \\ \sqrt{p\sigma}\xi\end{pmatrix} = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\sqrt{1+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}/m}\,\xi \\ \sqrt{1-\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}/m}\,\xi\end{pmatrix} \approx \sqrt{m}\begin{pmatrix}(1+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}/2m)\,\xi \\ (1-\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}/2m)\,\xi\end{pmatrix}. \tag{3.369}$$

A $\gamma_0\gamma_i$ szorzat

$$\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i\end{pmatrix}, \tag{3.370}$$

azaz

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\mathbf{p}'}\gamma^i u_{\mathbf{p}} &= m\begin{pmatrix}\xi'^\dagger(1+\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}/2m) & \xi'^\dagger(1-\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}/2m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}/2m)\,\xi \\ (1-\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}/2m)\,\xi\end{pmatrix} = \\ &= m\left[\xi'^\dagger\left(1+\frac{\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right)\sigma_i\left(1+\frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right)\xi - \xi'^\dagger\left(1-\frac{\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right)\sigma_i\left(1-\frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right)\xi\right] = \xi'^\dagger\left[\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\sigma_i + \sigma_i\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\right]\xi,\end{aligned} \tag{3.371}$$

vagyis eltűnik $\mathbf{p}' = \mathbf{p} = 0$ limeszben. Mivel $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$, ezért

$$\bar{u}_{\mathbf{p}'}\gamma^i u_{\mathbf{p}} = -(p'_i + p_i)\xi'^\dagger\xi + i\varepsilon_{ijk}(p'-p)_j\xi'^\dagger\sigma_k\xi = -(p'_i+p_i)\xi'^\dagger\xi + i\varepsilon_{ijk}q_j\xi'^\dagger\sigma_k\xi. \tag{3.372}$$

Visszaírva ezt a formát

$$i\mathcal{M} = -ieA_i(q)(p'_i+p_i)\xi'^\dagger\xi + ieA_i(q)\,i\varepsilon_{ijk}q_j\xi'^\dagger\sigma_k\xi. \tag{3.373}$$

Az első tagban $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$-t beírva kapjuk állandó mágneses térben:

$$-2ieA_ip_i\xi'^\dagger\xi = -ie\varepsilon_{ijk}B_jx_kp_i\xi'^\dagger\xi = -ie\xi'^\dagger B_jL_j\xi. \tag{3.374}$$

A második tagban

$$B_k = \varepsilon_{kji}\partial_jA_i \Rightarrow -i\varepsilon_{ijk}q_jA_i. \tag{3.375}$$

Ezzel a második tagban írhatjuk

$$ieA_i(q)\, i\varepsilon_{ijk}q_j\xi'^{\dagger}\sigma_k\xi = -ie\xi'^{\dagger}B_k\sigma_k\xi = -2ie\xi'^{\dagger}B_kS_k\xi, \tag{3.376}$$

ahol $S_k = \sigma_k/2$ az elektron spin operátora. Ezzel

$$i\mathcal{M} = -2im\xi'^{\dagger}\mathbf{B}\frac{\mathbf{L}+2\mathbf{S}}{2m}\xi \quad \Rightarrow \quad V = \frac{e}{2m}\mathbf{B}(\mathbf{L}+g\mathbf{S}), \qquad g = 2 \tag{3.377}$$

potenciálon való szórásnak felel meg.

Látható tehát, hogy általában a $\langle \mathbf{p}'\xi'|\mathbf{p}\xi\rangle$ szórásban a külső térben lineáris tag vizsgálata vezet el a mágneses momentum értékéhez. Általában QED-ben úgy írható fel, hogy

$$i\mathcal{M} = -ieA_\mu(q)\bar{u}_{\mathbf{p}'}\Gamma^\mu(\mathbf{p}',\mathbf{p})u_{\mathbf{p}} = -ieA_\mu(q)\bar{u}_{\mathbf{p}'}\left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)\right]u_{\mathbf{p}}. \tag{3.378}$$

A Γ^μ az effektív vertex, vagyis a belső fotonok kiküszöbölése után a kölcsönhatás $-eA_\mu\bar{\psi}\Gamma^\mu\psi$ alakú. Vezető rendben, ahogy láttuk $F_1 = 1$, $F_2 = 0$.

Állandó elektromos térben $q = 0$-nál a második tag nem ad járulékot, ekkor ugyanaz a levezetés mint előbb, vagyis megfelel egy

$$V(x) = eF_1(0)\Phi(x) \tag{3.379}$$

potenciálon való szórásnak. Vagyis az elektron töltése $eF_1(0)$, de másrészt a töltés $e \quad \Rightarrow \quad F_1(0) = 1$.

Mágneses térben az első tag ugyanazt adja, mint fent, csak $F_1(0)$-val szorozva. A második tagból $\mathbf{p}' = \mathbf{p} = 0$ esetre ugyanazt kapjuk $F_2(0)$-val szorozva, hiszen $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ijk}\Sigma_k$:

$$+ie(2m)A_i\xi'^{\dagger}\frac{i\varepsilon_{ijk}q_j\sigma_k}{2m}\xi\, F_2(0) = ie\, F_2(0)\, A_i i\varepsilon_{ijk}q_j\xi'^{\dagger}\sigma_k\xi \tag{3.380}$$

Összesen tehát a megfelelő potenciál

$$V_2(x) = g\frac{e}{2m}\mathbf{Bs}, \qquad g = 2(F_1(0)+F_2(0)) = 2(1+F_2(0)) \equiv 2(1+a_e). \tag{3.381}$$

Vagyis kölcsönható elméletben a giromágneses faktor nem 2, hanem attól valamennyire eltér.

Az elsőrendű vertex-korrekció kiszámítható és véges értéket ad F_2-re, értéke

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.0011614 \tag{3.382}$$

(Schwinger, 1948). A giromágneses faktor kísérletileg is mérhető, pl. a H-atom hiperfinom felhasadásának mérésével. A mérés értéke $a_e = 0.0011597$, nagyon jó egyezésben a számításokkal.

3.8.4 Az elektron-müon szórás

A müon vertexfüggvénye ugyanaz mint az elektroné

$$H_I = H_I^e + H_I^\mu, \qquad H_I^{e,\mu} = -e\int d^3\mathbf{x}\,\bar{\Psi}_{e,\mu}A_\mu\gamma^\mu\Psi_{e,\mu}. \tag{3.383}$$

Ki akarjuk számolni a

$$\langle\bar{\mu}^+(p_4,s_4)\mu^-(p_3,s_3)|e^-(p_1,s_1)e^+(p_2,s_2)\rangle \tag{3.384}$$

mátrixelemet. A diagram olyan mint az elektron párkeltésnél. Ehhez másodrendű tagokat kell figyelembe venni

$$\mathrm{T}\frac{1}{2}(-i\int H_I)^2 \to \int d^4x d^4y (ie)^2\mathrm{T}\,\bar{\Psi}_\mu(x)A_\nu(x)\gamma^\nu\Psi_\mu(x)\bar{\Psi}_e(y)A_\mu(y)\gamma^\mu\Psi_e(y). \tag{3.385}$$

Mátrixelemei:

$$-e^2\,\langle\bar{\mu}^+\mu^-|\mathrm{T}\,\bar{\Psi}_\mu A_\nu\gamma^\nu\Psi_\mu\bar{\Psi}_e A_\mu\gamma^\mu\Psi_e|e^-e^+\rangle = -e^2\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\nu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_3}(p_3)\gamma^\mu v_{s_4}(p_4)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-p_3-p_4). \tag{3.386}$$

Tehát

$$\mathcal{M}_{fi} = e^2 \bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma_\mu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_3}(p_3)\gamma^\mu v_{s_4}(p_4)\frac{1}{(p_1+p_2)^2}. \tag{3.387}$$

Nekünk $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ kell. Ehhez

$$(\bar{v}\gamma_\mu u)^* = (v^\dagger\gamma_0\gamma_\mu u)^* = u^\dagger\gamma_\mu^\dagger\gamma_0 v = \bar{u}\gamma_\mu v, \tag{3.388}$$

mert $\gamma_\mu^\dagger\gamma_0 = \gamma_0\gamma_\mu$. Ezzel

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{s^2}(\bar{u}_1\gamma_\mu v_2\bar{v}_4\gamma^\mu u_3)(\bar{u}_3\gamma^\nu v_4\bar{v}_2\gamma_\nu u_1). \tag{3.389}$$

Egyszerűbb végeredményhez

- polarizálatlan bemenő állapot $\Rightarrow$ átlagolás
- minden végállapotot összemérem $\Rightarrow$ összegzés

Azaz

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2}\sum_{s_1}\frac{1}{2}\sum_{s_2}\sum_{s_3,s_4}|\mathcal{M}_{fi}|^2. \tag{3.390}$$

Mivel

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m, \qquad \sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} - m, \tag{3.391}$$

ezért amit kapunk

$$\begin{aligned}\bar{u}_1\gamma_\mu v_2\bar{v}_2\gamma_\nu u_1 &= \mathrm{Tr}(\not{p}_1 - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_e)\gamma_\nu \\ \bar{v}_4\gamma^\mu u_3\bar{u}_3\gamma^\nu v_4 &= \mathrm{Tr}(\not{p}_4 + m_\mu)\gamma^\mu(\not{p}_3 - m_e)\gamma^\nu.\end{aligned} \tag{3.392}$$

Mivel

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2n+1}\} = 0, \qquad \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = 4g_{\mu\nu}, \qquad \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varrho\gamma_\sigma = 4(g_{\mu\nu}g_{\varrho\sigma} - g_{\mu\varrho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\varrho}), \tag{3.393}$$

ezért

$$\mathrm{Tr}(\not{p}_1 - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_e)\gamma_\nu = 4[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1p_2 + m_e^2)], \tag{3.394}$$

ugyanígy a müonokra is. A teljes járulék

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{s^2}\left[(p_1p_3)(p_2p_4) + (p_1p_4)(p_2p_3) + (p_1p_2)m_\mu^2 + (p_3p_4)m_e^2 + 4m_e^2m_\mu^2\right]. \tag{3.395}$$

További egyszerűsítéshez vezet, hogy ha $m_e \approx 0$-t veszünk. TK-i rendszerben számolva

$$p_1 = (E, \mathbf{p}), \quad p_2 = (E, -\mathbf{p}), \quad p_3 = (E, \mathbf{k}), \quad p_4 = (E, -\mathbf{k}), \tag{3.396}$$

valamint $E \approx p$. Ezzel

$$p_1p_2 = E^2 + \mathbf{p}^2 \approx 2E^2, \quad p_1p_3 = p_2p_4 = E^2 - \mathbf{pk} \approx E^2 - Ek\cos\theta \quad p_1p_4 = p_2p_3 = E^2 + \mathbf{pk} \approx E^2 + Ek\cos\theta. \tag{3.397}$$

Így, mivel $s = 4E^2$:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{2E^4}\left[E^2(E - k\cos\theta)^2 + E^2(E + k\cos\theta)^2 + 2E^2m_\mu^2\right] = e^4\left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]. \tag{3.398}$$

A szórási hatáskeresztmetszet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}\sqrt{\frac{\lambda(s, m_\mu^2, m_\mu^2)}{\lambda(s,0,0)}}\overline{|\mathcal{M}|^2}. \tag{3.399}$$

Mivel

$$\lambda(s, m^2, m^2) = s^2 - 4sm_\mu^2 = 16E^2(E^2 - m^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\lambda(s, m_\mu^2, m_\mu^2)}{\lambda(s,0,0)}} = \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}. \tag{3.400}$$

Vagyis

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2(4E^2)}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\left[1+\frac{m_\mu^2}{E^2}+\left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]. \tag{3.401}$$

A teljes hatáskeresztmetszethez a szögintegrálok

$$\int d\Omega 1 = 4\pi, \qquad \int d\Omega \cos^2\theta = \frac{4}{3}\pi, \tag{3.402}$$

ezzel, valamint $\alpha = e^2/4\pi$-vel:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\left(1+\frac{m_\mu^2}{2E^2}\right). \tag{3.403}$$

Láthatóan akkor van csak járulék, ha az energia nagyobb mint a müon tömege. A gyökös indulás jellemző minden tömeges részecskére. A számolás eredménye az előfaktor és az utolsó tag. Nagy E-re megkapjuk a szokásos $1/E^2$ viselkedést:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha}{3s} \quad \text{ha} \quad s \gg m_\mu^2. \tag{3.404}$$

Az egész számolás ugyanez marad, ha müonok helyett kvarkok vannak a végállapotban. Kvarkok töltése $e_q = Qe$, ahol $Q = 2/3$ az u, c, t kvarkokra és $Q = -1/3$ a d, s, b kvarkokra. Emiatt tehát

$$\sigma_{tot}(e^-e^+ \to \bar{q}q) = Q^2\frac{\pi\alpha^2}{3E^2}\sqrt{1-\frac{m_q^2}{E^2}}\left(1+\frac{m_q^2}{2E^2}\right). \tag{3.405}$$

Nézzük a következő arányt:

$$R = \frac{\sigma_{tot}(e^-e^+ \to \text{hadron})}{\sigma_{tot}(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+)} = \frac{N_c\sum_q \sigma_{tot}(e^-e^+ \to \bar{q}q)}{\sigma_{tot}(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+)}, \tag{3.406}$$

mert a hadronokba való átmenet bámilyen színű kvarkon keresztül történhet. Ha olyan energiákat veszünk, amelyek két kvark tömege közé esnek, akkor

$$R(s) \approx \sum N_c \sum_q \Theta(s > 4m_q^2)Q_q^2. \tag{3.407}$$

Pl. $s = 1$ GeV esetén az u, d, s kvarkok számítanak, azaz $R \approx 2$.

3.8.5 Elektron-müon szórás

Ha a $\langle e^-(p_2, s_2)\mu^-(p_4, s_4)|e^-(p_1, s_1)\mu^-(p_3, s_3)\rangle$ folyamatot vizsgáljuk, akkor ami változik (3.387)-hez képest, hogy csak u-k vannak, nem v-k

$$\mathcal{M}_{fi} = e^2\bar{u}_{s_2}(p_2)\gamma_\mu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_3}(p_3)\gamma^\mu u_{s_4}(p_4)\frac{1}{(p_1-p_2)^2}. \tag{3.408}$$

Mivel a spin-átlagolt, felösszegzettt végállapotos eredményben $\sum u\bar{u}$ kell $\sum v\bar{v}$ helyett:

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m = -(-\not{p} - m) = -\sum_s v_s(-p)\bar{v}_s(-p), \tag{3.409}$$

ezért csak az impulzusok előjelében lesz változás (3.395)-hez képest

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{s^2}\left[(p_1p_3)(p_2p_4) + (p_1p_4)(p_2p_3) - (p_1p_2)m_\mu^2 - (p_3p_4)m_e^2 + 4m_e^2m_\mu^2\right], \tag{3.410}$$

vagy, ha $m_e \approx 0$:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(p_1+p_2)^4}\left[(p_1p_3)(p_2p_4) + (p_1p_4)(p_2p_3) - (p_1p_2)m_\mu^2\right]. \tag{3.411}$$

Amit látunk, hogy az $\mathcal{M}$ mátrix elemei a két folyamatban ugyanazok, ha minden impulzust befelé irányítunk, és ennek oka a már látott

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = -\sum_s v_s(-p)\bar{v}_s(-p) \tag{3.412}$$

összefüggés (egy előjel az $\mathcal{M}$-ben elképzelhető, de nem számít). Vagyis egy bemenő részecske megfelel egy ellentétes impulzusú kimenő antirészecskének. Ez a TCP szimmetria következménye, és az $\mathcal{M}$-mátrixra vonatkoztatva ezt keresztezési (crossing) szimmetriának mondják.

A kinematika azonban teljesen mássá teszi a végeredényt. A mostani esetben (kb. tömegtelen e^- esete)

$$p_1 = (p, \mathbf{p}), \quad p_3 = (E, -\mathbf{p}), \quad p_2 = (p, \mathbf{p}'), \quad p_4 = (E, -\mathbf{p}'), \qquad E = \sqrt{p^2 + m_\mu^2}. \tag{3.413}$$

Ezzel

$$p_1p_2 = p^2(1-\cos\theta), \quad (p_1+p_2)^2 = 2p_1p_2 = 2p^2(1-\cos\theta), \quad p_1p_3 = p_2p_4 = p(E+p), \quad p_1p_4 = p_2p_3 = p(E+p\cos\theta), \tag{3.414}$$

vagyis

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{2e^4}{p^2(1-\cos\theta)^2}\left[(E+p)^2 + (E+p\cos\theta)^2 - (1-\cos\theta)m_\mu^2\right]. \tag{3.415}$$

A hatáskeresztmetszet ($s = (p_1+p_3)^2 = (E+p)^2$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2(E+p)^2} = \frac{\alpha^2}{2p^2(E+p)^2(1-\cos\theta)^2}\left[(E+p)^2 + (E+p\cos\theta)^2 - (1-\cos\theta)m_\mu^2\right]. \tag{3.416}$$

Ha $E \gg m_\mu^2$, azaz ultrarelativisztikus limeszben

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2(1-\cos\theta)^2}\left[4 + (1+\cos\theta)^2\right]. \tag{3.417}$$

Kis szögű szórásnál $\sim 1/\theta^4$ divergencia $\Rightarrow$ a teljes hatáskeresztmetszet divergál, mint a Coulomb szórás esetén.

3.9 Az erős kölcsönhatás mértékelmélete

Először nézzük a kvarkok Lagrange függvényét. Válasszunk ki egy kvarkot, pl. a d kvarkot, jelöljük a hullámfüggvényét $\Psi \equiv d$-val. Ez fermion, és van egy szín indexe. A három szín-állapot egymással teljesen egyenrangú, tehát a szabad Lagrange-függvény alakja

$$\mathcal{L}_d = \sum_{i=1}^{3} \bar{d}_i\,(i\partial\!\!\!/ - m)d_i. \tag{3.418}$$

Ennek a Lagrange-függvénynek (a fázis-transzformáción kívül) van egy SU(3) szimmetriája: $d_i' = U_{ii'}d_{i'}$, ahol U egy 3×3 unitér mátrix. Valóban

$$\mathcal{L}_d' = \sum_{i=1}^{3} \bar{d}_i'\,(i\partial\!\!\!/ - m)d_i' = \sum_{i,j,k=1}^{3} \bar{d}_j U_{ji}^\dagger\,(i\partial\!\!\!/ - m)U_{ik}d_k = \mathcal{L}_d. \tag{3.419}$$

Mi a megmaradó áram? Ehhez paraméterezzük $U = e^{-\frac{i}{2}\omega_a\lambda_a}$ módon, ahol $a = 1\ldots 8$, hiszen ez egy 8-paraméteres csoport. Tegyük ω_a-t helyfüggővé; ekkor a Lagrange-függvény transzformációja (elhagyva az i szín-indexet)

$$\mathcal{L}_d' = \bar{d}(x)\,e^{\frac{i}{2}\omega_a(x)\lambda_a}\,(i\partial\!\!\!/ - m)e^{-\frac{i}{2}\omega_a(x)\lambda_a}d(x) = \mathcal{L}_d + \partial_\mu\omega_a(x)\;\bar{d}(x)\frac{\lambda_a}{2}\gamma^\mu d(x). \tag{3.420}$$

Innen a megmaradó áram

$$j_a^\mu = \bar{d}(x)\frac{\lambda_a}{2}\gamma^\mu d(x). \tag{3.421}$$

Ez összesen 8 darab megmaradó áram, minden paraméterhez tartozik egy (mikor csak azt a paramétert változtatom).

Ha lokálissá akarom tenni e szimmetriát, akkor mind a nyolc paraméterhez be kell vezetnem egy mértékteret $\Rightarrow$ A_μ^a, nyolc vektorpotenciálom lesz. A vektorpotenciálokat a deriváltak mellé rendelem, kovariáns deriváltat csinálok belőlük:

$$iD_\mu = i\partial_\mu - gA_\mu^a\frac{\lambda_a}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_d = \bar{d}\,(i\partial\!\!\!/ - gA\!\!\!/ - m)d, \tag{3.422}$$

ahol bevezettük $A_\mu = A_\mu^a\frac{\lambda_a}{2}$ jelölést. A vektorpotenciáloknak úgy kell transzformálódniuk, hogy az új $\mathcal{L}_d$ invariáns legyen:

$$\mathcal{L}_d' = \bar{d}U^\dagger\,(i\partial\!\!\!/ - gA\!\!\!/' - m)Ud = \bar{d}\,(\gamma^\mu U^\dagger(i\partial_\mu - gA_\mu')U - m)d = \bar{d}\,(i\partial\!\!\!/ - gA\!\!\!/ - m)d. \tag{3.423}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$U^\dagger(i\partial_\mu - gA_\mu')U = -gA_\mu \quad \Rightarrow \quad gA_\mu' = i(\partial_\mu U)U^\dagger + UgAU^\dagger = U(gA_\mu - i\partial_\mu)U^\dagger = -iUD_\mu U^\dagger. \tag{3.424}$$

Itt tehát az A terek nemcsak additíve transzformálódnak, hanem maguk is "forognak" az SU(3) transzformáció hatására. Infinitezimális transzformációval

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g}\partial_\mu\omega^a + f^{abc}\omega^b A_\mu^c, \qquad \text{ahol} \qquad [\lambda_b, \lambda_c] = 2if^{bca}\lambda_a. \tag{3.425}$$

Ilyen módon el tudtuk érni, hogy $\mathcal{L}$ lokálisan invariáns legyen, ehhez be kellett vezetni a kvarkok és nyolc darab vektorpotenciál kölcsönhatását $\Rightarrow$ 8 gluon.

A gluonok dinamikájához a térerősséget számoljuk ki

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu]1 = \frac{1}{ig}[\partial_\mu + igA_\mu, \partial_\nu + igA_\nu]1 = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \tag{3.426}$$

Komponensekben kiírva

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b, A_\nu^c. \tag{3.427}$$

Mivel $D' = UDU^\dagger$, ezért a térerősség transzformációja is $F' = UFU^\dagger$. Itt tehát a térerősségek *nem fizikai mennyiségek*! Hogyan képezhetünk invariáns Lagrange-függvényt? Nyilván $\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ is invariáns, így a QCD Lagrange-függvénye, az összes kvark-ízre felösszegezve

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\Psi}_f\,(iD\!\!\!/ - m_f)\,\Psi_f - \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.428}$$

3.9.1 Az erős kölcsönhatás jellegzetességei

erős a csatolási állandó: míg az elektrodinamikában $\alpha \approx 0.0074$, a QCD-ben $\alpha_s \approx 0.21$. Emiatt nincs éles határvonal a kötött állapotok mérete és kötési energiája között.

kölcsönható gluonok : míg a fotonok, az elektromágneses kvantumok a Lagrange-függvényben kvadratikusan szerepeltek $\Rightarrow$ szabadon terjedtek, a QCD-ben F-ben van A^2-es tag is az A-s mellett, így $\mathcal{L}$-ben A^3 és A^4 is előfordul. Vagyis a gluonok kölcsönhatnak, a kölcsönhatási erősség pedig ugyanaz mint a gluon-kvark kölcsönhatás, azaz nagyon erős. Emiatt a gluon erővonalak vonzzák egymást $\Rightarrow$ a kvark és antikvark között húzódó erővonalak nem kiterjednek, hanem egy szállá (húr) állnak össze. Az erővonal sűrűség nem érzékeny a kvarkok távolságára, ezért a húr energiája ($\sim \int A^2$) a húr hosszával arányos.

kvark-antikvark potenciál : Monte Carlo szimulációval mérhető, vagy kísérletekből következtethetünk rá. Kis távolságokon Coulomb-szerű nagy távolságokon lineárisan nő:

$$V(r) \approx -\frac{\alpha_s}{r} + \sigma r. \tag{3.429}$$

A lineáris potenciál kísérleti következménye: Regge trajektória $m^2 \sim J$. Erre klasszikus érvelés: tekintsünk egy $V(r) = \sigma r$ potenciálban körmozgást. A mozgás feltétele ultrarelativisztikus esetben

$$\frac{mv^2}{r} \approx \frac{pc}{r} = \sigma \quad \Rightarrow \quad pc = \sigma r. \tag{3.430}$$

Az energia és az impulzusmomentum

$$E = mc^2 \approx pc, \qquad J = pr = \frac{p^2 c}{\sigma} = \frac{m^2 c^3}{\sigma}. \tag{3.431}$$

Mivel a potenciál ∞-ig nő, ezért a kvarkok nem lehetnek szabadok, csak a színtelen objektumok.

A QCD töltése : Mekkora a g, a QCD töltése, a kölcsönhatás erőssége? Számoljuk ki $\langle q\mathbf{p}|q\mathbf{p}'\rangle$ gluon háttéren való szórását (vagy következtessünk erre valamilyen bonyolultabb folyamatból) $\Rightarrow$ g vertex. Első rendben kapjuk, ha a kvarkok impulzuscseréje q:

$$\Gamma(q^2, \mu^2) = g - \frac{g^3}{32\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\ln\frac{q^2}{\mu^2} + \dots. \tag{3.432}$$

Benne marad egy skála! Általános jellegzetessége a kvantum térelméletek radiatív korrekcióinak: hogy véges eredményt tudjunk definiálni, rögzíteni kell egy skálát: ez éppúgy hozzátartozik a rendszerhez, mint a csatolási állandók vagy tömegek. Egy adott skála választásánál megmérve $\Gamma(q^2, \mu^2)$-et, és innen kiszámolhatjuk g-t. Ha már tudjuk g értékét, más folyamatokban bemenő paraméterként használhatjuk.

Különböző skálák esetén tehát más és más g-t kapunk. g tehát függ μ-től $\Rightarrow$ futó csatolási állandó. A mérhető Γ azonban nem függ a választott μ-től – ebből kitalálható a $g(\mu)$:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\ln\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{d\ln\mu} = \beta(g) \qquad \text{ahol} \quad \beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right) = -\frac{b}{4\pi}g^3. \tag{3.433}$$

Ennek megoldása:

$$g^2(\mu) = \frac{g^2(\mu_0)}{1 + \frac{bg^2(\mu_0)}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}} \qquad \text{vagy} \qquad \alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + b\alpha_s(\mu_0)\ln\frac{\mu^2}{\mu_0^2}}, \tag{3.434}$$

ahol $\alpha_s = g^2/4\pi$. Ezt az eredményt többféleképpen értékelhetjük:

- ha $\mu^2 = q^2$, akkor $\Gamma = g$, vagyis éppen a kölcsönhatás erősségét kapjuk q impulzusátadásnál $\Rightarrow$ $R \sim 1/q$ skálán.
- összevonva ($\alpha_s^{(0)} \equiv \alpha_s(\mu_0)$)

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s^{(0)}}{1 + b\alpha_s^{(0)}\ln\frac{q^2}{\mu_0^2}} = \frac{1}{b\ln\frac{q^2}{\Lambda_{QCD}^2}}, \qquad \text{ahol} \quad \Lambda_{QCD}^2 = \mu_0^2 e^{-\frac{1}{b\alpha_s^{(0)}}}. \tag{3.435}$$

  Λ_{QCD} nem függ a μ_0 skálától, ahogy ezt a futás segítségével ellenőrizni lehet. Mivel $\alpha_s > 0$, ezért $q^2 > \Lambda_{QCD}^2$ (feltéve, hogy $11 - 2N_f/3 > 0$).
- emiatt $\alpha_s(q^2 \to \infty) \to 0$, azaz nagy energiákon, kis távolságokon a csatolási állandó eltűnik $\Rightarrow$ aszimptotikus szabadság.
- ha $q^2 \to \Lambda_{QCD}^2$, akkor $\alpha_s \to \infty$ $\Rightarrow$ infravörös Landau pólus. Kis energiákon, nagy távolságokon a QCD kvark-gluon rendszere nem az alapállapot, helyette kvarkok kötött, színetelen állapotait látjuk $\Rightarrow$ hadronok.

Királis szimmetria Vegyünk két kvarkot $q = (u, d)$. Hajtsuk végre az alábbi transzformációkat:

$$q' = Uq \equiv e^{-i\alpha^a T_a} q, \qquad \text{illetve} \qquad q' = U_q q \equiv e^{-i\alpha_5^a \gamma_5 T_a} q, \qquad \text{ahol} \quad T_0 = \frac{1}{2}, \quad T_a = \frac{1}{2}\sigma_a. \tag{3.436}$$

Az első transzformáció α^0 komponense a fázistranszformáció, az α^i komponense pedig az izospin forgatás, a hozzájuk tartozó megmaradó mennyiségek pedig a kvarkszám illetve az izospin és annak harmadik komponense:

$$\delta L = \delta\bar{q}(i\partial\!\!\!/ - m)q + \bar{q}(i\partial\!\!\!/ - m)\delta q = i\alpha^a \bar{q} T^a (i\partial\!\!\!/ - m)q - i\bar{q}(i\partial\!\!\!/ - m)T^a \alpha^a q = (\partial_\mu \alpha^a)\bar{q}\gamma^\mu T^a q \quad \Rightarrow \quad J_\mu^a = \bar{q}\gamma^\mu T^a q. \tag{3.437}$$

A második típusú, γ_5-öt tartalmazó transzformációró szimmetria? A Dirac-adjungált transzformációja

$$\bar{q}' = (U_5 q)^\dagger \gamma_0 = q^\dagger e^{i\alpha_5^a \gamma_5 T_a} \gamma_0 = \bar{q} e^{-i\alpha_5^a \gamma_5 T_a}, \tag{3.438}$$

mert $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$.

$$\bar{q}'(i\partial\!\!\!/ - m)q' = \bar{q} U_5 (i\partial\!\!\!/ - m) U_5 q = \bar{q}\,(i\partial\!\!\!/)q - m\bar{q}U_5^2 q. \tag{3.439}$$

Vagyis csak akkor szimmetria, ha $m = 0$, azaz tömegtelenek a kvarkok. Ebben az esetben az α_5^0 transzformáció a fázist ellentétesen forgatja a bal és a jobbkezes kvarkoknál, az α_5^i pedig a bal és jobbkezes kvarkoknál ellentétesen forgat az izospin térben. Az ehhez tartozó áramot u_5^a helyfüggővé tételével lehet megkapni:

$$\delta\mathcal{L} = \delta\bar{q}(i\partial\!\!\!/ - m)q + \bar{q}(i\partial\!\!\!/ - m)\delta q = -i\alpha_5^a \bar{q} T^a \gamma_5 (i\partial\!\!\!/ - m)q - i\bar{q}(i\partial\!\!\!/ - m)\alpha_5^a T^a \gamma_5 q = -2im\alpha_5^a \bar{q}\gamma_5 T^a q + (\partial_\mu \alpha_5^a)\bar{q} T^a \gamma_\mu \gamma_5 q. \tag{3.440}$$

Vagyis, mivel $\delta\mathcal{L} = 0$, parciális integrálás után kapjuk:

$$J_{5\mu}^a = \bar{q} T^a \gamma_\mu \gamma_5 q, \qquad \partial^\mu J_{5\mu}^a = -2im\bar{q}\gamma_5 T^a q. \tag{3.441}$$

Mivel az u, d kvarkok "majdnem" tömegtelenek (a 4 ill. 8 MeV tömegük sokkal kisebb mint a legkönnyebb hadron, a pion 140 MeV-es tömege).

Mégis: sem az L illetve R módusok megmaradását, sem az izospinhez hasonló multipleteket nem látunk! Miért?

Az α_5^0-hoz tartozó axiál áram *anomális*! Ez azt jelenti, hogy bár klasszikus szinten megmarad, a kvantumos korrekciók miatt mégis sérül. Hurok számolásban az axiál és a szokásos vektor áram $\to 2\gamma$ mátrixelem háromszög diagramjai lineárisan divergensek, és nem lehet úgy regularizálni az elméletet, hogy *mindkettő* megmaradjon $\Rightarrow$ az axiál áram megmaradás sérül. Másik kép: az axiál transzformáció elvégzésekor a Dirac-operátor energiaszintjei eltolódnak, az L felfelé, az R lefelé $\Rightarrow$ az új vákuumban L részecske és R antirészecske lesz. A mértéktér mozgását is figyelemmel kísérve, megváltozik a mértéktér topológiája, "csavarodási szám" jellemzi $\Rightarrow$ a csavarodási szám a megjelenő módusokkal összefügg (Atyah-Singer indextétel). Más szóval az axiáláram divergenciája a topológikus töltéssel fejezhető ki:

$$\partial^\mu J_{5\mu}^a = -\frac{g^2 n_f}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\varrho\sigma}^c \,\mathrm{Tr}[T^a T^b T^c]. \tag{3.442}$$

Az axiáláram esetén $a = 0$ ezért $\delta_{bc}/2$-t kapunk. A jobb oldalon álló mennyiség térintegrálja fejezi ki a mértéktér csavarodásának megváltozását, ez mértékinvariáns. A jobb oldal másrészt teljes divergencia, vagyis definiálható egy megmaradó áram, azonban az nem mértékinvariáns.

A chirális izospin áramok pedig *spontán sérülnek*! Ez azt jelenti, hogy bár a Hamilton operátor invariáns a transzformációra, de a vákuumállapot nem! Ennek jele, hogy olyan operátor, amely transzformálódik az axiál transzformáció alatt, nem nulla vákuum várható értéket kaphat. Most

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle = \left\langle 0|q_L^\dagger q_R + q_R^\dagger q_L|0\right\rangle. \tag{3.443}$$

Ha a bal- és jobbkezes kvarkok másképp transzfromálódnak, akkor az operátor transzformálódna. Ha a vákuum invariáns lenne, akkor

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle = \left\langle 0|U_5^\dagger \bar{q}q U_5|0\right\rangle. \tag{3.444}$$

Választva $\alpha_5^3 = \pi/2$-t, a fenti kifejezés jobb oldala $-\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ lenne, azaz az egészet lenullázná. Ha azonban $U_5\,|0\rangle \neq |0\rangle$, akkor a fenti egyenlőség nem írható fel. Vagyis a chirális kondenzátum nem nulla volta azt jelenti, hogy:

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad U_5\,|0\rangle \neq |0\rangle\,. \tag{3.445}$$

Hogyan képzelhető el, hogy a vákuum nem invariáns? Mágnesség példája: bár a spinek mindegyike forgásinvariáns, az alapállapot lehet rendezett. Ekkor egy adott alapállapot elforgatottja egy másik, ugyanolyan energiájú állapot, az összes állapot terében tehát sok azonos energiájú alapállapotot kapunk. Ez olyan, mint egy kalap. Végtelen nagy rendszer esetén azonban az összes spin egyszerre való elforgatása időfejlődés során egyre kisebb valószínűséggel következik be $\Rightarrow$ beragadunk az egyik vákuumba, bármelyikbe, ez spontán választódik ki, de onnan már nem tudunk továbblépni. Ugyanakkor az a gerjesztés, amelyik az egyik vákuumot a másikba viszi, ugyanolyan energiájú állapotokat köt össze, azaz energiabefektetés nélkül gerjeszthető, nulla tömegű $\Rightarrow$ Goldstone bozon. Mágneses rendszerben ez a spin-hullám. A chirális szimmetria esetén ezek a pionok. Ha tehát egy infinitezimális axiál transzformációt végzünk a vákuumon, akkor olyan, mintha pionokat keltettünk volna: $U_5\,|0\rangle \sim |\pi(\mathbf{p}=0)\rangle$. Mivel az infinitezimális transzformáció generátora a megmaradó töltés, ezért azt is írhattuk volna, hogy

$$\int d^3\mathbf{x}\, j_{50}^a(\mathbf{x})\,|0\rangle \sim |\pi^a(\mathbf{p}=0)\rangle\,. \tag{3.446}$$

Innen Lorentz-invariancia és az axiál forgatások segítségével írható:

$$\left\langle 0|j_{5\mu}^a(x)|\pi^b(p)\right\rangle = f_\pi p_\mu \delta^{ab} e^{-ipx}, \tag{3.447}$$

ahol f_π valamilyen állandó (pion bomlási állandó). A fenti egyenlet divergenciáját véve $x = 0$-nál, és kihasználva az axiáláram megmaradási törvényeit:

$$\left\langle 0|\partial^\mu j_{5\mu}^a(x)|\pi^b(p)\right\rangle = -2im\left\langle 0|\bar{q}\gamma_5 T^a q|\pi^b(p)\right\rangle = -if_\pi p^2\delta^{ab} \quad \Rightarrow \quad p^2 = m_\pi^2 = \frac{m_u+m_d}{f_\pi}\,M^2, \tag{3.448}$$

ahol $M^2 = 2\left\langle 0|\bar{q}\gamma_5 T^3 q|\pi^3(p)\right\rangle$, valamilyen energiaskála. Innen látszik, hogy nulla kvarktömegek esetén az axiál áram megmarad, és a pion tömege nullává válik, vagyis valóban Goldstone bozon lesz.

Appendix A

Appendix

A.1 Klasszikus szórás centrális potenciálon

Általában centrális potenciálra a pálya egyenlete: hengerkoordináták, $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$, úgy választom a pálya síkját, hogy $v_z = 0$ legyen. Megmaradó mennyiségek

$$J = mrv_\varphi \quad \Rightarrow \quad v_\varphi = \frac{J}{mr}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{v_\varphi}{r} = \frac{J}{mr^2} \tag{A.1}$$

és

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{J^2}{2mr^2} + U(r) \quad \Rightarrow \quad v_r = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \frac{J^2}{m^2r^2}}. \tag{A.2}$$

A pálya

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{v_r} = \frac{J/r^2}{\sqrt{2m(E-U) - J^2/r^2}}. \tag{A.3}$$

Innen a szórás szöge (l. Fig. 2.4)

$$\varphi = \int\limits_{r_{min}}^{\infty} dr \, \frac{J/r^2}{\sqrt{2m(E-U) - J^2/r^2}}, \tag{A.4}$$

ahol r_{min}-re a nevező nulla. Mivel végtelen távol

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \qquad J = mv_\infty b \quad \Rightarrow \quad J = b\sqrt{2mE}. \tag{A.5}$$

Ezt beírva

$$\varphi = \int\limits_{r_{min}}^{\infty} dr \, \frac{b/r^2}{\sqrt{1 - b^2/r^2 - U/E}} = b \int\limits_{0}^{1/r_{min}} \frac{dx}{\sqrt{1 - b^2x^2 - U(1/x)/E}}, \tag{A.6}$$

A.2 Konstruktív eljárás a Dirac-egyenlet megoldásainak megkeresésére

A Dirac-egyenlet:

$$(p_\mu \gamma^\mu - m)\psi(\mathbf{p}) = 0. \tag{A.7}$$

Beszorozva ezt az egyenletet $\hat{L}$-lel, és felhasználva a γ^μ vektor-operátor jellegét kapjuk:

$$0 = \hat{L}(p_\mu \gamma^\mu - m)\psi(\mathbf{p}) = (p_\mu \, \hat{L}\gamma^\mu \hat{L}^{-1} - m)\hat{L}\,\psi(\mathbf{p}) = (p_\mu \, [\Lambda^{-1}]^\mu_{\cdot\nu}\gamma^\nu - m)\hat{L}\,\psi(\mathbf{p}). \tag{A.8}$$

ez az egyenlet azt mondja, hogy $\hat{L}\,\psi(\mathbf{p})$ kielégíti azt az egyenletet, amelyben az impulzus $[\Lambda^{-1}]^{\mu}_{\cdot\nu}p_\mu = \Lambda_{\nu}^{\cdot\mu}p_\mu$. Vagyis

$$\psi(\Lambda p) = L\psi(p). \tag{A.9}$$

Vagyis ha meg tudjuk állapítani $\mathbf{p} = 0$-ra az E_0 sajátértékeket, akkor véges $\mathbf{p}$-re az energia sajátérték az $(E_0, 0)$ Lorentz-transzformáltja, a sajátvektor pedig $L\psi(0)$.

$\mathbf{p} = 0$-ra $h(0) = \gamma_0 m$, vagyis a sajátérték-egyenlet

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \end{pmatrix}\psi(0) = E\psi(0) \quad \Rightarrow \quad E^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \pm m, \tag{A.10}$$

azaz két $+m$ és két $-m$ sajátértékünk van. Szokás a sajátvektorokat m-re normálni. Az így normált sajátvektorok szokásos jelölése: $+m$-hez tartozik $\psi(0) \to u_r(0)$, a $-m$-hez tartozót pedig $\psi(0) \to v_r(0)$-lal jelöljük, ahol $r = 1, 2$. A $+m$-hez tartozó sajátvektorok

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A.11}$$

Vagyis

$$u_r(0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi_r \\ \xi_r \end{pmatrix}, \qquad \text{ahol} \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A.12}$$

Hasonlóan

$$v_r(0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi_r \\ -\xi_r \end{pmatrix}. \tag{A.13}$$

Forgatás hatása ezeken az állapotokon: a forgatás-oprátor

$$L(\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}}, \qquad \text{ahol} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{A.14}$$

ez a belső impulzusmomentum, azaz spin operátora. Ennek hatására

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 u_r(0) = s_r u_r(0), \qquad \frac{1}{2}\Sigma_3 v_r(0) = s_r v_r(0), \tag{A.15}$$

ahol $s_{1,2} = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad$ az r index a spinnek felel meg.

Véges impulzus esetén, ahogy volt szó róla, meg kell keresni azt a Lorentz-transzformációt, amely $(m, 0)$-ból $(E, \mathbf{p})$-t csinál. Ugyanez a transzformáció $(-m, 0)$-ból természetesen $(-E, -\mathbf{p})$-t csinál! Vagyis minden impulzusra lesz egy pozitív és egy negatív energiás megoldásunk. Először válasszunk speciális koordinátarendszert, ahol $\mathbf{p} = (0, 0, p_3)$. A Lorentz transzformáció ekkor a t-z altérben

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta \\ \sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\sigma_3\eta} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\sigma_3\eta} \end{pmatrix}. \tag{A.16}$$

Vagyis

$$u_r(\mathbf{p}) = L\,u_r(0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\sigma_3\eta}\xi_r \\ e^{\frac{1}{2}\sigma_3\eta}\xi_r \end{pmatrix}, \qquad v_r(\mathbf{p}) = L\,v_r(0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\sigma_3\eta}\xi_r \\ -e^{\frac{1}{2}\sigma_3\eta}\xi_r \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Mivel σ_3 diagonális, írhatjuk a bal-és jobbkezes boostot a következő alakban

$$e^{\frac{1}{2}\sigma_3\eta} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\eta} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\eta} \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{2}\eta}P_\uparrow + e^{-\frac{1}{2}\eta}P_\downarrow, \qquad \text{ahol} \qquad P_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_\uparrow = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

projektorok. Felhasználva a valós térbeli Lorentz-transzformáció képletét (A.16), kapjuk

$$e^{\frac{1}{2}\eta}\sqrt{m} = \sqrt{e^{\eta}\sqrt{m}} = \sqrt{m\cosh\eta + m\sinh\eta} = \sqrt{E+p_3} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{1}{2}\sigma_3\eta}\sqrt{m} = \sqrt{E+p_3}P_\uparrow + \sqrt{E-p_3}P_\downarrow. \tag{A.19}$$

Projektorok függvényére írhatjuk

$$f(aP_\uparrow + bP_\downarrow) = f(a)P_\uparrow + f(b)P_\downarrow, \tag{A.20}$$

mert

$$f(aP_\uparrow+bP_\downarrow) = \sum_n f_n(aP_\uparrow+bP_\downarrow)^n = \sum_n f_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\, P_\uparrow^k\, P_\downarrow^{n-k} = \sum_n f_n\,(a^n P_\uparrow + b^n P_\downarrow) = f(a)P_\uparrow + f(b)P_\downarrow, \tag{A.21}$$

hiszen ha $k \neq 0$, akkor $P_\downarrow^k = P_\downarrow$, $P_\uparrow^k = P_\uparrow$, és $P_\downarrow P_\uparrow = 0$. Ezt felhasználva

$$e^{\frac{1}{2}\sigma_3\eta}\sqrt{m} = \sqrt{(E+p_3)P_\uparrow + (E-p_3)P_\downarrow} = \sqrt{E+p_3\sigma_3}. \tag{A.22}$$

Ez speciális koordinátarendszerbeli alakja a Lorentz-invariáns $\sqrt{p_\mu\overline{\sigma}^\mu}$ kifejezésnek. Ugyanezt elvégezve

$$e^{\frac{1}{2}\sigma_3\eta}\sqrt{m} = \sqrt{E-p_3\sigma_3}, \tag{A.23}$$

amely speciális koordinátarendszerbeli alakja a $\sqrt{p_\mu\sigma^\mu}$ kifejezésnek. Visszaírva ezt (A.17) képletbe kapjuk:

$$u_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\xi_r \\ \sqrt{p_\mu\overline{\sigma}^\mu}\xi_r \end{pmatrix}, \qquad v_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\xi_r \\ -\sqrt{p_\mu\overline{\sigma}^\mu}\xi_r \end{pmatrix}. \tag{A.24}$$

A.3 Lorentz-invariáns normálás

Hogyan transzformálódik a Dirac-delta egy Lorentz transzformáció hatására? Áttérve egy z irányban V sebességgel mozgó koordinátarendszerre a négyesimpulzus trf-ása:

$$E' = \gamma(E + p_z V), \qquad p'_z = \gamma(p_z + VE), \qquad p'_x = p_x, \qquad p_y = p_y. \tag{A.25}$$

Emiatt:

$$\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') = \delta(p'_x - q'_x)\delta(p'_y - q'_y)\delta(p'_z - q'_z) = \delta(p_x - q_x)\delta(p_y - q_y)\delta(p'_z - q'_z). \tag{A.26}$$

A z komponens transzformációja:

$$\delta(p'_z - q'_z) = \delta(\gamma(p_z - q_z) + \gamma v(E_p - E_q)). \tag{A.27}$$

A Dirac-delta argumentumát kifejtve $p - q$ körül:

$$E_p = E_q + (p-q)\frac{dE_p}{dp} = E_q + (p-q)\frac{p}{E_p}, \tag{A.28}$$

azaz

$$\delta(p'_z - q'_z) = \delta\left((p_z - q_z)\gamma\left(1 + \frac{vp}{E_p}\right)\right) = \delta\left((p_z - q_z)\frac{E_{p'}}{E_p}\right) = \frac{E_p}{E_{p'}}\delta(p_z - q_z), \tag{A.29}$$

(figyelembe véve, hogy $|f'(x)|\delta(f(x)) = \delta(x - x_0)$, ahol $f(x_0) = 0$). Ezért:

$$N_p^2\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = N_{p'}^2\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') = N_{p'}^2\frac{E_p}{E_{p'}}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad \Rightarrow \quad \frac{N_p^2}{E_p} = \frac{N_{p'}}{E_{p'}}. \tag{A.30}$$

$N_{\mathbf{p}}^2 = 2E_{\mathbf{p}}$ választást fogjuk fizikai normálásnak tekinteni:

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger\, |0\rangle\,. \tag{A.31}$$