Véges hőmérsékletű és nemegyensúlyi kvantumtérelméletek

Jakovac Antal

start: January 14, 2010; last update: October 7, 2014

Contents

1 Bevezetés **2**
1.1 Klasszikus térelmélet Lagrange formalizmusa . . . 3
1.1.1 Szimmetria és megmaradás . . . 4
1.1.2 Energia-impulzus tenzor . . . 5
1.2 Kvantummechanika . . . 6
1.2.1 Hermitikus operátorok . . . 6
1.2.2 Unitér operátorok . . . 7
1.2.3 Térelméletek kvantálása . . . 8

2 A kezdeti érték probléma **8**
2.1 Időfejlesztő operátor pályaintegrál reprezentációja . . . 9
2.2 Operátor várható értékek és CTP formalizmus . . . 12
2.3 Generátor funckcionál . . . 14
2.4 Propagátorok . . . 14
2.5 Speciális kezdőfeltételek . . . 15

3 Egyensúly **16**
3.1 Vákuum várható érték . . . 17
3.2 Kémiai potenciál . . . 17
3.3 Propagátorok . . . 17
3.4 Szabad elméletek . . . 21
3.4.1 Bozonok . . . 21
3.4.2 Fermionok . . . 25
3.5 Perturbációszámítás . . . 27
3.5.1 Matsubara elmélet . . . 28
3.5.2 Valós idejű formalizmus . . . 29
3.6 Φ^4 elmélet . . . 29
3.6.1 $\hbar$-kifejtés . . . 31
3.6.2 1PI diagrammok, sajátenergia . . . 32
3.6.3 1PI diagrammok, vertexfüggvények . . . 33
3.7 1PI diagramok Φ^4 elméletben . . . 34
3.7.1 Tadpole diagram . . . 34
3.7.2 Bubble (buborék) diagram . . . 36
3.8 Divergenciák a perturbációszámításban . . . 41

4 Lineáris válasz elmélet **42**
4.1 Külső erőtér . . . 43
4.2 Hidrodinamika . . . 44

5 A perturbációs sor átrendezései: renormálás és felösszegzés **48**
5.1 Overall divergenciák . . . 50
5.2 Aldivergenciák . . . 52
5.3 Perturbációs sémák viszonya . . . 52
5.4 Skálaváltás nulla hőmérsékleten . . . 53
5.5 Hőmérsékletfüggő tömeg és csatolás . . . 55
5.6 2PI felösszegzés . . . 57
5.7 2PI egyenletek nemegyensúlyi esetben . . . 60
5.8 Új szabadsági fokok . . . 63

6 Ward identities and Schwinger-Dyson equations: basic formula **65**

7 Applications **65**

8 Equation of motion **66**
8.1 Φ^4 model . . . 66
8.2 QED equations of motion . . . 67
8.3 Keldysh formalism . . . 67

9 Ward identities from a global symmetry **68**
9.1 QED current conservation . . . 69

A Relations of 1PI, connected and disconnected correlation functions **70**

1 Bevezetés

A speci témája a véges hőmérsékletű és nemegyensúlyi kvantumtérelméletek vizsgálata.

Először néhány könyv, illetve cikk, amely hasznos lehet:

- M. Le Bellac, Thermal Field Theory (Cambridge University Press, 1996)
- J.I. Kapusta and C. Gale, Finite-temperature Field Theory, Principles and Applications (Cambridge University Press 2006)
- N.P. Landsmann and Ch.G. van Weert, Real - and imaginary-time field theory at finite temperature and density, Phys. Rep. 145 (1987) 141-249.
- I. Montvay, G. Münster, Quantum Fields on a Lattice (Cambridge Univ. Press 1994.)

Ezután röviden tekintsük át azokat az eszközöket, amelyeket használni fogunk. Ahogyan a cím is sejteti, térelméletekkel fogunk foglalkozni. Ennek fő oka az, hogy relativisztikus, kauzális elméleteknél nem engedhetünk meg távolhatást, legalábbis igen bonyolult lenne ennek megfogalmazása. Két távoli test egymásra hatása ekkor – mint ezt az elektrodinamikában is láttuk – csak úgy képzelhető el, hogy az egyik test *lokálisan* létrehoz egy mezőt (teret), ez valamilyen dinamikával kiterjed, és végül a másik test megérzi a hatását valamilyen erő formájában.

def.: Mező: $\mathrm{A} : \mathbf{M} \to \mathbf{V}$, valamely alaptérről (lehet a 3D tér vagy a Minkowski-tér) valamilyen vektortérbe képező függvény; valamely alkalmas koordinátázással komponensei: $\mathrm{A}_a(x) \equiv \mathrm{A}_a(t, \mathbf{x})$.

A vektortér belső szertkezetét jellemző mennyiségek lehetnek a spin ill. Lorentz-index, szín, íz, stb. Megtehetjük azt is, hogy külön kiemeljük a (legfontosabb) időargumentumot, és a mezőt $A_i(t)$ módon jelöljük (*multi-index*), ahol most az indexbe beleértjük a térargumentumot is. Jelölésként fogadjuk el, hogy ismétlődő indexpárra (hacsak expliciten nincs megadva) összegzést végzünk el.

A mezők, bármely különbözőnek tűnjenek is, végülis csak egy általánosított mechanikai rendszernek tekinthetők. Ehhez osszuk fel a teret kis cellákra, $\mathbf{a}$ rácsállandóval, középpontjukat jelölje $\mathbf{x}_n$, és vesszük a cella középpontjának értékét: $\mathrm{A}_a(t, \mathbf{x}_n)$. A multi-index jelölésben ez a magától értetődő $A_i(t)$ jelöléssel, ahol

most az i index diszkrét értékeket vesz fel. Ezzel egy véges sok szabadsági fokú rendszert kapunk, amelyet a mechanika elvei szerint építünk fel.

A mezők (terek) leírására a Lagrange formalizmust fogjuk használni. Ennek oka az, hogy a relativitáselmélet összeköti a teret az idővel, vagyis olyan formalizmus lesz a legmegfelelőbb, ahol ez a szimmetria fennáll. Először tekintsük át a térelméletek Lagrange formalizmusát.

1.1 Klasszikus térelmélet Lagrange formalizmusa

Klasszikus mechanikában egy rendszer leírására alkalmazhtajuk a Lagrange formalizmust. Ekkor általánosított q_i koordinátákat vezetünk be, ezek időfejlődésük során valamilyen pályát követnek $q_i(t)$. A megvalósuló pálya kiszámítását variációs elvvel végezhetjük el. Ehhez megadjuk a pályákhoz tartozó hatás-funkcionált $S[q]$, ennek a pálya variációjára kapott szélsőértéke adja meg a kívánt eredményt

$$\left.\frac{\delta S}{\delta q_i}\right|_{\text{fizikai mozg.}} = 0, \qquad q_i(t_0) = q_i^{(0)},\ q_i(t_1) = q_i^{(1)}. \tag{1}$$

A kauzalitás fenntartása érdekében a hatás-funkcionált időben lokális hatások integráljaként írjuk fel, amely csak a pályától és annak első időderiváltjától függ

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\dot{q}(t), q(t)), \tag{2}$$

L neve Lagrange-függvény. A hatás szélsőértékének követelménye a Lagrange-függvényre $q \to q + \delta q$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \left[L(\dot{q} + \dot{\delta q}, q + \delta q) - L(\dot{q}, q)\right] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \left[\dot{\delta q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta q \frac{\partial L}{\partial q}\right] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \delta q \left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q}\right] = 0, \tag{3}$$

ahol az utolsó egyenletnél felhasználtuk, hogy $\delta q = 0$ a végpontokban. Mivel ez minden variációra igaz, így kapjuk a

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{4}$$

Euler-Lagrange egyenletet.

A Lagrange-függvény $\dot{q}_i$ szerinti Legendre-transzformációjával kapjuk a Hamilton-függvényt:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad H(p, q) = p_i \dot{q}_i - L(\dot{q}, q), \tag{5}$$

ahol a jobb oldalon $\dot{q}_i(p, q)$ módon kezelendő. A Hamilton-függvényből a mozgásegyenletek:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i. \tag{6}$$

A Hamilton- és Lagrange formalizmus egymással egyenértékű.

Térelméletek tárgyalásánál a fentihez hasonlóan általánosított koordinátákkal felírt Lagrange-függvényeket tekintünk, most tehát $q_i \to \mathrm{A}_i$ (az egyszerűség kedvéért most elhagyjuk a belső térhez tartozó indexeket). Ezzel $L(\dot{\mathrm{A}}, \mathrm{A}, t)$ függvény, ahol $i = 1 \ldots N$. Lokálisnak nevezzük a sok szabadsági fokú rendszert, ha A_i csak a térbeli szomszédaival hat kölcsön, vagyis a Lagrange-függvény felírható mint

$$L = \sum_{\langle i,j \rangle} L_i^{(2)}(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_j, t) + \sum_i L_i^{(1)}(\dot{\mathrm{A}}_i, \mathrm{A}_i, t), \tag{7}$$

ahol $\langle i, j \rangle \equiv$ szomszédok, és $i > j$ (hogy ne számoljunk duplán). Ha i, j térbeli cellákat jelöl, mint előbb, akkor írhatjuk a térbeli felosztást finomítva

$$\mathrm{A}_j - \mathrm{A}_i = \mathbf{a}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{A}_i + \mathcal{O}(\mathbf{a}^2). \tag{8}$$

A magasabbrendű tagokat elhagyva írható $L_2(\mathrm{A}_i, \boldsymbol{\nabla}\mathrm{A}_i, t)$. A teljes Lagrange-függvény tehát

$$L = \sum_i L_i(\partial_\mu \mathrm{A}_i, \mathrm{A}_i, t) \tag{9}$$

alakba írható, ahol összefoglaló jelöléssel bevezetjök a négyes deriváltat: $\partial_\mu = (\partial_t, \boldsymbol{\nabla})$. Ez természetesen nem jelent még automatikusan relativisztikus invarianciát! Azonban a relativitáselméletet szem előtt tartva bevezetjük az alsó- és felső indexes mennyiségeket, melyek között $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ metrikus tenzor visz át.

A felosztás finomításával a szummák integrálokká írhatók át: $\sum_i F_i$ esetében bevezetjük az $F(\mathbf{x}) = F_i,\ \mathbf{x} \in \delta V_i$ lépcsőfüggvényt, amelyre

$$\sum_i F_i = \frac{1}{\delta V} \int d^3\mathbf{x}\, F(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{F}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V \to 0} \frac{F(\mathbf{x})}{\delta V} \tag{10}$$

sűrűség. Így lokális térelméleteket jellemző Lagrange-függvény felírható mint

$$L = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{L}(\mathrm{A}(t, \mathbf{x}), \partial_\mu \mathrm{A}(t, \mathbf{x}), t, \mathbf{x}) \tag{11}$$

Lagrange sűrűség integrálja $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ csak *első deriváltakat* tartalmaz.

A hatás alakja

$$S = \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L}(\mathrm{A}(x), \partial_\mu \mathrm{A}(x), x) \tag{12}$$

t-ben és $\mathbf{x}$-ben teljesen szimmetrikus alakba írható.

A mozgásegyenletekhez az Euler-Lagrange egyenletet használjuk. Most azonban egyszerűbb a legkisebb hatás elvét direktben felírni:

$$\begin{aligned} \delta S[\mathrm{A}] &= \int d^4x \left[\mathcal{L}(\partial_\mu \mathrm{A} + \partial_\mu \delta\mathrm{A}, \mathrm{A} + \delta\mathrm{A}, x) - \mathcal{L}(\partial_\mu \mathrm{A}, \mathrm{A}, x)\right] = \int d^4x \left[\delta\mathrm{A}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{A}_i} + \partial_\mu \mathrm{A}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \mathrm{A}_i)}\right] = \\ &= \int d^4x\, \delta\mathrm{A}_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{A}_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \mathrm{A}_i)}\right], \end{aligned} \tag{13}$$

ahol az utolsó lépésnél parciálisan integráltunk, és eldobtuk a végtelenben fellépő felületi tagokat. A hatás szélsőértéke ott van, ahol $\delta\mathrm{A} = 0$ *minden* variációra. Ekkor az integrálban $\delta\mathrm{A}$ együtthatója el kell tűnjön

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{A}_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \mathrm{A}_i)} = 0, \tag{14}$$

megegyezik a másik eredménnyel.

1.1.1 Szimmetria és megmaradás

Míg mechanikában egy Q mennyiség megmaradása azt jelentette, hogy $Q(t) = Q(0)$, egy ϱ mező esetén a lokális mennyiségek nem maradnak meg, mert más helyre átmehetnek. Mégis megmaradásról beszélhetünk olyan értelemben, hogy egy tetszőleges V térfogatban

$$\int_V d^3\mathbf{x}\varrho(t + dt, \mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{x}\varrho(t, \mathbf{x}) + \text{ (falon távozó } \varrho).$$

Bevezetve $j^\mu = (\varrho, \mathbf{j})$ jelölést, ahol $\mathbf{j}$ a ϱ-hoz tartozó áram, $V \to 0$ limeszben a következő mérlegegyenlethez jutunk:

$$\dot{\varrho} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \tag{15}$$

j^μ neve megmaradó áram. A ténylegesen megmaradó mennyiség $Q = \int dV\, j^0$, a teljes térre integrálva, hiszen

$$\dot{Q} = \int dV\, \partial_0 j^0 = -\int dV\, \mathrm{div}\, \mathbf{j} = \oint_\infty d\mathbf{F}\, \mathbf{j} = 0, \tag{16}$$

mert a végtelenben nincsenek áramok.

A Lagrange-formalizmus erőssége, hogy a szimmetriák jól kezelhetők vele. Tekintsünk egy transzformációt a A mezőn:

$$R(\mathrm{A})(x) = R\mathrm{A}(R^{-1}x). \tag{17}$$

Egy transzformáció akkor szimmetria, ha a transzformált mezőhöz az eredetivel azonos hatásfüggvény tartozik: $S[\mathrm{A}] = S[R(\mathrm{A})]$. Ekkor a transzformált mező körüli variációra igaz

$$\delta S[R(\mathrm{A})] = S[R(\mathrm{A}) + \delta\mathrm{A}] - S[R(\mathrm{A})] = S[R(\mathrm{A} + \bar{\delta}\mathrm{A})] - S[R(\mathrm{A})] = S[\mathrm{A} + \bar{\delta}\mathrm{A}] - S[\mathrm{A}] = \delta S\bar{\delta}\mathrm{A}, \tag{18}$$

itt $R(\mathrm{A} + \bar{\delta}\mathrm{A}) - R(\mathrm{A}) = \delta\mathrm{A}$ módon vezettük be $\bar{\delta}\mathrm{A}$-t. Ha tehát A kielégítette a mozgásegyenleteket, akkor $\delta S = 0$, ekkor viszont $\delta S[R(\mathrm{A})] = 0$ is igaz, azaz $R(\mathrm{A})$ is kielégíti a mozgásegyenleteket. Vagyis a szimmetria megvalósuló mozgást megvalósuló mozgásba visz át.

Egy térelméleti rendszer relativisztikus invarianciája tehát azt követeli meg, hogy a Lagrange-függvény relativisztikusan invariáns legyen. Praktikusan ez azt jelenti, hogy minden négyesvektor csak egy másik négyesvektorral összeejtve szerepelhet $\mathcal{L}$-ben.

Tétel: (Noether-tétel) Minden folytonos szimmetriához tartozik egy megmaradó áram.

Bizonyítás.: Jelöljük a folytonos transzformációt R_τ-val. $R_0 \equiv 1$ az egységtranszformáció legyen. Infinitezimális transzformációnál ($R_{\delta\tau}$) a változás lineáris $\delta\tau$-ban. Ezért a mezőkön hatva felírható:

$$R_{\delta\tau}:\ \mathrm{A}(x) \mapsto \mathrm{A}'(x) = \mathrm{A}(x) + \delta\mathrm{A}(x) = \mathrm{A}(x) + \delta\tau\Delta\mathrm{A}(x). \tag{19}$$

Ez a transzformáció a $\mathrm{A}(x)$ "pálya" variációját adja. Mivel a hatás a valódi mozgások körüli kis variációkra (első rendben) nem változik, így *minden* transzformációra igaz, hogy

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\tau}\right|_{\mathrm{A}_0} = 0, \tag{20}$$

ahol A_0 a mozgásegyenlet megoldása.

Most vegyünk szimmetriatranszformációt. Erre $S[\mathrm{A}'] = S[\mathrm{A}]$, így a fenti egyenlőség nemcsak a mozgásegyenlet megoldása mentén, hanem mindenhol igaz. Vegyünk azonban olyan transzformációt, amelyet a szimmetriatranszformációból kapunk úgy, hogy $\delta\tau$-t *helyfüggővé* tesszük! $\Rightarrow$ $\delta\mathrm{A}(x) = \delta\tau(x)\Delta\mathrm{A}(x)$.

Erre változni fog a hatás, azonban azt is tudjuk, hogy ha $\delta\tau(x) \to \delta\tau$ homogén limeszben a változás eltűnik. Emiatt δS arányos lesz $\delta\tau$ deriváltjaival. Parciális integrálásokkal azonban minden $\delta\tau$-ra ható derivált áthárítható az együtthatójára, míg végül az első derivált marad

$$\delta S = -\int d^4x K^\mu(x)\partial_\mu\delta\tau(x) = \int d^4x\partial_\mu K^\mu(x)\delta\tau(x). \tag{21}$$

Ezt összevetve (20) egyenlettel:

$$\frac{\delta S}{\delta\tau(x)} = \partial_\mu K^\mu(x) \quad\Rightarrow\quad \left.\partial_\mu K^\mu(x)\right|_{\mathrm{A}_0} = 0, \tag{22}$$

vagyis K^μ megmaradó áram.

1.1.2 Energia-impulzus tenzor

Speciális példaként tekintsük a téridő eltolásokat: $x \to x + a$, ahol a =const, valamint $R_{\mathbf{V}} = 1$. Mezőre hatva $\mathrm{A}'(x + a) = \mathrm{A}(x) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{A}'(x) = \mathrm{A}(x - a)$.

Mikor szimmetria? Ha $S[\mathrm{A}] = S[\mathrm{A}']$! Válasszuk az integrálási változónak x'-t:

$$S[\mathrm{A}'] = \int d^4x'\,\mathcal{L}(\mathrm{A}'(x'), \partial'_\mu\mathrm{A}'(x'), x') = \int d^4x\,\mathcal{L}(\mathrm{A}(x), \partial_\mu\mathrm{A}(x), x + a). \tag{23}$$

Ez akkor egyezik $S[\Phi]$-vel $\forall\,\Phi$-re, ha $\mathcal{L}$ nem függ expliciten x-től.

Mi a megmaradó mennyiség? Ehhez $x' = x + a(x)$, és vizsgáljuk $S[\mathrm{A}']$-t:

$$S[\mathrm{A}'] = \int d^4x'\,\mathcal{L}(\mathrm{A}'(x'), \partial'_\mu \mathrm{A}'(x'), x') = \int d^4x\,\det\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\,\mathcal{L}(\mathrm{A}(x), \partial'_\mu \mathrm{A}(x)). \tag{24}$$

Ehhez:

$$\partial'_\mu \mathrm{A}(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu \mathrm{A}(x). \tag{25}$$

A derivált mátrix $x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x)$ illetve $x^\mu \approx x'^\mu - a^\mu(x')$ alapján:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu a^\mu \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\mu a^\nu + \mathcal{O}(a^2). \tag{26}$$

A determinánshoz

$$\begin{vmatrix} 1+\partial_0 a^0 & \partial_1 a^0 & \dots \\ \partial_0 a^1 & 1+\partial_1 a^1 & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = (1+\partial_0 a^0)(1+\partial_1 a^1)\cdots + \mathcal{O}(a^2) = 1 + \partial_\mu a^\mu + \mathcal{O}(a^2). \tag{27}$$

Másik módszer szerint használjuk $\ln\det A = \mathrm{Tr}\ln A$, valamint a $\ln(1+x) = x + \dots$ összefüggéseket, ezzel $\det(1+A) = \exp\mathrm{Tr}\ln(1+A) = \exp\mathrm{Tr}\,A + \mathcal{O}(A^2) = 1 + \mathrm{Tr}\,A + \mathcal{O}(A^2)$, ez természetesen ugyanez az eredmény. Végül tehát

$$S[\mathrm{A}'] = \int d^4x\,(1+\partial_\mu a^\mu)\mathcal{L}(\mathrm{A}(x), \partial_\mu \mathrm{A}(x) - \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \mathrm{A}(x)) = S[\mathrm{A}] + \int d^4x\,\left[\partial_\mu a^\mu \mathcal{L} - \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \mathrm{A}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \mathrm{A})}\right]. \tag{28}$$

Valóban csak ∂a-tól függ! A korábbiak alapján a megmaradó áram

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu a^\nu T^\mu_{\cdot\nu} \quad\Rightarrow\quad T_{\mu\nu} = \partial_\nu \mathrm{A}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \mathrm{A})} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad\Rightarrow\quad \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{29}$$

vagyis minden μ-re van egy megmaradó áram $\Rightarrow$ energia-impulzus tenzor. Relativisztikusan invariáns elméletekben szimmetrikussá tehető.

Most a megmaradó mennyiségeket energiának illetve impulzusnak hívjuk:

$$E = \int d^3\mathbf{x}\,T^{00}(t,\mathbf{x}), \qquad \mathbf{P}^i = \int d^3\mathbf{x}\,T^{0i}(t,\mathbf{x}). \tag{30}$$

Az impulzus alternatív alakja, felhasználva, hogy a kanonikusan konjugált impulzus mező

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathrm{A}}(x)} = \Pi(x) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P}^i = \int d^3\mathbf{x}\,\Pi(x)\partial^i \mathrm{A}(x). \tag{31}$$

1.2 Kvantummechanika

A kvantummechanikában a rendszer állapotát egy $\mathcal{H}$ komplex Hilbert tér egy normálható eleme $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ adja meg. Szokásosan a norma 1, azaz $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. A $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operátorok között két csoport jelentős:

1.2.1 Hermitikus operátorok

Hermitikus operátorokra $H^\dagger = H$. Ezek jobb és bal oldali sajátvektora megegyezik, sajátértékeik valósak:

$$H\,|h_i\rangle = h_i\,|h_i\rangle\,, \qquad h_i^* = h_i. \tag{32}$$

Hermitikus operátorok egy mérést, más szóval megfigyelhető mennyiségeket reprezentálnak, ekkor sajátértékeik a megfigyelhető mennyiség mérésének eredményét jelentik. Ha a rendszer állapota $|\psi\rangle$, akkor a h_i mérési eredmény megvalósulásának valószínűsége $|\langle h_i|\psi\rangle|^2$. A mérés eredményének várható értéke

$$\langle H\rangle = \sum_i h_i |\langle h_i|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|H|\psi\rangle\,. \tag{33}$$

A mérés után a rendszer a mért sajátállapotba kerül.

Amennyiben több független rendszer méréseit akarjuk átlagolni, esetleg időátlagot akarunk képezni, akkor az eredmény már nem írható fel a fenti alakban. Ezért érdemesebb bevezetni a $\hat{\varrho}$ sűrűségmátrix fogalmát, amivel

$$\langle H \rangle = \operatorname{Tr} \hat{\varrho} H, \qquad \langle 1 \rangle = 1 = \operatorname{Tr} \hat{\varrho}. \tag{34}$$

Egyetlen kvantumállapot esetén $\hat{\varrho} = |\psi\rangle \langle\psi|$. A linearitás miatt több független részrendszerre való összegzés a $\hat{\varrho}$-k összegzését jelenti, vagyis stabil alakot kapunk.

A klasszikus mechanikához való kapcsolathoz a klasszikus mérést, amelyet a mért értékkel reprezentálunk, kicseréljük a hozzá tartozó mérési utasítással, amelyet az operátor reprezentál. Fontos operátor kvantummechanikában a helymérés operátora $\hat{\mathbf{q}}$, amelynek folytonos spektruma van. Ezzel tudunk pontot (tömegpontot) értelmezni, és pályáról beszélni.

Általános elv, hogy a megfigyelhető mennyiségek $\hat{q}$ és $\hat{p}$-vel való kifejezése meg kell egyezzen a klasszikus képlettel, azonban rendezési bizonytalanságok lehetnek.

Speciális szerepet tölt be a hely $\hat{q}$ és impulzus $\hat{p}$ operátora. Ezek folytonos spektrummal rendelkeznek, azonban egyszerre nem mérhetők: $\Delta p \Delta x \geq \hbar$. Operátorokra megfogalmazva

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i. \tag{35}$$

Ezek az operátorok "bázist" képeznek a fizikai megfigyelhető operátorok között, azaz minden megfigyelhető mennyiség $\hat{q}$ és $\hat{p}$ hermitikus függvénye. Ekkor a fenti kvantálási feltétel rögzíti bármely két megfigyelhető mennyiség kommutátorát.

1.2.2 Unitér operátorok

A rendszer állapotának megváltoztatását kétféle módon írhatjuk le. Schrödinger képben az állapotot transzformáljuk $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ lineáris operátor. Ennek egységnyi normájú elemet egységnyi normájú elembe kell képeznie, így $U^\dagger U = 1$, azaz U unitér operátor kell legyen. A Heisenberg képben az állapot marad, viszont az operátorokat transzformáljuk. A várható érték változatlansága érdekében

$$\left\langle \psi \middle| \hat{O}' \middle| \eta \right\rangle = \left\langle \psi' \middle| \hat{O} \middle| \eta' \right\rangle = \left\langle \psi \middle| U^\dagger \hat{O} U \middle| \eta \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{O}' = U^\dagger \hat{O} U. \tag{36}$$

Fontos speciális esetet jelentenek azok az operátorok, amelyek egy (vagy több) folytonos paramétertől függnek $U(\lambda)$, és csoportot alkotnak. Egy paraméteres csoport pl. az állapot eltolása, vagy adott tengely körüli elforgatása, több paraméteres csoport az általános forgatás. A csoport tulajdonság azt jelenti, hogy $\forall\, \lambda_1, \lambda_2$ paraméterre $\exists \lambda_3$ paraméter, hogy $U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_3)$. A standard paraméterezés:

$$U(\lambda) = e^{-iT^a \lambda_a}. \tag{37}$$

Infinitezimális trf. hatására a hullámfüggvény ill. az operátorok trf-ja:

$$d|\psi\rangle = -iT|\psi\rangle\, d\lambda, \qquad \text{illetve} \qquad d\hat{O} = i[T, \hat{O}] d\lambda. \tag{38}$$

Az infinitezimális generátor, mivel hermitikus operátor, fizikai megfigyelhető mennyiséget reprezentál. Az egy paraméteres csoportok hatására ennek az operátornak a transzformációja:

$$T(\lambda) = U^\dagger(\lambda) T U(\lambda) = e^{iT\lambda} T e^{-iT\lambda} = T. \tag{39}$$

Azaz T megmarad a transzformáció során. Ezzel a következő fontos összefüggésre mutattunk rá:

trf. generátora $\equiv$ trf. során megmaradó mennyiség.

Az idő-eltolás példája az egy paraméteres transzformációknak. Ekkor $\exists H$ az infinitezimális idő-eltolás generátora, ezzel $U(t) = e^{-iHt}$ a véges időeltolás operátora. Az állapotok transzformációja

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi\rangle = e^{-iHt}|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad i\partial_t |\psi\rangle = H|\psi\rangle, \tag{40}$$

ez a Schrödinger egyenlet. Az operátorokra érvényes egyenlet

$$\hat{O}(t) = e^{iHt} \hat{O}(0) e^{-iHt} \quad \Rightarrow \quad \partial_t \hat{O} = i[H, \hat{O}]. \tag{41}$$

A generátor, H idő-független. Ezt *definiáljuk* energiának.

def.: Energia az időeltolás generátora (és egyben az időeltolás során megmaradó mennyiség).

A tér-eltolás a hullámfüggvények szintjén $\psi'(x) = \psi(x - dx)$ transzformációt jelent. A helymérés operátora a (36) képlet alapján tehát $dq = dx\mathbf{1}$ módon változik meg. Másrészt a helyeltolás generátorát p-vel jelölve kapjuk (38) alapján:

$$dq = i[p, q]dx = dx \quad \Rightarrow \quad [q, p] = i. \tag{42}$$

A tér-eltolás generátora tehát az impulzus; egy bonyolult elméletnél, ahol nem tudjuk, mi az impulzus:

def.: Az impulzus a tér-eltolás generátora (és egyben az eltolás során megmaradó mennyiség).

1.2.3 Térelméletek kvantálása

Láttuk: diszkretizált térelmélet $\equiv$ sok szabadsági fokú mechanikai rendszer, ahol $\mathrm{A}(t, \mathbf{x}_i) \to q_i(t)$ és $\Pi(t, \mathbf{x}_i) = p_i(t)$. Mechanikai rendszer kvantálásakor $q \to \hat{q}$ és $p \to \hat{p}$ operátorok lettek $\Rightarrow$ Térelméletnél $\mathrm{A}(t, \mathbf{x}) \to \hat{\mathrm{A}}(t, \mathbf{x})$ operátor.

Láttuk: kvantummechanikai rendszer kvantálása onnan jön, hogy az impulzus ($\equiv$ tér-eltolás invariancia esetén a megmaradó mennyiség) generálja a tér-eltolást. A tér-operátor $\hat{q}_i$ megváltozása tér-eltolás hatására $\delta\hat{q}_i = dx\mathbf{1}$, arányos az egységmátrixxal. Ezért, ha az impulzus éppen a kanonikusan konjugált impulzus, akkor $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}\mathbf{1}$.

Térelméleteknél ugyanígy megköveteljük, hogy az impulzus ($\equiv$ tér-eltolás invariancia esetén a megmaradó mennyiség) generálja a tér-eltolást. Az impulzus kifejezése (31) képletből jön. Másrészt infinitezimális tér-eltolás hatására (figyeljünk az alsó és felső indexek használatára!)

$$\mathrm{A}'(t, \mathbf{x}) = \mathrm{A}(t, \mathbf{x} - d\mathbf{x}) = \mathrm{A}(t, \mathbf{x}) - dx_i\partial^i\mathrm{A}(t, \mathbf{x}) + \ldots \quad \Rightarrow \quad \delta\mathrm{A} = -dx_i\partial^i\mathrm{A}(t, \mathbf{x}). \tag{43}$$

Ezt generálja az impulzus, vagyis P_i generálja a dx_i eltolást. A (38) képlet alapján

$$\delta\mathrm{A}(t, \mathbf{x}) = -dx_i\partial^i\mathrm{A}(t, \mathbf{x}) = i[P_i(t), \mathrm{A}(t, \mathbf{x})]dx_i = -i\int d^3\mathbf{y}\,[\Pi(t, \mathbf{y})\partial^i\mathrm{A}(t, \mathbf{y}), \mathrm{A}(t, \mathbf{x})]dx_i, \tag{44}$$

a negatív előjel az index felhúzásából jön.

Ezt *két* konzisztens kvantálás tudja teljesíteni. Mivel

$$[AB, C] = ABC - CAB = A(BC + \alpha CB) - (\alpha AC + CA)B = \begin{cases} A[B, C] + [A, C]B, & \text{ha } \alpha = -1 \\ A\{B, C\} - \{A, C\}B, & \text{ha } \alpha = 1, \end{cases} \tag{45}$$

Ezért lehetséges kommutátorral vagy antikommutátorral kvantálni:

$$\begin{aligned} &[\mathrm{A}(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \qquad [\mathrm{A}(t, \mathbf{x}), \mathrm{A}(t, \mathbf{y})] = 0, \qquad \text{vagy} \\ &\{\mathrm{A}(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \qquad \{\mathrm{A}(t, \mathbf{x}), \mathrm{A}(t, \mathbf{y})\} = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Az előbbieket nevezzük bozonoknak, az utóbbiakat fermionoknak. Fontos, hogy a kvantálás egy idejű operátorokra vonatkozik.

Az időfejlődést az infinitezimális idő-eltolás generátorával állíthatjuk elő, ez a Hamilton-operátor. Ettől elvárjuk, hogy megegyezzen az idő-eltolás során előálló megmaradó mennyiséggel, vagyis $E = \int d^3\mathbf{x}\,T^{00}$ energiával.

2 A kezdeti érték probléma

Ennek a jegyzetnek a fő célja az, hogy ki tudjuk számolni egy általános operátor általános kezdeti feltételekkel megadott várható értékét, illetve hogy lássuk, milyen jelenségek illetve nehézségek bukkannak fel az ilyen számolásokban.

2.1 Időfejlesztő operátor pályaintegrál reprezentációja

A formalizmust pályaintegrállal fogjuk megfogalmazni. Kezdjük azzal, hogy az időfejlesztő operátort reprezentáljuk pályaintegrállal. Ehhez felírjuk:

$$e^{-iH(t_1-t_0)} = \prod_{n=1}^{N} e^{-iH\Delta t}, \qquad \Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N}. \tag{47}$$

Az egyes operátorok közé teljes rendszereket szúrunk be. Ezeket úgy válasszuk meg, hogy azokon az elemi mezők, A_i-k diagonálisan hassanak. Bozonikus mezők esetén, mivel azok adott időargumentumra kommutálnak, ez egyszerűen lehet a közös sajátfüggvényrendszerük:

$$[\hat{\Phi}_n(t), \hat{\Phi}_m(t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\Phi}_n(t)\,|\phi\rangle = \phi_n\,|\phi\rangle\,, \tag{48}$$

ezek teljes rendszert alkotnak, azaz

$$\int d\phi\,|\phi\rangle\,\langle\phi| = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \forall\,|\Omega\rangle \quad |\Omega\rangle = \int d\phi\,\Psi_\Omega(\phi)\,|\phi\rangle\,, \qquad \Psi_\Omega(\phi) = \langle\phi|\Omega\rangle\,. \tag{49}$$

A kanonikusan konjugált impulzussal kvantálva az elméletet

$$[\hat{\Phi}_n(t), \hat{\Pi}_m(t)] = i\delta_{nm} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Pi}_m(t) = -i\frac{\delta}{\delta\phi_m(t)}, \tag{50}$$

ami azt jelenti,

$$\Pi_m\,|\Omega\rangle = \int d\phi\,(-i)\frac{\delta\Psi_\Omega(\phi)}{\delta\phi_m}\,|\phi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\phi|\Pi_m|\Omega\rangle = -i\frac{\delta}{\delta\phi_m}\,\langle\phi|\Omega\rangle\,. \tag{51}$$

Emiatt a Π_n-ek közös sajátfüggvényrendszerére ($|\Pi\rangle$), elhagyva az n indexet:

$$\langle\phi|\hat{\Pi}|\Pi\rangle = \Pi\,\langle\phi|\Pi\rangle = -i\frac{\delta}{\delta\phi}\,\langle\phi|\Pi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\phi|\Pi\rangle = e^{i\Pi\phi}. \tag{52}$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} e^{-iHt} &= \int d\Phi_0 \prod_{n=1}^{N} d\Phi_n \partial\Pi_n\,|\Phi_N\rangle\,\big\langle\Phi_N|e^{-iH\Delta t}|\Pi_N\big\rangle \ldots \big\langle\Phi_2|e^{-iH\Delta t}|\Pi_2\big\rangle\,\langle\Pi_2|\Phi_1\rangle\,\big\langle\Phi_1|e^{-iH\Delta t}|\Pi_1\big\rangle\,\langle\Pi_1|\Phi_0\rangle\,\langle\Phi_0| = \\ &= \int d\Phi_0 \prod_{n=1}^{N} d\Phi_n \partial\Pi_n\; e^{-iH(\Phi_N,\Pi_N)\Delta t + i\Phi_N\Pi_N \cdots - i\Pi_2\Phi_1 - iH(\Phi_1,\Pi_1)\Delta t + i\Pi_1\Phi_1 - i\Pi_1\Phi_0}\,|\Phi_N\rangle\,\langle\Phi_0| = \\ &= \int d\Phi_0 \prod_{n=1}^{N} d\Phi_n \partial\Pi_n\; e^{-i\sum_{n=1}^{N}[H(\Phi_n,\Pi_n) - \Pi_n\partial_t\Phi_n]\Delta t}\,|\Phi_n\rangle\,\langle\Phi_0| = \int \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Pi\; e^{i\int_{t_0}^{t_1} dt\mathcal{L}(\Phi,\Pi)}\,|\Phi_N\rangle\,\langle\Phi_0|\,. \end{aligned} \tag{53}$$

ahol $\Phi_{n+1} - \Phi_n = \Delta t\partial_t\Phi_n + \mathcal{O}(\Delta t^2)$, és

$$\big\langle\Phi|e^{-iH\Delta t}|\Pi\big\rangle = \left(1 - i\Delta t\frac{\langle\Phi|H|\Pi\rangle}{\langle\Phi|\Pi\rangle}\right)\langle\Phi|\Pi\rangle + \mathcal{O}(\Delta t^2) = e^{-iH(\Phi,\Pi)\Delta t + i\Phi\Pi}, \tag{54}$$

valamint $\prod_{n=1}^{N} d\Phi_n\partial\Pi_n = \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Pi$.

Fermionok esetén a közös sajátfüggvényrendszer csak úgy érhető el, ha a sajátértékek nem a komplex számtestben vannak, hanem maguk is antikommutáló mennyiségek. Más szóval az állapotok nem egy komplex számtestre, hanem egy Grassmann algebrára épülő Hilbert-tér elemei.

A $\mathcal{G}$ Grassmann-algebra egy komplex asszociatív egységelemes algebra; vagyis olyan komplex vektortér, ahol értelmezve van az elemek szorzata, és ez a szorzat disztributív és asszociatív. Tehát $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ elemekre $\alpha g_1 + \beta g_2 \in \mathcal{G}$, valamint $g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{G}$. Ezen felül az algebrában van egy egységelem 1. A Grassmann-algebra generátorait

jelöljük e_i-vel: ezek azok az elemek, amelyek összes lehetséges szorzatából és azok lineárkombinációjából már az összes elemet előáll. Ezen generátorok szorzata a Grassmann-algebrában antikommutatív, azaz

$$e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i. \tag{55}$$

A Grassmann-algebra eredetileg a külső szorzatok algebráját szándékozott leírni, de kiderült, hogy a fermionok pályaintegráljára is remekül alkalmazható.

Ennek érdekében kibővítjük a szokásos Hilbert-tér fogalmát. A Hilbert-tér eredetileg egy olyan komplex vektortér, ahol értelezett a skalárszorzat. A mi esetünkben a vektortér elemeinek nemcsak komplex számokkal, hanem Grassmann-elemekkel való szorzatát is értelmezzük, azaz $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$ és $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ esetén $g_1 v_1 + g_2 v_2 \in \mathcal{H}$. A skalár szorzatot a vektortér bázisán értelmezve az algebra szorzási szabályai szerint terjesztjük ki. Hogy a Hilbert téren értelmezni lehessen a komplex konjugálást is, ahhoz a Grassmann-algebrán bevezetünk egy csillag műveletet: $e_i \to e_i^*$.

Most már meg tudjuk fogalmazni a fermion operátorok közös sajátfüggvény-rendszerét. Amit szeretnénk:

$$\{\hat{\Psi}_n(t), \hat{\Psi}_m(t)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\Psi}_n(t) \left|\psi\right\rangle = \psi_n \left|\psi\right\rangle, \qquad \psi_n \psi_m = -\psi_m \psi_n. \tag{56}$$

Ez azt jelenti, hogy minden Ψ_n operátorhoz kell egy Grassmann-algebra generátort rendelni, és a sajátértékek ezen generátorral arányosak. A szorzat antikommutativitásának következénye, hogy $\psi^2 = 0$, valamint hogy $\psi_n \psi_m$ már kommutál a többi elemmel (c-szám). Mivel a $\hat{\Psi}_n$-ek mellett $\hat{\Psi}_n^\dagger$ operátorok is léteznek, ezekhez rendeljük az e_i^* generátorokat.

Tekintsünk most egyetlen fermionikus operátort (azaz $n = 1$ lehet csak), ezekre vonatkozó antikommutációs relációk

$$\{\hat{\Psi}, \hat{\Psi}\} \equiv \hat{\Psi}^2 = 0, \qquad \{\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}^\dagger\} \equiv (\hat{\Psi}^\dagger)^2 = 0, \qquad \{\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger\} = 1. \tag{57}$$

A rendszerünk operátorkészlete $\mathbf{1}$, $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^\dagger$ és $\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}$, mivel a magasabb hatványok már nullát adnak az antikommutációs reláció miatt, és $\hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger = 1 - \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}$.

Vegyünk egy állapotot a $\mathbf{C}$ felett értelmezett Hilbert-térből, $|\alpha\rangle$-t. Erre hatva $\hat{\Psi}$-vel vagy eleve nullát kapunk, vagy egy olyan állapothot jutunk, amelyet már eltüntet $\hat{\Psi}$:

$$\hat{\Psi} \left|\alpha\right\rangle = \left|\beta\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\Psi} \left|\beta\right\rangle = 0. \tag{58}$$

Tehát létezik egy olyan állapot (vákuumállapot) $|0\rangle$, amelyet $\hat{\Psi}$ eltüntet. A vákuumra $\hat{\Psi}^\dagger$-rel hatva

$$\hat{\Psi}^\dagger \left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle, \qquad \hat{\Psi}^\dagger \left|1\right\rangle = 0, \qquad \hat{\Psi} \left|1\right\rangle = \hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger \left|0\right\rangle = -\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \left|0\right\rangle + \left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle. \tag{59}$$

Ezen felül

$$\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \left|0\right\rangle = 0, \qquad \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \left|1\right\rangle = \hat{\Psi}^\dagger \left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle. \tag{60}$$

Vagyis a Hilbert-tér két dimenziós, bázisállapotai $|0\rangle$ és $|1\rangle$.

Az általános Hilbert-tér állapot most Grassmann elemekkel való szorzás és összeadás után nyerhető. Mivel most egy terünk van és annak konjugáltja, a Grassmann-algebra generátorai $1, e, e^*$.

Tekintsük a következő Hilbert-tér elemet

$$\left|\psi\right\rangle = (1 + \psi \hat{\Psi}^\dagger) \left|0\right\rangle \equiv e^{\psi \hat{\Psi}^\dagger} \left|0\right\rangle, \qquad \psi = \psi_0 e, \quad \psi_0 \in \boldsymbol{C}. \tag{61}$$

Ezt a konstrukciót koherens állapotnak hívjuk. Ha erre hatunk $\hat{\Psi}$ operátorral:

$$\hat{\Psi} \left|\psi\right\rangle = \psi \hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger \left|0\right\rangle = \psi \left|0\right\rangle = \psi(1 + \psi \hat{\Psi}^\dagger) \left|0\right\rangle = \psi \left|\psi\right\rangle, \tag{62}$$

vagyis ez $\hat{\Psi}$ sajátállapota, ψ sajátértékkel. Ezek skalárszorzata

$$\langle \eta | \psi \rangle = \left\langle 0 \middle| (1 + \hat{\Psi}\eta^*)(1 + \psi \hat{\Psi}^\dagger) \middle| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \middle| 1 + \eta^* \psi \hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger \middle| 0 \right\rangle = 1 + \eta^* \psi = e^{\eta^* \psi}. \tag{63}$$

A sajátállapotok teljes rendszert kell alkossanak, amit úgy írunk fel, hogy

$$\int d\psi^* d\psi e^{-\psi^* \psi} \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right| = \mathbf{1}, \tag{64}$$

ahol a Grassmann változók feletti integrált még definiálni kell. A fenti egyenlet szerint

$$\begin{aligned}\langle\xi|\xi'\rangle &= 1+\xi^*\xi' = \int d\psi^* d\psi e^{-\psi^*\psi}\langle\xi|\psi\rangle\langle\psi|\xi'\rangle = \int d\psi^* d\psi(1-\psi^*\psi)(1+\xi^*\psi)(1+\psi^*\xi') = \\ &= \int d\psi^* d\psi(1+\xi^*\psi+\psi^*\xi'+\psi\psi^*\xi^*\xi'+\psi\psi^*). \end{aligned} \tag{65}$$

Ez csak akkor teljesülhet tetszőleges ξ, ξ'-re, ha

$$\int d\psi 1 = 0, \qquad \int d\psi\psi = 1. \tag{66}$$

A trace képzése a következő módon történik:

$$\mathrm{Tr}(\dots) = \int d\psi^* d\psi e^{-\psi^*\psi}\langle -\psi|\dots|\psi\rangle. \tag{67}$$

Ennek bizonyításához az egy szabadsági fok esetén lehetséges operátorok trace-ét kell ellenőrizni. Itt 1, $\Psi, \Psi^\dagger$ és $\Psi^\dagger\Psi$, trace-e sorra $2,0,0,1$. A $\hat\Psi$ és $\hat\Psi^\dagger$ esetén ez nyilvánvaló. Az egységoperátor trace:

$$\mathrm{Tr}\,1 = \int d\psi^* d\psi e^{-\psi^*\psi}\langle -\psi|\psi\rangle = \int d\psi^* d\psi e^{-2\psi^*\psi} = \int d\psi^* d\psi(1+2\psi\psi^*) = 2, \tag{68}$$

rendben van. A $\Psi^\dagger\Psi$ trace:

$$\mathrm{Tr}\,1 = \int d\psi^* d\psi e^{-\psi^*\psi}\left\langle -\psi|\Psi^\dagger\Psi|\psi\right\rangle = -\int d\psi^* d\psi e^{-2\psi^*\psi}\psi^*\psi = \int d\psi^* d\psi\psi\psi^* = 1, \tag{69}$$

ez is kijött. A trace képzéséhez tehát "antiszimmetrikus" állapotokat kell venni, nem úgy, mint a bozonikus esetben, ahol a kezdeti és végső állapot megegyezett.

A fenti tulajdonság onnan következik, hogy

$$\mathrm{Tr}\,|\eta\rangle\langle\xi| = \langle -\xi|\eta\rangle. \tag{70}$$

Ennek bizonyításához felbontjuk a $|\eta\rangle\langle\xi|$ operátort a bázis operátoraink szerint. Felhasználva, hogy koherens állapotokra

$$\left\langle\lambda|\hat\Psi|\psi\right\rangle = \psi, \qquad \left\langle\lambda|\hat\Psi^\dagger|\psi\right\rangle = \lambda^*, \qquad \left\langle\lambda|\hat\Psi^\dagger\Psi|\psi\right\rangle = \lambda^*\psi \tag{71}$$

következik a

$$|\eta\rangle\langle\xi| = 1+\xi^*\hat\Psi+\hat\Psi^\dagger\eta-(1+\xi^*\eta)\hat\Psi^\dagger\Psi. \tag{72}$$

A bázisopertátorok trace-ét felhasználva kapjuk az állításban megfogalmazott összefüggést.

Most már készen állunk arra, hogy az időfejlesztő operátor integrál-reprezentációját megadjuk:

$$\begin{aligned} e^{-iHt} &= \int\prod_{n=0}^N d\psi_n^* d\psi_n\, e^{-\sum_{n=0}^N\psi_n^*\psi_n}\,|\psi_N\rangle\left\langle\psi_N|e^{-iH\Delta t}|\psi_{N-1}\right\rangle\dots\left\langle\psi_1|e^{-iH\Delta t}|\psi_0\right\rangle\langle\psi_0| = \\ &= \int\prod_{n=0}^N d\psi_n^* d\psi_n\, e^{-\psi_N^*\psi_N+\psi_N^*\psi_{N-1}-iH(\psi_N^*,\psi_{N-1})\Delta t-\dots-iH(\psi_1^*,\psi_0)\Delta t}\,|\psi_N\rangle\langle\psi_0| = \\ &= \int\prod_{n=0}^N d\psi_n^* d\psi_n\, e^{-i\sum_{n=0}^{N-1}\left[H(\psi_{n+1}^*,\psi_n)-i\psi_n^*\partial_t\psi_n\right]\Delta t-\psi_0^*\psi_0}\,|\psi_N\rangle\langle\psi_0| = \\ &= \int\mathcal{D}\Psi^\dagger\mathcal{D}\Psi\, e^{i\int_{t_0}^{t_1}dt\mathcal{L}(\psi^*,\psi)-\psi_0^*\psi_0}\,|\psi_N\rangle\langle\psi_0|, \end{aligned} \tag{73}$$

ahol $\psi_{n+1}-\psi_n = \partial_t\psi_n\Delta t+\mathcal{O}(\Delta t^2)$, valamint

$$\left\langle\psi|e^{-iH\Delta t}|\psi'\right\rangle = \left(1-i\Delta t\frac{\langle\psi|H|\psi'\rangle}{\langle\psi|\psi'\rangle}\right)\langle\psi|\psi'\rangle+\mathcal{O}(\Delta t^2) = e^{-iH(\psi^*,\psi')\Delta t+i\psi^*\psi'}+\mathcal{O}(\Delta t^2), \tag{74}$$

és $\prod_{n=1}^{N} d\psi_n^* d\psi_n = \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi$. Itt felhasználtuk azt is, hogy $\Pi_i = i\Psi^\dagger$, és ezzel képezhető a Hamilton-függvénből a Lagrange-függvény.

Mind a fermionikus, mind a bozonikus mezők esetén tehát analóg formulákat kaptunk. A formulák jelentése: t_0 időpontban induló, t_1 időpontba megérkező, időben monoton haladó pályákatra kell integrálnunk az e^{iS} fázisfaktort. Az időbeli monotonitás azt jelenti, hogy ha $t_1 > t_0$, akkor időben előre, ha $t_1 < t_0$, akkor viszont időben visszafelé haladó pályáink vannak. Összefoglalva írhatjuk

$$e^{-iH(t_1-t_0)} = \int \mathcal{D}\Pi\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Psi^\dagger\mathcal{D}\Psi e^{i\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}} e^{-\psi_0^*\psi_0} \left|\psi_N, \Phi_N\right\rangle \left\langle\psi_0, \Phi_0\right| . \tag{75}$$

A megmaradó $e^{-\psi_0^*\psi_0}$ a ψ_0-lal felírt egységoperátor-reprezentáció maradványa (l. (64)). Szerepe, hogy a PI-ok összecsatolásánál $e^{-iHt}e^{-iHt'} = e^{-iH(t+t')}$ igaz legyen.

2.2 Operátor várható értékek és CTP formalizmus

Miután megkaptuk az időfejlesztő operátor reprezentációját, felírhatjuk egy általános nemlokális $\hat{A}(i_1, t_1; \ldots; i_n, t_n)$ operátor várható értékét (itt i_n multi-index). Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\hat{A}(i_1, t_1; \ldots; i_n, t_n)$ az elemi mezők polinomja, azaz

$$\hat{A}(x_1, \ldots, x_n) = A_{i_1}(t_1) \ldots A_{i_n}(t_n), \tag{76}$$

ahol itt A jelenthet akár bozonikus, akér fermionikus mezőket. A kezdeti felételeket egy t_0-nál adott $\hat{\varrho}$ kezdeti sűrűségmátrix segítségével írjuk le, amely normált, azaz igaz, hogy $\operatorname{Tr}\hat{\varrho} = 1$. Válasszuk t_0-t minden t_i-nél korábbi időpontnak, $t_0 < t_i$ $i = 1 \ldots n$. A várható érték a következő kifejezéssel adható meg:

$$\left\langle \hat{A}(x_1, \ldots, x_n) \right\rangle = \operatorname{Tr}\hat{\varrho}\hat{A}(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Tr}\hat{\varrho}A_{i_1}(t_1) \ldots A_{i_n}(t_n). \tag{77}$$

Speciális példák a sűrűségmátrixra a vákuum-állapot $|0\rangle\langle 0|$, illetve bármilyen tiszta állapot $|\alpha\rangle\langle\alpha|$; vagy az egyensúlyt leíró statisztikus operátor $Z^{-1}e^{-\beta H}$, ahol $Z = \operatorname{Tr} e^{-\beta H}$.

Az operátorok időfüggésére felírhatjuk

$$\partial_t A = i[H, A] \quad \Rightarrow \quad A(t) = e^{iH(t-t_0)}Ae^{-iH(t-t_0)}, \qquad A \equiv A(t_0). \tag{78}$$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk az egymást követő időfejlesztő operátorok argumentumának összevonásával:

$$\hat{\varrho}\hat{A}(x_1, \ldots, x_n) = \hat{\varrho}\, e^{iH(t_1-t_0)}A_1\, e^{-iH(t_1-t_2)}A_2\, e^{-iH(t_2-t_3)} \ldots e^{-iH(t_{n-1}-t_n)}A_n\, e^{-iH(t_n-t_0)}. \tag{79}$$

Mikor ennek trace-ét számoljuk, kihasználhatjuk a trace ciklikusságát, valamint beszúrunk az elejére és a végére egy $e^{iH(t_i-t_0)}e^{-iH(t_i-t_0)} = 1$ illetve $e^{iH(t_f-t_0)}e^{-iH(t_f-t_0)} = 1$ egységoperátort, ahol t_i fogja majd a pályaintegrál kezdeti időpontját (initial time), t_f pedig a végső (final) időpontot jelenteni. Ezzel kapjuk

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\hat{\varrho}\hat{A} &= \operatorname{Tr} e^{iH(t_f-t_0)}e^{-iH(t_f-t_1)}A_1\, e^{-iH(t_1-t_2)}A_2\, \ldots e^{-iH(t_{n-1}-t_n)}A_n\, e^{-iH(t_n-t_0)}\hat{\varrho}\, e^{iH(t_i-t_0)}e^{-iH(t_i-t_0)} = \\ &= \operatorname{Tr} e^{-iH(t_i-t_f)}e^{-iH(t_f-t_1)}A_1\, e^{-iH(t_1-t_2)}A_2\, \ldots e^{-iH(t_{n-1}-t_n)}A_n\, e^{-iH(t_n-t_0)}\hat{\varrho}\, e^{-iH(t_0-t_i)}.\end{aligned} \tag{80}$$

Vegyük észre, hogy az idő $C = t_i \to t_n \to t_{n-1} \to \ldots t_1 \to t_0 \to t_f \to t_i$ módon halad a fenti reprezentáció argumentumaiban. Ezt szokták idő-kontúrnak is nevezni, ez egy zárt "görbe" az idő egy dimenziós vonalában. Az egész formalizmus neve is innen jön: closed time path (CTP) formalizmus. Habár az időargumentumok összevissza szerepelhetnek, a fenti kifejezés a C kontúr szerint rendezett (kontúr rendezés). A zárt kontúr annak a következménye, hogy kezdeti érték problémánk van, azaz ϱ egy adott t_0 isőpontban adott, így oda kell visszatérnie a pályaintegrálnak.

Most visszaírhatjuk az időfejlesztő operátor reprezentációját, és felhasználhatjuk, hogy a mezők várható értékei

$$\left\langle \Pi|\hat{\Phi}_n|\Phi \right\rangle = \Phi_n \left\langle \Pi|\Phi \right\rangle, \quad \left\langle \Pi|\hat{\Pi}_n|\Phi \right\rangle = \Pi_n \left\langle \Pi|\Phi \right\rangle, \quad \left\langle \psi'|\hat{\Psi}_n|\psi \right\rangle = \psi_n \left\langle \psi'|\psi \right\rangle, \quad \left\langle \psi'|\hat{\Psi}_n^\dagger|\psi \right\rangle = {\psi'_n}^* \left\langle \psi'|\psi \right\rangle. \tag{81}$$

Ezen felül a sűrűségmátrix mátrixelemeit jelöljük

$$\varrho(t_0) = \frac{\langle \Pi, \psi' | \hat{\varrho} | \Phi, \psi \rangle}{\langle \Pi, \psi' | \Phi, \psi \rangle}. \tag{82}$$

Ekkor a teljes trace-t egyetlen összefüggő pályaintegrálként reprezentálhatjuk. Ebben a bozonikus terek "periodikusak", azaz a kezdő és végkonfiguráció ugyanaz, a fermionikus pályaintegrál viszont "antiperiodikus", hiszen a fermionikus trace képzésénél a végkonfiguráció a kezdő konfiguráció -1-szerese. Vagyis végülis azt kapjuk, hogy

$$\left\langle \hat{A}(x_1, \ldots, x_n) \right\rangle = \int^{C\,path} \mathcal{D}A \; e^{i \int_C dt \mathcal{L}} \varrho(t_0) A_1(t_1) \ldots A_n(t_n), \tag{83}$$

ahol az általános mezők feletti PI integrálási mértékét $\mathcal{D}A$-val jelöltük:

$$\mathcal{D}A = \mathcal{D}\Pi \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi. \tag{84}$$

Gondoljuk végig, a valós időben milyen görbét kapunk az idő kontúrra. Ha az időargumentumok összevissza szerepelnek, akkor valós időben olyan kontúrt kapunk, amely felváltva előre-hátra megy. Amennyiben egy rész időben monoton, akkor a megfelelő szakasz egyetlen szakasszá olvad össze; pl. $t_1 > t_2 > t_3$ esetén írhatjuk $t_1 \to t_2 \to t_3$ helyett, hogy $t_1 \to t_3$. Ezen felül mindenhol be lehet szúrni egy $e^{iH(t'-t)} e^{-iH(t'-t)}$ egységoperátort, ami azt jelenti, hogy tetszőleges ponton beszúrható az idő-láncba egy kitérő, azaz $t_n \to t_{n+1}$ helyett írható $t_n \to t' \to t_{n+1}$. Mindezek alapján az idő-kontúr alakja $t_i \to \infty \to t_i \to \cdots \to \infty \to t_i$, ahol az oda-vissza futások száma elégséges kell legyen ahhoz, hogy (rendezést is figyelembe véve) az összes operátort magába foglalja. Ez az alak már csak az operátorok számán keresztül függ az operátoroktól.

Hogy ezt az általánosságot kissé megszorítsuk, tekintsünk csak olyan várható értékeket, amelyek rendezése

$$\hat{A}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{T}^*(A_1(t_1) \ldots A_n(t_n)) \times \mathrm{T}(A_{n+1}(t_{n+1}) \ldots A_{n+m}(t_{n+m})), \tag{85}$$

ahol T^* az anti-időrendezést jelenti (azaz $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$). Erre elég két szakaszt megtartani, a $t_i \to \infty \to t_i$ módon, egyben ez a legkevesebb szakaszt tartalmazó kontúr, azaz egyetlen lokális operátor várható értékéhez is ezt kell kiértékelni. Ekkor érdemes olyan jelölést alkalmazni, hogy 1-es kontúrnak nevezzük a $t_i \to \infty$ szakaszt, és ha egy operátor időargumentuma ezen az (időrendezett) szakaszon van, akkor ellátjuk egy 1 felső indexszel; az anti-időrendezett szakasznál a 2-es indexet használjuk. $A^{(1)}(t)$ és $A^{(2)}(t)$ tehát megegyezik az $A(t)$ operátorral, csak a rendezés miatt még kap egy extra indexet. Az 1-es terek maguk között mindig időrendezve vannak, a 2-esek anti-időrendezve, és a 2-esek *bármely* időargumentumnál az 1-es tereknél későbbinek számítanak, azaz az 1-esektől balra helyezkednek el. Emiatt a fenti kifejezés írható úgy is, mint

$$\hat{A}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{T}_C A_1^{(2)}(t_1) \ldots A_n^{(2)}(t_n)) A_{n+1}^{(1)}(t_{n+1}) \ldots A_{n+m}^{(1)}(t_{n+m})). \tag{86}$$

A hatás-funkcionál:

$$S = \int_{t_i}^{\infty} dt \, L \tag{87}$$

Az anti-időrendezett szakaszokon eredetileg $\infty \to t_i$ az integrálás határai, a fenti alakra hozva tehát egy -1 előjelet is kapunk. Végül a fenti $\hat{A}$ operátor PI reprezentációja

$$\left\langle \hat{A}(x_1, \ldots, x_{n+m}) \right\rangle = \int \mathcal{D}A^{(1)} \mathcal{D}A^{(2)} \, e^{iS[A^{(1)}] - iS[A^{(2)}]} \varrho(t_0) A_1^{(2)}(t_1) \ldots A_n^{(2)}(t_n) A_{n+1}^{(1)}(t_{n+1}) \ldots A_{n+m}^{(1)}(t_{n+m}). \tag{88}$$

Bevezetve

$$A = (A^{(1)}, A^{(2)}), \quad \mathcal{D}A = \mathcal{D}A^{(1)} \mathcal{D}A^{(2)}, \quad S[A] = S[A^{(1)}] - S[A^{(2)}] \tag{89}$$

jelöléseket, a fenti alak

$$\left\langle \hat{A}(x_1, \ldots, x_n) \right\rangle = \int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]} \varrho(t_0) A_1(t_1) \ldots A_{n+m}(t_{n+m}) \tag{90}$$

kifejezésre egyszerűsödik. A $\varrho(t_0)$ természetesen egy nagyon komplikált kifejezés is lehet, ez hordozza tetszőleges kezdeti feltétel esetén a korrelációkat.

2.3 Generátor funckcionál

Hogy a jelöléseket kissé egyszerűsítsük, bevezetjük a generátor funkcionált. Jelöljük $J = (J^{(1)}, J^{(2)})$ és $JA = J^{(1)}A^{(1)} + J^{(2)}A^{(2)}$. Ekkor

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]+\int JA}\, \varrho(t_0). \tag{91}$$

Itt a J mennyiségeket áramoknak hívjuk, bozonikus szabadsági fokokhoz valós (ill. komplex) áramokat rendelünk, fermionikus szabadsági fokokhoz pedig Grassmann változókat.

Világos módon

$$Z[0,0] = \mathrm{Tr}\,\hat{\varrho} = 1. \tag{92}$$

A generátor funkcionál deriváltjai a korrelációs függvények:

$$\left\langle \hat{A}(x_1,\ldots,x_n)\right\rangle = \left.\frac{\delta^{n+m} Z[J^{(1)},J^{(2)}]}{\delta J_1^{(2)}(t_1)\ldots\delta J_n^{(2)}(t_n)\delta J_{n+1}^{(1)}(t_{n+1})\ldots\delta J_{n+m}^{(1)}(t_{n+m})}\right|_{J=0}. \tag{93}$$

A deriválások sorrendje fermionoknál fontos a helyes előjel miatt.

2.4 Propagátorok

A fentiekre példa a 2-pont függvények esete. $A(t_1)$ és $B(t_2)$ négyféle módon rendezhető, $A(t_1)B(t_2)$, $B(t_2)A(t_1)$, $\mathrm{T}A(t_1)B(t_2)$ és $\mathrm{T}^*A(t_1)B(t_2)$. Az első eset kontúr-rendezés szempontjából olyan kell legyen, hogy függetlenül t_1 és t_2 konkrét értékétől t_1 nagyobbnak számítson, mint t_2. Ez azt jelenti, hogy $A(t_1)$ a C_2-n, $B(t_2)$ a C_1-en legyen. A kontúr-rendezést T_C-vel jelöljük, akkor ezt $\langle \mathrm{T}_C A^{(2)}(t_1)B^{(1)}(t_2)\rangle$ módon írhatjuk, ami azt jelenti, hogy a PI alá $A^{(2)}(t_1)B^{(1)}(t_2)$ írandó. A propagátorokat G_{AB}-val jelölve tehát:

$$\begin{aligned}
iG^{12}_{AB}(t_1,t_2) &= \langle \mathrm{T}_C\, A^{(1)}(t_1)B^{(2)}(t_2)\rangle = \alpha\langle B(t_2)A(t_1)\rangle\\
iG^{21}_{AB}(t_1,t_2) &= \langle \mathrm{T}_C\, A^{(2)}(t_1)B^{(1)}(t_2)\rangle = \langle A(t_1)B(t_2)\rangle\\
iG^{11}_{AB}(t_1,t_2) &= \langle \mathrm{T}_C\, A^{(1)}(t_1)B^{(1)}(t_2)\rangle = \langle \mathrm{T}A(t_1)B(t_2)\rangle = \Theta(t_1-t_2)\, iG^{21}_{AB}(t_1,t_2) + \Theta(t_2-t_1)\, iG^{12}_{AB}(t_1,t_2)\\
iG^{22}_{AB}(t_1,t_2) &= \langle \mathrm{T}_C\, A^{(2)}(t_1)A^{(2)}(t_2)\rangle = \langle \mathrm{T}^*A(t_1)B(t_2)\rangle = \Theta(t_2-t_1)\, iG^{21}_{AB}(t_1,t_2) + \Theta(t_1-t_2)\, iG^{12}_{AB}(t_1,t_2),
\end{aligned} \tag{94}$$

ahol

$$\alpha = \pm 1 = \begin{cases} +1 \text{ bozonokra} \\ -1 \text{ fermionokra} \end{cases}. \tag{95}$$

Természetesen a T_C-rendezés alatt a sorrend (fermionikus operátoroknál előjel erejéig) nem számít.

Látható módon a propagátoroknál a többféle rendezés általános esetben is két alakra és a Θ-függvényekre vezethető vissza, azaz elég csupán G^{12} és G^{21} propagátorokat kiszámolni. Egy egyszerű megfigyelés, amely a (94) egyenletből kiolvasható, azt mutatja, hogy

$$G^{11} + G^{22} = G^{12} + G^{21}. \tag{96}$$

Hogy ezt a követelményt automatikusan teljesítsük, bevezethetjük a C_{12} kontúron értelmezett terek kombinációit, és azok propagátorát számíthatjuk, így kapjuk az R/A formalizmust. Legyen

$$A^{(r)} = \frac{A^{(1)} + A^{(2)}}{2}, \qquad A^{(a)} = A^{(1)} - A^{(2)}. \tag{97}$$

Ezekre, elhagyva most az argumentumokat

$$\begin{aligned}
iG^{rr}_{AB} &= \langle \mathrm{T}_C A^{(r)}B^{(r)}\rangle = \frac{1}{4}\left(iG^{11}_{AB} + iG^{12}_{AB} + iG^{21}_{AB} + iG^{22}_{AB}\right) = \frac{iG^{12}_{AB} + iG^{21}_{AB}}{2} = \left\langle \frac{A(t_1)B(t_2) + \alpha B(t_2)A(t_1)}{2}\right\rangle\\
iG^{ra}_{AB} &= \langle \mathrm{T}_C A^{(r)}B^{(a)}\rangle = \frac{1}{2}\left(iG^{11}_{AB} - iG^{12}_{AB} + iG^{21}_{AB} - iG^{22}_{AB}\right) = iG^{11}_{AB} - iG^{12}_{AB} = \Theta(t_1-t_2)\varrho_{AB}(t_1,t_2)\\
iG^{ar}_{AB} &= \langle \mathrm{T}_C A^{(a)}B^{(r)}\rangle = \frac{1}{2}\left(iG^{11}_{AB} + iG^{12}_{AB} - iG^{21}_{AB} - iG^{22}_{AB}\right) = iG^{11}_{AB} - iG^{21}_{AB} = -\Theta(t_2-t_1)\varrho_{AB}(t_1,t_2)\\
iG^{aa}_{AB} &= \langle \mathrm{T}_C A^{(a)}B^{(a)}\rangle = iG^{11}_{AB} - iG^{12}_{AB} - iG^{21}_{AB} + iG^{22}_{AB} = 0,
\end{aligned} \tag{98}$$

ahol bevezettük a

$$\varrho_{AB}(t_1,t_2) = iG^{21}_{AB} - iG^{12}_{AB} = \langle A(t_1)B(t_2) - \alpha B(t_2)A(t_1)\rangle \tag{99}$$

spektrál függvényt, amely a mezők (anti)kommutátora.

Az aa propagátor mindig nulla! Az rr propagátort szokták Keldysh propagátornak is nevezni, a $G^{(ra)}$ a retardált propagátor, a $G^{(ar)}$ az avanzsált propagátor. A retardált és avanzsált propagátorok különbsége is a spektrál függvény

$$\varrho_{AB}(t_1,t_2) = iG^{ra}_{AB} - iG^{ar}_{AB}. \tag{100}$$

2.5 Speciális kezdőfeltételek

Eddig a legáltalánosabb nemegyensúlyi kezdőfeltételeket vizsgáltuk, azonban a praktikus számításokhoz meg kell szorítanunk az általánosságot, hogy kezelhető kifejezésekhez jussunk. Ezen felül, bár egy általános sűrűségmátrixból indulva bonyolult dinamika alakulhat ki, ez a dinamika nagyon egyedi. Ha pontosan meghatározott kezdeti feltételeink lennének valamilyen fizikai alapelv miatt, akkor értelme lenne ezt a bonyolult dinamikát pontosan vizsgálni. Azonban általában véve nincs kitüntetett sűrűségmátrix, és paraméterezni – a végtelen sok paraméter miatt – lényegében lehetetlen. Aminek fizikai jelentése van, az egy általános kezdőfeltételből induló tranziens viselkedés után beálló, univerzális dinamika. Ennek felderítésére két módszert alkalmazhatunk: vagy feltesszük, hogy már közel vagyunk az egyensúlyhoz, és az egyensúly felől megközelítve írjuk le a dinamikát (lineáris vagy magasabb rendű válasz elmélet). A másik megközelítés, hogy egy egyszerű kezdeti sűrűségmátrixot veszünk, amely analitikusan kezelhető, és feltételezzük, hogy megfelelően általános következtetésekhez vezet. Ilyen kezdeti feltételek lehetnek, hogy pl. tér-sajátállapotból indulunk, ahol a többpont összefüggő korrelációs fügvények nullák (l. később), vagy olyanok, ahol csak az egy- és ket-pont összefüggő korrelációs függvények különböznek nullától. A fenti megfontolások miatt először egyensúlyi sűrűségmátrixokat fogunk vizsgálni.

3 Egyensúly

Egyensúlyban a sűrűségmátrix alakja

$$\hat{\varrho} = \frac{1}{Z_0} e^{-\beta H}, \qquad Z_0 = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}, \tag{101}$$

Itt kihasználhatjuk, hogy formálisan ugyanolyan alakot kaptunk, mint az időfejlődésnél, ami jól látszik a $\beta \to it$, $t \to -i\beta$ megfeleltetésből. Erre tehát ugyanaz a PI reprezentáció alkalmazható mint eddig (l. (75)), mégpedig praktikusan egy $t_i \to t_i - i\beta$ pályára alkalmazva

$$e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}A\, e^{i \int_{t_i}^{t_i - i\beta} \mathcal{L}} e^{-\psi_0^* \psi_0} \left|\psi_N, \Phi_N\right\rangle \left\langle \psi_0, \Phi_0\right| . \tag{102}$$

Ez az alak tehát folytonosan csatlakoztatható az eddigi pályák végéhez. Az eddigi valós időkontúr kinyúlik a komplex időkre is, amint azt az 1. ábrán láthatjuk. A $\hat{\varrho}$ eltűnik a PI kifejezéséből.

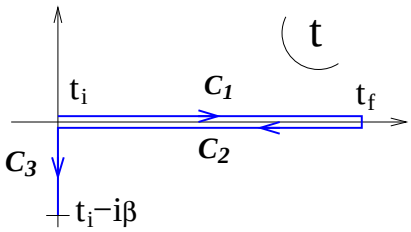

Figure 1: Véges hőmérsékletű idő-kontúr

Mint korábban is tettük, a különböző kontúrokon különböző tereket vezethetünk be. Ehhez az $e^{-\beta H}$ PI reprezentációjában szereplő pályákat 3-as indexxel látjuk el, és definiáljuk az euklideszi hatást, mint

$$S_E = -i \int_{t_i}^{t_i - i\beta} dt\, L[A(t), \partial_t A(t)] = \left\{ \begin{array}{l} t = t_i - i\tau,\ \tau = i(t - t_i) \\ dt = -i d\tau,\ \tau = [0, \beta] \\ A(t_i - i\tau) = A^{(3)}(\tau),\ \partial_t = i\partial_\tau \end{array} \right\} = \int_0^\beta d\tau\, (-) L[A^{(3)}(\tau), i\partial_\tau A^{(3)}(\tau)]. \tag{103}$$

A generátor-funkcionált (91) kiegészíthetve a 3-as indexű terekkel illetve áramokkal kapjuk:

$$Z[J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}] = \int_{\text{(anti)periodikus}} \mathcal{D}A^{(1)} \mathcal{D}A^{(2)} \mathcal{D}A^{(3)}\, e^{iS[A^{(1)}] - iS[A^{(2)}] - S_E[A^{(3)}]}\, e^{\int \left[iJ^{(1)}A^{(1)} + iJ^{(2)}A^{(2)}\right] - \int_0^\beta d\tau J^{(3)} A^{(3)}}. \tag{104}$$

Most $Z[0,0,0]$ nem 1, hanem

$$Z[0,0,0] = Z_0 = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \hat{H}} = \int_{\text{(anti)periodikus}} \mathcal{D}A^{(3)}\, e^{-S_E[A^{(3)}]}. \tag{105}$$

A fenti alak következményeként most akár

$$\hat{A} = \mathrm{T}_\tau A_1(it_1) \ldots A_n(it_n)\, \mathrm{T}^* B_1(t_1') \ldots B_m(t_m')\, \mathrm{T} C_1(t_1'') \ldots C_\ell(t_\ell'') \tag{106}$$

operátor várható értékét is számolhatjuk ezzel a kifejezéssel, ahol T_τ a 3. kontúron érvényes időrendezést jelenti:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \frac{\delta^n Z[J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}]}{(-)\delta J^{(3)} \ldots i\delta J^{(2)} \ldots i\delta J^{(1)}}. \tag{107}$$

Az egyensúly következménye, hogy időeltolás-invariáns, így t_i invariáns a rendszerünk, vagyis választható $t_i \to -\infty$. Ekkor azonban jelentős egyszerűsítést kaphatunk. Ha olyan (összefüggő) korrelációs függvényt nézünk, amelynek van argumentuma $C_{1,2}$-n és C_3-on is, akkor közöttük végtelen hosszú propagálásra van szükség. Minden reális kölcsönható elméletben van valamilyen csillapodás, ami azt jelenti, hogy ezek a várható értékek nullák lesznek. Más szóval a dinamika szempontjából a C_3 kontúr *lecsatolódik* a $C_{1,2}$ kontúrról, ezért elég kizárólag az ezeken a kontúrokon levő terek saját maguk közötti korrelációját kiszámolni.

3.1 Vákuum várható érték

A vákuum várható érték a véges hőmérsékletű eset egy speciális határesete. Ha ugyanis $\beta \to \infty$, akkor energia sajátállapotokkal reprezentálva

$$e^{-\beta H} = \sum_n e^{-\beta E_n} \, |n\rangle \langle n| \overset{\beta\to\infty}{\longrightarrow} |0\rangle \langle 0| \,. \tag{108}$$

A vákuum várható érték tehát a nulla hőmérsékletű határeset.

Ekkor $\hat{\varrho} = |0\rangle \langle 0|$, valamint kizárólag időrendezett szorzatot számolunk. Ekkor (79) kifejezésből

$$\langle 0|\hat{A}|0\rangle = \sum_n \left\langle 0 \left| e^{iH(t_\infty - t_i)} \right| n \right\rangle \left\langle n \left| e^{-iH(t_\infty - t_1)} A_1 e^{-iH(t_1 - t_2)} \dots A_n e^{-iH(t_n - t_i)} \right| 0 \right\rangle . \tag{109}$$

Mivel források nélkül a vákuum egyértelműsége és az energiamegmaradás miatt nem keletkezhet később sem más, mint vákuum, ezért a fenti kifejezésben kizárólag $|n\rangle = |0\rangle$ marad. A vákuum normáltsága miatt

$$e^{iH(t_\infty - t_i)} \, |0\rangle = e^{-i\alpha} \, |0\rangle \quad \Rightarrow \quad e^{-i\alpha} = \langle 0|e^{iH(t_\infty - t_i)}|0\rangle = (\langle 0|e^{-iH(t_\infty - t_i)}|0\rangle)^* = \frac{1}{\langle 0|e^{-iH(t_\infty - t_i)}|0\rangle}. \tag{110}$$

Itt a nevezőnek most már van időrendezett PI reprezentációja.

A második faktor teljesen időrendezett, és csak egy szakaszt tartalmaz a kontúrból, vagyis a PI-reprezentációja:

$$\langle 0|\mathrm{T}\hat{A}_1 \dots \hat{A}_n|0\rangle = \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]} \, A_1 \dots A_n}{\displaystyle\int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]}}. \tag{111}$$

3.2 Kémiai potenciál

Ha van megmaradó áramunk, akkor definiálhatjuk a nagykanonikus állapotösszeget

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(H - \mu N)}, \qquad [H, N] = 0. \tag{112}$$

Ekkor pontosan ugyanúgy járhatunk el, mint fent, azzal a kivétellel, hogy az Euklideszi hatásba bele kell illeszteni a megmaradó áramot is. Ha N mint töltéssűrűség integrálja áll elő, akkor

$$N = \int d^3\mathbf{x} n(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \to \mathcal{H} - \mu n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \to \mathcal{L} + \mu n \quad \Rightarrow \quad S_E \to S_E - \mu \int_0^\beta d\tau N[A^{(3)}, i\partial_\tau A^{(3)}]. \tag{113}$$

3.3 Propagátorok

Egyensúlyban az általános (94) alak egyszerűbbé válik. Kihasználjuk, hogy homogén térben az egyensúly tér- és időeltolás invariáns, ekkor a propagátorok csak az argumentumok különbségétől függenek, azaz lehet $t_1 = t$, $t_2 = 0$ argumentumokat használni (94)-ben. Ezen felül még a C_3 kontúron felvett propagátorokat is kiszámolhatjuk, azaz a következő rendezéseket fogjuk tekinteni:

$$\begin{aligned}
iG^{12}_{AB}(t) &= \langle \mathrm{T}_C \, A^{(1)}(t) B^{(2)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \mathrm{Tr} \left[e^{-\beta H} \alpha B(0) A(t) \right] \\
iG^{21}_{AB}(t) &= \langle \mathrm{T}_C \, A^{(2)}(t) B^{(1)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \mathrm{Tr} \left[e^{-\beta H} A(t) B(0) \right] \\
iG^{11}_{AB}(t) &= \langle \mathrm{T}_C \, A^{(1)}(t) B^{(1)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \mathrm{Tr} \left[e^{-\beta H} \mathrm{T} A(t) B(0) \right] = \Theta(t) \, iG^{21}_{AB}(t) + \Theta(-t) \, iG^{12}_{AB}(t) \\
iG^{22}_{AB}(t) &= \langle \mathrm{T}_C \, A^{(2)}(t) B^{(2)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \mathrm{Tr} \left[e^{-\beta H} \mathrm{T}^* A(t) B(0) \right] = \Theta(t) \, iG^{12}_{AB}(t) + \Theta(-t) \, iG^{21}_{AB}(t) \\
G^{33}_{AB}(t) &= \langle \mathrm{T}_C \, A^{(3)}(t) B^{(3)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \mathrm{Tr} \left[e^{-\beta H} \mathrm{T}_\tau A(-i\tau) B(0) \right] = \Theta(\tau) \, iG^{21}_{AB}(-i\tau) + \Theta(-\tau) \, iG^{12}_{AB}(-i\tau),
\end{aligned} \tag{114}$$

Megjegyzés: a G^{33}_{AB} propagátorba nem szokták beledefiniálni az i-t, mi is ezt a konvenciót követjük.

Az R/A formalizmus képletei megegyeznek az általános nemegyensúlyi körülmények között talált (98) kifejezésekkel. A spektrál függvény szintén a korábbiaknak megfelelően (99) és (100) kifejezésekkel adható meg.

Miután minden kifejezhető G^{12} és G^{21} segítségével, csak ezt a kettőt vizsgáljuk tovább. Kihasználva, hogy $e^{-\beta H}$ kezelhető úgy is, mint egy $-i\beta$ idejű eltolás, valamint a trace ciklikusságát, kapjuk

$$\begin{aligned} iG^{12}_{AB}(t) &= \frac{\alpha}{Z_0}\,\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}B(0)A(t)\right] = \frac{\alpha}{Z_0}\,\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}e^{\beta H}A(t)e^{-\beta H}B(0)\right] = \\ &= \frac{\alpha}{Z_0}\,\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}A(t-i\beta)B(0)\right] = \alpha\, iG^{21}_{AB}(t-i\beta). \end{aligned} \tag{115}$$

Ez a KMS-feltétel (Kubo-Martin-Schwinger). Fourier transzformáció után, valamint kihasználva (99) egyenletet

$$iG^{12}_{AB}(\omega) = \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\, iG^{21}_{AB}(t-i\beta) = \alpha e^{-\beta\omega} iG^{21}_{AB}(\omega) = \alpha e^{-\beta\omega}(\varrho_{AB}(\omega) + iG^{12}_{AB}(\omega)), \tag{116}$$

ahonnan

$$iG^{12}_{AB}(\omega) = \alpha n_\alpha(\omega)\varrho_{AB}(\omega), \quad iG^{21}_{AB}(\omega) = (1+\alpha n_\alpha(\omega))\varrho_{AB}(\omega), \quad \text{ahol} \quad n_\alpha(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega}-\alpha}, \tag{117}$$

a Bose-Einstein (+) illetve Fermi-Dirac (-) eloszlás. A formula egyik fő ereje, hogy *tetszőleges* A, B operátorra igaz marad! Az n_α eloszlások egy lényeges tulajdonsága

$$1 + \alpha n_\alpha(-\omega) = -\alpha n_\alpha(\omega), \tag{118}$$

hiszen

$$1 + \frac{\alpha}{e^{-\beta\omega}-\alpha} = -\frac{e^{-\beta\omega}}{\alpha - e^{-\beta\omega}} = -\alpha\frac{1}{e^{\beta\omega}-\alpha}. \tag{119}$$

Nulla hőmérsékleten:

$$n_\alpha(\omega) \stackrel{T\to 0}{\longrightarrow} -\alpha\Theta(-\omega). \tag{120}$$

Kémiai potenciál esetén is elvégezhető a fenti gondolatmenet, ha az A operátor határozott töltéssel rendelkezik, azaz

$$[N, A] = qA \quad \Rightarrow \quad A(s) = e^{-sN}Ae^{sN}: \qquad \frac{dA(s)}{ds} = -qA(s) \quad \Rightarrow \quad e^{-sN}Ae^{sN} = e^{-qs}A. \tag{121}$$

Másik levezetés:

$$e^{-sN}A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n}{n!}N^nA = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n}{n!}N^{n-1}A(q+N) = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n}{n!}A(q+N)^n = Ae^{-s(q+N)}. \tag{122}$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} iG^{12}_{AB}(t) &= \frac{\alpha}{Z_0}\,\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta(H-\mu N)}B(0)A(t)\right] = \frac{\alpha}{Z_0}\,\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta(H-\mu N)}e^{\beta(H-\mu N)}A(t)e^{-\beta(H-\mu N)}B(0)\right] = \\ &= e^{-q\beta\mu}\frac{\alpha}{Z_0}\,\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta(H-\mu N)}A(t-i\beta)B(0)\right] = e^{-q\beta\mu}\,\alpha\, iG^{21}_{AB}(t-i\beta). \end{aligned} \tag{123}$$

Innen:

$$iG^{12}_{AB}(\omega) = \alpha e^{-\beta(\omega+q\mu)}(\varrho_{AB}(\omega) + iG^{12}_{AB}(\omega)), \tag{124}$$

ahonnan

$$iG^{12}_{AB}(\omega) = \alpha n_\alpha(\omega+q\mu)\varrho_{AB}(\omega,\mu), \quad iG^{21}_{AB}(\omega) = (1+\alpha n_\alpha(\omega+q\mu))\varrho_{AB}(\omega,\mu). \tag{125}$$

R/A formalizmusban a retardált (ra) propagátor (98) miatt a spektrál függvénnyel arányos. Kihasználva a theta-függvény Fourier transzformált alakját

$$\Theta(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\Theta(t) \to \int\limits_{0}^{\infty} dt\, e^{i\omega t - \varepsilon t} = \frac{i}{\omega + i\varepsilon}, \tag{126}$$

valamint hogy a szorzat Fourier-transzformáltja konvolúció

$$(fg)(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)g(t)\, e^{i\omega t} = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi}\, f(\omega')g(\omega'') \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega'-\omega'')}t = \int \frac{d\omega'}{2\pi}\, f(\omega-\omega')g(\omega'), \quad (127)$$

kapjuk $iG^{ra}_{AB}(k) = (\Theta\varrho_{AB})(k)$ miatt

$$G^{ra}_{AB}(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{\varrho_{AB}(\omega,\mathbf{k})}{k_0-\omega+i\varepsilon}, \qquad G^{ar}_{AB}(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{\varrho_{AB}(\omega,\mathbf{k})}{k_0-\omega-i\varepsilon}, \quad (128)$$

Kramers-Krönig relációkat.

A Kramers-Krönig relációk felfoghatók úgy is, mint a kauzalitás következményei. Ez annyit jelent, hogy ha egy korrelátor tartalmazza a theta-függvényt, ami (l. később) azt jelenti, hogy a válasz szigorúan a hatást követi, akkor a Fourier-transzformált alak ilyen alakú.

A relációk következménye, hogy a retardált illetve avanzsált propagátor úgy kapható, mint a "generikus" propagátor az $\omega \pm i\varepsilon$ helyen (Landau-előírás):

$$G_{AB}(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{\varrho_{AB}(\omega,\mathbf{k})}{k_0-\omega} \quad \Rightarrow \quad G^{ra}_{AB}(k) = G_{AB}(k_0+i\varepsilon,\mathbf{k}), \quad G^{ar}_{AB}(k) = G_{AB}(k_0-i\varepsilon,\mathbf{k}). \quad (129)$$

A Kramers-Krönig relációkat invertálni is lehet. Ehhez a diszkontinuitás fogalmát vezetjük be:

$$\operatorname*{Disc}_x f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)). \quad (130)$$

Speciálisan

$$\operatorname*{Disc}_x \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon}\right] = -2\pi i\delta(x). \quad (131)$$

Emiatt

$$\varrho_{AB}(k) = \operatorname*{Disc}_{k_0} iG_{AB}(k) = \operatorname*{Disc}_{k_0} iG^{ra}_{AB}(k). \quad (132)$$

Ez összhangban van a (100) relációval és a (129) egyenletből adódó retardált és avanzsált Green függvénnyel.

Az rr propagátor (Keldysh-propagátor):

$$G^{rr}_{AB}(k) = \left(\frac{1}{2} + \alpha n_\alpha(k_0)\right)\varrho_{AB}(k). \quad (133)$$

Láthatóan a spektrál függvények központi szerepet játszanak, emiatt érdemes néhány tulajdonságukat megállapítani (kihasználva egyensúlyban az időeltolás-invarianciát)

$$\begin{aligned}
\varrho^*_{AB}(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\left\langle[B^\dagger(0), A^\dagger(t)]\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\left\langle[B^\dagger(t), A^\dagger(0)]\right\rangle = \varrho_{B^\dagger A^\dagger}(\omega),\\
\varrho_{AB}(-\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\left\langle[A(t), B(0)]\right\rangle = -\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\left\langle[B(t), A(0)]\right\rangle = -\alpha\varrho_{BA}(\omega),
\end{aligned} \quad (134)$$

A fentiek miatt a spektrál függvény valós, ha

$$\varrho^*_{AB}(\omega) = \varrho_{AB}(\omega) = \varrho_{B^\dagger A^\dagger}(\omega) \quad \Rightarrow \quad B = A^\dagger. \quad (135)$$

Ebben az esetben további megállapításokat tehetünk. Felhasználva, hogy:

$$A(x) = e^{iPx}A(0)e^{-iPx}, \quad (136)$$

ahol P a négyesimpulzus operátora, és beszúrva egy teljes négyesimpulzus sajátállapot-rendszert a korrelátorba, kapjuk

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} e^{-\beta H}[A(x),B(0)] &= \sum_n \left\langle n \left| e^{-\beta H}[A(x),B(0)] \right| n \right\rangle = \sum_{n,m} \left(e^{-\beta E_n} - \alpha e^{-\beta E_m}\right) \langle n \left| A(x) \right| m \rangle \left\langle m \left| A^\dagger(0) \right| n \right\rangle = \\ &= \sum_{n,m} \left(e^{-\beta E_n} - \alpha e^{-\beta E_m}\right) e^{i(P_n - P_m)x} \left| \langle n \left| A(0) \right| m \rangle \right|^2. \end{aligned} \tag{137}$$

Emiatt

$$\varrho_{AA^\dagger}(k) = \sum_{n,m} (2\pi)^4 \delta(k + P_n - P_m) \left(e^{-\beta E_n} - \alpha e^{-\beta E_m}\right) \left| \langle n \left| A(0) \right| m \rangle \right|^2. \tag{138}$$

A fenti formula következményei:

- diszkrét spektrum esetén $\varrho_{AA^\dagger}(k)$ Dirac-delták sorozatából áll (ezek összeolvadhatnak egy folytonos függvénnyé)
- $\varrho_{AA^\dagger}(k) \neq 0$ ott, ahol van két olyan sajátáallapot, amelyre $E_n - E_m = k_0$ és $\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m = \mathbf{k}$.
- Ha $k_0 > 0$, akkor $E_m > E_n$, emiatt az exponenciálisok különbsége mindig pozitív. Tehát

$$\varrho_{AA^\dagger}(k_0 > 0, \mathbf{k}) > 0. \tag{139}$$

- nulla hőmérsékleten csak akkor kapunk járulékot, ha $E_n = 0$ vagy $E_m = 0$. Ha $k_0 > 0$, akkor a Dirac-delta csak akkor teljesülhet, ha $E_m > E_n$, azaz $E_n = 0$ esetben. Ekkor

$$\varrho_{AA^\dagger}(k)\Big|_{k_0>0,T=0} = \sum_m (2\pi)^4 \delta(k - P_m) \left| \langle 0 \left| A(0) \right| m \rangle \right|^2, \tag{140}$$

  ennek értelmezése: súlyozott állapotsűrűség.

Ebben az esetben $G_{AA^\dagger}$ "generikus" propagátor is valós, így igaz, hogy

$$G^{ra*}_{AA^\dagger}(k) = G^*_{AA^\dagger}(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) = G_{AA^\dagger}(k_0 - i\varepsilon, \mathbf{k}) = G^{ar}_{AA^\dagger}(k). \tag{141}$$

Emellett

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} G^{ra}_{AA^\dagger}(k) &= \operatorname{Im} G_{AA^\dagger}(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) = \frac{1}{2i}\left[G_{AA^\dagger}(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) - G_{AA^\dagger}(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k})\right] = -\frac{1}{2}\varrho_{AA^\dagger}(k) \\ \operatorname{Re} G^{ra}_{AA^\dagger}(k) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\varrho_{AA^\dagger}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega + i\varepsilon} = \mathcal{P} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varrho_{AA^\dagger}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega} \end{aligned} \tag{142}$$

Az avanzsált propagátornál az imaginárius rész számolásánál egy előjelkülönbség jön be.

Vizsgáljuk meg az imaginárius idejű propagátort is. Először is, a KMS feltétel miatt $0 \leq \tau \leq \beta$ tartományban

$$G^{33}_{AB}(-\tau + \beta) = iG^{21}_{AB}(i\tau - i\beta) = \alpha i G^{12}_{AB}(i\tau) = \alpha G^{33}_{AB}(-\tau). \tag{143}$$

Bár a G^{33}_{AB} eredetileg csak $\tau \in [-\beta, \beta]$ tartományban értelmezett, a fenti képlet miatt szokták kiterjeszteni a teljes valós tartományra mint (anti)periodikus függvényt.

A Fourier transzformált a véges illetve periodikus τ tartomány miatt diszkrét lesz. A fermionikus/bozonikus esetben a következő frekvenciák fordulhatnak elő:

$$\omega_n = \begin{cases} 2\pi n T & \text{bozonokra} \\ (2\pi + 1) n T & \text{fermionokra.} \end{cases} \tag{144}$$

Ekkor a Fourier-transzformált alakjára a következő képletet használhatjuk

$$f(\omega_n) = \int_0^\beta d\tau\, e^{i\omega_n \tau} f(\tau), \qquad f(\tau) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} f(\omega_n). \tag{145}$$

Ekkor a G^{33} propagátorra a következő kifejezés adódik:

$$G^{33}_{AB}(\omega_n,\mathbf{k}) = \int_0^\beta d\tau\, e^{i\omega_n\tau} G^{33}_{AB}(\tau,\mathbf{k}) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega}-\alpha}\varrho_{AB}(\omega,\mathbf{k}) \int_0^\beta d\tau\, e^{(i\omega_n-\omega)\tau} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\varrho_{AB}(\omega,\mathbf{k})}{\omega - i\omega_n}. \tag{146}$$

Összehasonlítva ezt a retardált propagátorra kapott Kramers-Krönig relációval (128) kapjuk:

$$-\,G^{33}_{AB}(i\omega_n \to k_0 + i\varepsilon,\mathbf{k}) = G^{ra}_{AB}(k). \tag{147}$$

Megjegyzés: egyes könyvekben más alakot látunk, ez egyrészt a Fourier-transzformáció definíciójának különbségéből, másrészt a G^{33}_{AB} propagátor definíciójának különbségéből származik. Ezért mindig egyeztessük a definíciókat az alkalmazás előtt!

Végezetül említsük meg a kanonikus kommutációs relációk következményét a spektrál függvényre. Valós térben

$$\varrho_{AB}(t=0,\mathbf{x}) = \langle [A(0,\mathbf{x}), B(0)]_\alpha \rangle\,. \tag{148}$$

Mivel A és B operátor is az alapmezők polinomjai, ezért a kanonikus kommutációs relációk segítségével a jobb oldal kiszámítható. Lokális operátorok esetén az eredmény arányos lesz $\delta(\mathbf{x})$-szel (hiszen különböző helyen levő lokális operátor ugyanabban az időben nem hathat egymásra a relativitáselmélet, illetve a kauzalitás miatt). Vagyis $[A(0,\mathbf{x}), B(0)]_\alpha = C\delta(\mathbf{x})$, ahol C valamilyen operátor. Ez azt jelenti, hogy Fourier-térben érvényes a következő *összegszabály* (sum rule)

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\varrho_{AB}(\omega,\mathbf{k}) = \langle C \rangle\,, \tag{149}$$

ahol a jobb oldal független $\mathbf{k}$-tól (azonban esetleg függhet a hőmérséklettől). Speciális példaként említsük meg, hogy bozonikus tereknél $A=\Pi$, $B=\Phi$ esetén $C=[\Pi,\Phi]=-i$, arányos az egységoperátorral. Tehát

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\varrho_{\Pi\Phi}(\omega,\mathbf{k}) = -i. \tag{150}$$

Mivel a legtöbb esetben $\Pi = \partial_t\Phi$, ezért írható az is, hogy

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\omega\varrho_{\Phi\Phi}(\omega,\mathbf{k}) = 1. \tag{151}$$

Fermionikus rendszerekben $A=\Psi^\dagger$, $B=\Psi$ esetben, hozzátéve, hogy általában $\Pi = i\Psi^\dagger$, kapjuk $C=\{\Psi^\dagger,\Psi\} = 1$, így a sum rule

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\varrho_{\Psi^\dagger\Psi}(\omega,\mathbf{k}) = 1. \tag{152}$$

3.4 Szabad elméletek

3.4.1 Bozonok

Az eddig elmondottak tetszőleges kölcsönható elméletre igazak voltak. Kvadratikus elméletek esetén azonban ki is lehet számolni a korrelációs függvényeket. Itt kizárólag téridőben lokális elméleteket fogunk vizsgálni, vagyis amelyben az idő- és térderiváltak csak polinomiálisan fordulnak elő.

Kezdjük a legegyszerűbb elmélettel, amely egyetlen, tér- és időeltolás invariáns valós (kvantálva önadjungált) bozonikus szabadsági fokot tartalmaz (Klein-Gordon elmélet). A Lagrange- illetve Hamilton-sűrűsége, térbeli Fourier-transzformáció után

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\Phi)^2 - \frac{1}{2}\Phi\,\omega^2(i\boldsymbol{\partial})\Phi \equiv \frac{1}{2}\Phi\mathcal{K}\Phi, \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\Phi\,\omega^2(i\boldsymbol{\partial})\Phi, \tag{153}$$

ahol $\omega^2(i\boldsymbol{\partial})$ csak a térszerű deriváltaktól függő függvény. A kanonikus kvantálás relációi:

$$[\Phi(t,\mathbf{x}),\Pi(t,\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad [\Phi(t,\mathbf{x}),\Phi(t,\mathbf{y})] = 0, \qquad [\Pi(t,\mathbf{x}),\Pi(t,\mathbf{y})] = 0. \tag{154}$$

Emiatt a mozgásegyenletek

$$\partial_t\hat{\Phi}(t,\mathbf{x}) = i[H,\hat{\Phi}] = \int d^3\mathbf{y}\frac{i}{2}[\hat{\Pi}^2(t,\mathbf{y}),\hat{\Phi}(t,\mathbf{x})] = \hat{\Pi}(t,\mathbf{x})$$
$$\partial_t\hat{\Pi}(t,\mathbf{x}) = i[H,\hat{\Pi}] = \int d^3\mathbf{y}\frac{-i}{2}[\hat{\Phi}(t,\mathbf{y})\omega^2(i\boldsymbol{\partial})\hat{\Phi}(t,\mathbf{y}),\hat{\Pi}(t,\mathbf{x})] = -\omega^2(i\boldsymbol{\partial})\hat{\Phi}(t,\mathbf{y})$$
$$\Rightarrow \quad (\partial_t^2+\omega^2(i\boldsymbol{\partial}))\hat{\Phi}(t,\mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\partial_t^2+\omega_{\mathbf{k}}^2)\hat{\Phi}(t,\mathbf{k}) = 0. \tag{155}$$

Ennek megoldása

$$\hat{\Phi}(t,\mathbf{k}) = \hat{\Phi}(0,\mathbf{k})\cos\omega_{\mathbf{k}}t + \hat{\Pi}(0,\mathbf{k})\frac{\sin\omega_{\mathbf{k}}t}{\omega_{\mathbf{k}}}. \tag{156}$$

A spektrál függvényre vonatkozó egyenlet tehát

$$\varrho(t,\mathbf{x}) = \langle[\Phi(t,\mathbf{x}),\Phi(0)]\rangle \quad \Rightarrow \quad (\partial_t^2+\omega_{\mathbf{k}}^2)\varrho(t,\mathbf{k}) = 0, \tag{157}$$

ennek mogoldása

$$\varrho(t,\mathbf{k}) = \varrho(0,\mathbf{k})\cos\omega_{\mathbf{k}}t + \partial_t\varrho(0,\mathbf{k})\frac{\sin\omega_{\mathbf{k}}t}{\omega_{\mathbf{k}}}. \tag{158}$$

A kezdeti feltételek könnyen kiolvashatók a kommutációs relációkból:

$$\varrho(0,\mathbf{x}) = \langle[\Phi(0,\mathbf{x}),\Phi(0)]\rangle = 0, \qquad \varrho(0,\mathbf{x}) = 0$$
$$\partial_t\varrho(0,\mathbf{x}) = \langle[\partial_t\Phi(0,\mathbf{x}),\Phi(0)]\rangle = -i\delta(\mathbf{x}), \qquad \partial_t\varrho(0,\mathbf{k}) = -i, \tag{159}$$

azaz a kezdeti feltételek, így a megoldás is független a sűrűségmátrixtól. Emiatt a spektrál függvény minden hőmérsékleten, minden kémiai potenciálnál (sőt, még nemegyensúlyi körülmények között is) ugyanolyan alakú:

$$\varrho(t,\mathbf{k}) = -i\frac{\sin\omega_{\mathbf{k}}t}{\omega_{\mathbf{k}}} \quad \Rightarrow \quad \varrho(k) = \frac{2\pi}{2\omega_{\mathbf{k}}}\Big[\delta(k_0-\omega_{\mathbf{k}})-\delta(k_0+\omega_{\mathbf{k}})\Big] = 2\pi\,\mathrm{sgn}\,k_0\delta(k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2). \tag{160}$$

Ebből az alakból nyilvánvaló, hogy $\varrho(k_0>0)>0$ valamint $\varrho(-k_0) = -\varrho(k_0)$ az általános szabályoknak megfelelően.

Korábban láttuk, hogy a spektrál függvény ott nem nulla, ahol adott $\mathbf{k}$-hoz energiaszint tartozik. Ez azt jelenti, hogy a Klein-Gordon hatás olyan részecskéket ír le, amelyek energiája

$$E^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2. \tag{161}$$

Ha $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2+m^2$, akkor egy relativisztikus, m tömegű részecske diszperziós relációját kapjuk.

A spektrál függvény valós, antiszimmetrikus (l. (134)), pozitív frekvenciákra pozitív. Ennek segítségével felírható

$$\begin{aligned}
G^{ra}(k) &= \frac{1}{(k_0+i\varepsilon)^2-\omega_{\mathbf{k}}^2},\\
G^{ar}(k) &= \frac{1}{(k_0-i\varepsilon)^2-\omega_{\mathbf{k}}^2},\\
iG^{12}(k) &= 2\pi\,\mathrm{sgn}\,k_0\,n_+(k_0)\delta(k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2),\\
iG^{21}(k) &= 2\pi\,\mathrm{sgn}\,k_0\,(1+n_+(k_0))\delta(k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2),\\
iG^{rr}(k) &= 2\pi\,\mathrm{sgn}(k_0)\left(\frac{1}{2}+n_+(k_0)\right)\delta(k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2) = 2\pi\left(\frac{1}{2}+n_+(\omega_k)\right)\delta(k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2),\\
iG^{11}(k) &= \frac{i}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2+i\varepsilon}+2\pi(\mathrm{sgn}\,k_0n_+(k_0)-\Theta(-k_0))\delta(k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2),\\
iG^{22}(k) &= \frac{-i}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2-i\varepsilon}+2\pi(\mathrm{sgn}\,k_0n_+(k_0)-\Theta(-k_0))\delta(k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2),\\
G^{33}(k) &= \frac{1}{k_0^2+\omega_{\mathbf{k}}^2} \qquad (k_0 = 2\pi nT).
\end{aligned} \tag{162}$$

A többpontfüggvényekhez használjuk a generátor funkcionált. Először integráljunk ki a kanonikus impulzus szerint:

$$\int \mathcal{D}\Pi e^{-i(\frac{1}{2}\Pi^2-\Pi\partial_t\Phi)} = \int \mathcal{D}\Pi e^{-\frac{i}{2}(\Pi-\partial_t\Phi)^2+\frac{i}{2}(\partial_t\Phi)^2} \sim e^{\frac{i}{2}(\partial_t\Phi)^2}. \tag{163}$$

Ez azt az általánosan is alkalmazható szabályt adja, hogy ha a Hamilton operátorban a kanonikus impulzustól való függés $\sim \Pi^2$, akkor formálisan a pályaintegrálban használhatjuk a $\Pi \to \partial_t\Phi$ átalakítást. Ebben az esetben tehát:

$$\mathcal{L}(\Pi,\Phi) \to \mathcal{L}(\partial_t\Phi,\Phi), \tag{164}$$

az eredeti Lagrange-függvény. A továbbiakban végig feltesszük, hogy ez a helyzet.

Ezután írhatjuk a pályaintegrálra, hogy

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{2}\Phi\mathcal{K}\Phi+J\Phi} = \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{2}(\Phi-iJ\mathcal{K}^{-1})\mathcal{K}(\Phi-iJ\mathcal{K}^{-1})+\frac{i}{2}J\mathcal{K}^{-1}J} = e^{\frac{i}{2}J\mathcal{K}^{-1}J}\int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{2}\Phi\mathcal{K}\Phi}. \tag{165}$$

Az invertálásnál figyelni kell a határfeltételekre; azonban a fenti formula miatt

$$iG = \left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J\delta J}\right|_{J=0} = i\mathcal{K}^{-1}, \tag{166}$$

így használhatjuk a korábbi eredményeinket:

$$Z[J^{(1)},J^{(2)},J^{(3)}] = Z_0 \exp\left(\frac{i}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, J^{(a)*}(k)G^{ab}(k)J^{(b)}(k)\right), \qquad Z_0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{2}\Phi\mathcal{K}\Phi}. \tag{167}$$

Még hátra van a Z_0 kiszámítása. Láttuk, hogy ehhez csak az imaginárius kontúr ad járulékot, azaz

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{-\frac{1}{2}\Phi\mathcal{K}_E\Phi} \sim (\det \mathcal{K}_E)^{-1/2}, \tag{168}$$

hiszen diagonális esetben

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \tag{169}$$

A szabad energiára kapjuk

$$F = -T\ln Z = \frac{1}{2}T\ln\det\mathcal{K}_E = \frac{T}{2}\,\mathrm{Tr}\ln\mathcal{K}_E. \tag{170}$$

A konkrét számításhoz alkalmazzunk egy trükköt: írjunk $\omega_{\mathbf{k}}^2 \to \tilde{\omega}_k^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2 + a$ alakot a Lagrange-függvénybe, a számítások végén $a \to 0$-t veszünk. Ekkor

$$\frac{\partial Z_0}{\partial a} = -\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \int \mathcal{D}\Phi\Phi^2(\tau,\mathbf{x})e^{-S_E} = -\frac{1}{2}\beta V\, Z_0\, \langle\Phi(0)\Phi(0)\rangle = -\frac{1}{2}\beta V\, Z_0\, iG^{rr}(x=0). \tag{171}$$

A differenciálegyenlet megoldása

$$Z_0 = e^{-\beta V f}, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{2}\, iG^{rr}(x=0) \tag{172}$$

A termodinamikai értelmezés szerint f a szabadenergia-sűrűség.

Felhasználva a G^{rr} alakját (l. (162)) írhatjuk

$$iG^{rr}(x=0) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, iG^{rr}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{2}+n_+(\tilde{\omega}_k)\right) 2\pi\delta(k_0^2-\tilde{\omega}_k^2) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}_k}(1+2n_+(\tilde{\omega}_k)), \tag{173}$$

innen

$$f(a_0) - f = \frac{1}{2}\int_0^{a_0} da \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}_k}(1+2n_+(\tilde{\omega}_k)) = \frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int_{\omega_k}^{\sqrt{\omega_k^2+a_0}} d\omega(1+2n_+(\omega)), \tag{174}$$

ahol az utolsó sorban bevezettük a $\omega^2 = \omega_k^2 + a$ új integrálási változót. Az integrál elvégezhető, a primitív függvény

$$\int d\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \right) = \frac{\omega}{2} + T \ln \left(1 - e^{-\beta\omega} \right). \tag{175}$$

Tegyük fel, hogy $a_0 \gg$ bármely más fizikai skála, ekkor elhagyjuk a $\Lambda \to \infty$ esetén nulla járulékokat, és kapjuk

$$f = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{\omega_\mathbf{k}}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\omega_\mathbf{k}}) \right) - \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{a_0} + f(a = \Lambda^2). \tag{176}$$

Az utolsó két tag hőmérsékletfüggetlen konstans, vagyis elhagyható. A maradékban az első tag felel meg a $T = 0$ járuléknak, és formálisan a nullponti energia felösszegzését jelenti. Ez a tag divergens, hiszen végtelen sok módusunk van. Mivel ez a tag is hőmérsékletfüggetlenül tolja el a szabadenergiát, ezért ezt is elhagyhatjuk. Ekkor a fizikai szabad energiára

$$F = fV = TV \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega_\mathbf{k}}). \tag{177}$$

A nyomás, illetve belső energia:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -T \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega_\mathbf{k}}), \qquad E = \frac{\partial \beta F}{\partial \beta} = V \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_\mathbf{k} n_+(\omega_\mathbf{k}). \tag{178}$$

Speciális esetekben ez ki is számítható:

- ha $\omega_\mathbf{k} = \mathbf{k}^2/(2m)$, és $T \ll m$, akkor

$$F = -TV \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2}, \qquad p = T \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2}, \qquad E = \frac{3}{2} pV. \tag{179}$$

  Megjegyzés: ha a szokásos $\hbar$ és k_B faktorokat visszaírjuk, akkor $p = T(mk_BT)^{3/2}/(2\pi\hbar^2)^{3/2}$ eredményt kapjuk.

- ha $\omega_\mathbf{k} = m + \mathbf{k}^2/(2m)$, és $T \ll m$, akkor

$$F = -TV \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta m}, \qquad p = T \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta m}, \qquad E = V \left(\frac{3}{2} T + m \right) \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta m}. \tag{180}$$

- ha $\omega_\mathbf{k} = k$ ultrarelativisztikus diszperziós relációnk van, akkor

$$F = -\frac{\pi^2}{90} VT^4, \qquad p = \frac{\pi^2}{90} T^4, \qquad E = 3pV. \tag{181}$$

  A $\hbar$ illetve k_B faktorokat is beírva $p = \frac{\pi^2}{90c^3\hbar^3}(k_BT)^4$.

Több szabadsági fok esetén feltesszük, hogy Π-ben diagonális a Hamilton-operátor, valamint megmarad az impulzus. Ekkor, térszerű Fourier-térben

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Pi_i^\dagger \Pi_i - \frac{1}{2} \Phi_i^\dagger \Omega_{ij} \Phi_j \equiv \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}^\dagger \mathbf{\Pi} - \frac{1}{2} \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Omega} \mathbf{\Phi}. \tag{182}$$

ahol $\mathbf{\Omega}$ szimmetrikus, sajátértékei mind pozitívak, azaz létezik szimmetrikus valós gyöke: $\boldsymbol{\omega}^2 = \mathbf{\Omega}$. A mozgásegyenletek

$$(\partial_t^2 - \boldsymbol{\omega}^2) \mathbf{\Phi} = 0, \tag{183}$$

a spektrál függvény, mozgásegyenlete, illetve a megoldás:

$$\boldsymbol{\varrho}(x) = \langle [\mathbf{\Phi}(x), \mathbf{\Phi}(0)] \rangle \quad \Rightarrow \quad (\partial_t^2 - \boldsymbol{\omega}^2) \boldsymbol{\varrho}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varrho} = -i\boldsymbol{\omega}^{-1} \sin \boldsymbol{\omega} t, \tag{184}$$

mert $\boldsymbol{\varrho}(0) = 0$ valamint $\partial_t \boldsymbol{\varrho}(0, \mathbf{k}) = -i\mathbf{1}$. Hogy a Fourier transzformációt el tudjuk végezni, a projektor-felbontást használjuk

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_\lambda \omega_\lambda P_\lambda, \qquad P_\lambda P_\eta = \delta_{\eta\lambda} P_\lambda. \tag{185}$$

Ezzel

$$\boldsymbol{\varrho}(k) = \sum_\lambda \varrho_\lambda(k)\, P_\lambda, \tag{186}$$

ahol $\varrho_\lambda(k)$ az egy tömeghéj spektrál függvény (160) $\omega_\lambda(\mathbf{k})$ diszperziós relációval. Mivel minden kifejezésünk lineáris ϱ-ban, ezért a fenti szumma öröklődik az összes kifejezésünkre. Valójában megfelelő szabadsági fokokkal kifejezve független részecskék szummáját kapjuk.

3.4.2 Fermionok

Ugyanez a gondolatmenet alkalmazható a fermionok esetén is. A szabad Lagrange-függvény itt időben elsőrendű deriváltakat kell tartalmazzon. Ezen felül a (bi)spinortérben is tartalmazhat valamilyen struktúrát:

$$\mathcal{L} = \Psi^\dagger(i\partial_t - M(i\boldsymbol{\partial}))\Psi \equiv \Psi^\dagger \mathcal{K}\Psi \quad \Rightarrow \quad \Pi = i\Psi^\dagger \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \Psi^\dagger M(i\boldsymbol{\partial})\Psi. \tag{187}$$

A hatás hermitikusságához $\mathcal{K}$ hermitikus kell legyen. A kvantáláshoz

$$\{\Psi^\dagger(t,\mathbf{x}), \Psi(t,\mathbf{y})\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad \{\Psi(t,\mathbf{x}), \Psi(t,\mathbf{y})\} = 0. \tag{188}$$

Ezzel a mozgásegyenletek:

$$\partial_t\Psi(t,\mathbf{x}) = i[H, \Psi(t,\mathbf{x})] = i\int d^3\mathbf{y}\, [\Psi^\dagger(t,\mathbf{y})M(i\boldsymbol{\partial})\Psi(t,\mathbf{y}), \Psi(t,\mathbf{x})] = -iM(i\boldsymbol{\partial})\Psi(t,\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad (i\partial_t - M(i\boldsymbol{\partial}))\Psi = 0. \tag{189}$$

Fourier térben

$$(i\partial_t - M(\mathbf{k}))\Psi(t,\mathbf{k}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(t,\mathbf{k}) = e^{-iM(\mathbf{k})t}\Psi(0,\mathbf{k}). \tag{190}$$

Ezzel a spektrálfüggvény:

$$\varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(t,\mathbf{x}) = \left\langle\{\Psi(t,\mathbf{x}), \Psi^\dagger(0)\}\right\rangle \quad \Rightarrow \quad (i\partial_t - M(\mathbf{k}))\varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(t,\mathbf{k}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(t,\mathbf{k}) = e^{-iM(\mathbf{k})t}, \tag{191}$$

ahol figyelembe vettük a $\varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(0,\mathbf{k}) = 1$ kezdeti feltételt. Hogy a Fourier-integrált elvégezhessük, használjuk az M mátrix projektor-reprezentációját:

$$M(\mathbf{k}) = \sum_\lambda \omega_\lambda(\mathbf{k})\mathcal{P}_\lambda \quad \Rightarrow \quad \varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(k) = \sum_\lambda (2\pi)\delta(k_0 - \omega_\lambda(\mathbf{k}))\mathcal{P}_\lambda, \tag{192}$$

ahol $\mathcal{P}_\lambda$ a λ altérhez tartozó projektor. Ha csak egy frekvenciánk van, akkor a szumma egytagú. Relativisztikus részecske esetén egy részecske és egy antirészecske van a spektrumban, melyekhez tartozó energiák egymás ellentetjei, azaz $\omega_1 = -\omega_2$. Ekkor a spektrál függvény írható a következő alakban:

$$\begin{aligned}\varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(k) &= \sum_\lambda (2\pi)\left[\delta(k_0-\omega_\lambda)\mathcal{P}_\lambda + \delta(k_0+\omega_\lambda)\mathcal{P}'_\lambda\right] = \sum_\lambda (2\pi)\,\mathrm{sgn}\, k_0\delta(k_0^2-\omega_\lambda^2)\left[(k_0+\omega_\lambda)\mathcal{P}_\lambda + (k_0-\omega_\lambda)\mathcal{P}'_\lambda\right] = \\ &= (k_0+M)\sum_\lambda (P_\lambda + P'_\lambda)\,\varrho_\lambda(k),\end{aligned} \tag{193}$$

mert $MP_\lambda = \omega_\lambda P_\lambda$ és $MP'_\lambda = -\omega_\lambda P'_\lambda$; a fenti kifejezésben ϱ_λ a szabad bozon spektrál függvény (160). Ha csak egyetlen relativisztikus tömegünk van, akkor $P + P' = \mathbf{1}$, azaz ekkor

$$\varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(k) = D(k)\varrho(k), \qquad \text{ahol} \qquad D(k) = k_0 + M. \tag{194}$$

D neve Klein-Gordon osztó, mert ezzel szorozva a mozgásegyenletet megkapjuk a tömeghéj feltételt:

$$(k_0+M)(k_0-M) = k_0^2 - m^2. \tag{195}$$

A Dirac egyenlet esetén a mozgásegyenlet, illetve a KG osztó:

$$\not{k} - m, \qquad D(k) = \not{k} + m. \tag{196}$$

Feltéve, hogy egy Klein-Gordon osztónk van, a propagátorokra kapjuk

$$
\begin{aligned}
G^{ra}(k) &= \frac{D(k)}{(k_0+i\varepsilon)^2-\omega_{\mathbf{k}}^2},\\
G^{ar}(k) &= \frac{D(k)}{(k_0-i\varepsilon)^2-\omega_{\mathbf{k}}^2},\\
iG^{12}(k) &= -n_-(k_0)D(k)\varrho(k),\\
iG^{21}(k) &= (1-n_-(k_0))D(k)\varrho(k),\\
iG^{rr}(k) &= \left(\frac{1}{2}-n_-(k_0)\right)D(k)\varrho(k),\\
iG^{11}(k) &= \frac{iD(k)}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2+i\varepsilon}+D(k)(n_-(k_0)-\Theta(-k_0))\varrho(k),\\
iG^{22}(k) &= \frac{-iD(k)}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2+i\varepsilon}+D(k)(n_-(k_0)-\Theta(-k_0))\varrho(k),\\
G^{33}(k) &= \frac{D(k)}{k_0^2+\omega_{\mathbf{k}}^2} \qquad (k_0=(2n+1)\pi T).
\end{aligned}
\tag{197}
$$

Ezután írhatjuk a pályaintegrálra, hogy

$$
Z[J]=\int \mathcal{D}\Psi^\dagger\mathcal{D}\Psi e^{i\Psi^\dagger\mathcal{K}\Psi+J\Psi+J^\dagger\Psi^\dagger}=\int \mathcal{D}\Psi^\dagger\mathcal{D}\Psi e^{i(\Psi+i\mathcal{K}^{-1}J^\dagger)^\dagger\mathcal{K}(\Psi+i\mathcal{K}^{-1}J^\dagger)+iJ^\dagger\mathcal{K}^{-1}J}=e^{iJ^\dagger\mathcal{K}^{-1}J}\int \mathcal{D}\Psi^\dagger\mathcal{D}\Psi\, e^{i\Psi^\dagger\mathcal{K}\Psi},
\tag{198}
$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathcal{K}$ önadjungált. Az invertálásnál itt is figyelni kell a határfeltételekre, de igaz az, hogy

$$
iG_{\Psi\Psi^\dagger}(x)=\langle \mathrm{T}_C\Psi(x)\Psi^\dagger(0)\rangle=\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J^\dagger(0)}\bigg|_{J=0}=i\mathcal{K}^{-1}(x),
\tag{199}
$$

így itt is a fenti propagátor-mátrixot használhatjuk:

$$
Z[J^{(1)},J^{(2)},J^{(3)}]=Z_0\exp\left(\frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,J^{(a)\dagger}(k)G^{ab}(k)J^{(b)}(k)\right),\qquad Z_0=\int\mathcal{D}\Psi^\dagger\mathcal{D}\Psi e^{i\Psi^\dagger\mathcal{K}\Psi}.
\tag{200}
$$

Z_0 kiszámításához 1D (diagonális) esetben:

$$
\int d\Psi^\dagger d\Psi e^{-a\Psi^\dagger\Psi}=a,
\tag{201}
$$

ezért általános esetben

$$
Z_0=\det\mathcal{K}_E \quad\Rightarrow\quad F=-T\ln Z_0=-T\ln\det\mathcal{K}_E=-T\,\mathrm{Tr}\ln\mathcal{K}_E.
\tag{202}
$$

A konkrét számításhoz ugyanazt a trükköt alkalmazzuk, mint korábban, csak most $M\to M+a$ módon. Jelöljük ezen új mátrix sajátértékeit $\tilde\omega_\lambda$-val. Ekkor

$$
\frac{\partial Z_0}{\partial a}=-\int_0^\beta d\tau\int d^3\mathbf{x}\sum_\alpha\int\mathcal{D}\Psi^\dagger\mathcal{D}\Psi\Psi_\alpha^\dagger(\tau,\mathbf{x})\Psi_\alpha(\tau,\mathbf{x})e^{-S_E}=\beta V\,Z_0\sum_\alpha\big\langle\Psi(0)\Psi^\dagger(0)\big\rangle=\beta V\,Z_0\,i\,\mathrm{Tr}\,G^{rr}(x=0).
\tag{203}
$$

A szabadenergia innen

$$
\frac{\partial f}{\partial a}=-i\,\mathrm{Tr}\,G^{rr}(x=0).
\tag{204}
$$

Felhasználva a G^{rr} alakját (l. (197) és (192)) írhatjuk

$$
\begin{aligned}
-i\,\mathrm{Tr}\,G^{rr}(x=0) &= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,(-i)\,\mathrm{Tr}\,G^{rr}(k)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(-\frac{1}{2}+n_-(k_0)\right)2\pi\,\mathrm{Tr}\sum_\lambda P_\lambda\delta(k_0-\tilde\omega_\lambda)=\\
&=\sum_\lambda N_\lambda\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,(-\frac{1}{2}+n_-(\tilde\omega_\lambda)).
\end{aligned}
\tag{205}
$$

Így minden egyes módusra kapjuk:

$$f_\lambda(a=\Lambda) - f_\lambda = \int_0^\Lambda da \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,(-\frac{1}{2} + n_-(\tilde{\omega}_k)) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{\omega_\mathbf{k}}^{\omega_\mathbf{k}+\Lambda} d\omega(-\frac{1}{2} + n_-(\omega)), \tag{206}$$

ahol az utolsó sorban áttértünk $a \to \omega_k + a$ integrálási változóra. Az integrál itt is elvégezhető, a primitív függvénye

$$\int d\omega \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\omega}+1}\right) = -\frac{\omega}{2} - T\ln(1+e^{-\beta\omega}). \tag{207}$$

Innen kapjuk (elhagyva a $\Lambda \to \infty$ esetén eltűnő járulékokat)

$$f_\lambda = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\left(-\frac{\omega_k}{2} - T\ln(1+e^{-\beta\omega_\mathbf{k}})\right) + \frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\Lambda + f(a=\Lambda). \tag{208}$$

Az utolsó két tag, valamint az első tag hőmérséklet független állandó, vagyis elhagyható. Ekkor a fizikai szabad energiára kapjuk

$$F = fV = -TV\sum_\lambda N_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\ln(1+e^{-\beta\omega_\mathbf{k}^{(\lambda)}}). \tag{209}$$

Relativisztikusan invariáns rendszerekben minden pozitív sajátérték mellett egy negatív sajátérték is van. Mivel azonban

$$T\ln(1+e^{\beta\omega}) = \omega + T\ln(1+e^{-\beta\omega}), \tag{210}$$

ezért a pozitív és negatív sajátalterek ugyanazt a fizikai szabad energiát adják. Végülis:

$$F = -2TV\sum_\lambda N_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\ln(1+e^{-\beta\omega_\mathbf{k}^{(\lambda)}}), \tag{211}$$

ahol a felösszegzés már csak a pozitív energiás sajátalterekre történik. Dirac fermion esetén egy alterünk van $N_\lambda = 2$-vel (spin szabadsági fok). Erre

$$F = -4TV\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\ln(1+e^{-\beta\omega_k}). \tag{212}$$

Ez az (177) 1D bozonikus esethez képest a Bose-Einstein és Fermi-Dirac eloszlásokban tér el, valamint egy 4-es faktorban, amely a 2 spinbeállás és a részecske-antirészecske módusok járuléka.

A nyomás, illetve belső energia, egy fermionikus szabadsági fokra

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = T\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\ln(1+e^{-\beta\omega_\mathbf{k}}), \qquad E = \frac{\partial \beta F}{\partial \beta} = V\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\omega_\mathbf{k} n_-(\omega_\mathbf{k}). \tag{213}$$

Speciális esetekben ez ki is számítható. Klasszikus nemrelativisztikus részecskéknél ugyanazt kapjuk, mint korábban. Az ultrarelativisztikus limeszben pedig ($\omega_\mathbf{k} = k$)

$$F = -\frac{7}{8}\frac{\pi^2}{90}VT^4, \qquad p = \frac{7}{8}\frac{\pi^2}{90}T^4, \qquad E = 3pV. \tag{214}$$

3.5 Perturbációszámítás

Mi a helyzet akkor, ha az elméletünk nem kvadratikus? Kettéválasztjuk a hatást egy kvadratikus és egy magasabb rendű tagokat tartalmazó részre:

$$S = S_0 + S_{\text{int}}, \qquad S_0 \sim A^\dagger \mathcal{K} A, \qquad S_{\text{int}} = \int d^4x\, g\, \mathcal{L}_{\text{int}}(A(x_j)). \tag{215}$$

A g mennyiség a csatolási állandó, $\mathcal{L}_{\rm int}$ pedig a terek lokális polinomja. Várható érték számításakor

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{T}_c A_1(x_1)\dots A_n(x_n)\rangle &= \int \mathcal{D}A\, A_1(x_1)\dots A_n(x_n) e^{iS_0[A]+iS_{\rm int}[A]} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ig)^n}{n!}\int (\prod_{j=1}^{n} d^4y_j)\int \mathcal{D}A\, A_1(x_1)\dots A_n(x_n)\left[\prod_{j=1}^{n}\mathcal{L}_{\rm int}[A(x_j)]\right] e^{iS_0[A]}. \quad (216)\end{aligned}$$

Így a csatolási állandó szerinti sorfejtett alakban kapjuk meg a választ. Az együtthatókhoz a szabad térelméletbeli többpontfüggvényeket kell kiszámítanunk. A generátorfunkcionál alakja ekkor

$$\begin{aligned}Z[J] &= \int \mathcal{D}A\, e^{iS_0[A]+iS_{\rm int}[A]+JA} = e^{iS_{\rm int}[\delta/\delta J]}\int \mathcal{D}A\, e^{iS_0[A]+JA} = Z_0 e^{iS_{\rm int}[\delta/\delta J]} e^{iJ^\dagger GJ} = \\ &= Z_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ig)^n}{n!}\left(\int d^4x \mathcal{L}_{\rm int}\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\right)^n e^{iJ^\dagger GJ}. \quad (217)\end{aligned}$$

A többpontfüggvények számításánál a folyamat végén $J=0$-t kell vennünk. Mivel az $\exp[iJ^\dagger GJ]$ deriváltja $iGJ\exp[iJ^\dagger GJ]$, ezért a $J=0$ limeszt csak azok a tagok élik túl, ahol az iGJ előtagot is valami deriválja. Éppen ezért a deriválások párokba rendezhetők, végeredményben minden párhoz egy iG faktor fog tartozni.

A fenti formula szerint ezért egy korrelációs függvényt n-edrendben a következőképp számoljuk ki (Feynman szabályok):

- minden korrelálandó (külső) teret egy ponttal jellemzünk.
- felírjuk a kölcsönható Lagrange sűrűséget n különböző pontban (vertexek)
- a vertexeket és a külső tereket párosítjuk, a párosításokat egy vonallal reprezentáljuk. A vertexekből annyi vonal indul ki, ahány teret tartalmaz.
- minden vertexhez egy ig faktort rendelünk, a vonalakhoz iG propagátort. Végül integráljuk az egészet az összes vertex helye szerint.
- Fourier térben az integrálás a propagátorok 4-es impulzusára történik. Ha minden vertex energia- és impulzus őrző (lokális elméletben mindig így van), akkor a végén megmarad egy teljes energia- és impulzus őrző Dirac-delta.

A korábban tárgyalt lecsatolódási tétel miatt vegyes (ahol 12 illetve a 3 kontúr terei keveredenek) korrelációs függvények várható értéke nulla. Emiatt vagy csak a 3-as kontúron végezzük a perturbációszámítást, vagy csak az 12 kontúron. Az előbbi az imaginárius idejű vagy Matsubara perturbációszámítás, a második a valós idejű vagy Keldysh perturbációszámítás.

3.5.1 Matsubara elmélet

Ekkor kizárólag a 3-as kontúrt használjuk, ami lehetővé teszi, hogy csupán egyetlen típusú mezőt alkalmazzunk a PI-ban. Ráadásul a PI nem komplex fázist, hanem exponenciális elnyomást tartalmaz, ami biztosítja a konvergenciát. Ugyanakkor csak a C_3-on tudunk korrelációs függvényeket számolni, vagyis komplex időrendezett operátorszorzatok kiszámítása lehetséges, és az is a $[0,\beta]$ argumetnumokra. Minden korrelációs függvény β-ban periodikus illetve antiperiodikus lesz a PI tulajdonságai miatt. Itt tehát a generátor:

$$Z[J] = \int\limits_{\text{(anti)periodikus}} \mathcal{D}A e^{-S_E[A]+JA}, \qquad Z_0 = Z[0]. \quad (218)$$

Ez a formalizmus különösen alkalmas termodinamika számítására, hiszen

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} = e^{-\beta F} \quad \Rightarrow \quad F = -T\ln Z. \quad (219)$$

Formailag egyszerű, teljesen analóg a vákuum várható érték Wick forgatás utáni számításával véges időszerű térfogatban.

Hátránya, hogy a véges időtartomány miatt a Fourier-tér integrálok helyett összezések jönnek be, valós számok helyett egész számokkal kell jellemeznünk a frekvenciákat. Másrészt korrelációs függvényeket csak nemfizikai, imaginárius idő argumentumokra tudjuk kiszámolni.

Javaslat: ha mindenféleképpen Matsubara elméletben akarunk dolgozni, akkor használjunk a G^{33}-ra vegyes reprezentációt. $\tau \in [0, \beta]$ esetén $G^{33}(\tau) = iG^{21}(-i\tau)$, azaz

$$G^{33}(\tau, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-\tau k_0}(1 + \alpha n_\alpha(k_0))\varrho(k). \tag{220}$$

Szabad realtivisztikus esetben $\varrho(k) = D(k)2\pi(\delta(k_0 - \omega_k) - \delta(k_0 + \omega_k))/(2\omega_k)$, vagyis $\tau \in [0, \beta]$ esetre

$$\begin{aligned} G^{33}(\tau, \mathbf{k}) &= \frac{1}{2\omega_k}\left[e^{-\tau\omega_k}(1 + \alpha n_\alpha(\omega_k))D(\omega_k, \mathbf{k}) - e^{\tau\omega_k}(1 + \alpha n_\alpha(-\omega_k))D(-\omega_k, \mathbf{k})\right] = \\ &= \frac{e^{(\beta-\tau)\omega_k}D(\omega_k, \mathbf{k}) + \alpha e^{\tau\omega_k}D(-\omega_k, \mathbf{k})}{2\omega_k} n_\alpha(\omega_k), \end{aligned} \tag{221}$$

ahol felhasználtuk a $1 + \alpha n_\alpha(-\omega) = -\alpha n_\alpha(\omega)$ illetve a $1 + \alpha n_\alpha(\omega) = e^{\beta\omega} n_\alpha(\omega)$ azonosságokat. Ezen felül

$$G^{33}(-\tau, \mathbf{k}) = \alpha G^{33}(\beta - \tau, \mathbf{k}) = \frac{\alpha e^{\tau\omega_k}D(\omega_k, \mathbf{k}) + e^{(\beta-\tau)\omega_k}D(-\omega_k, \mathbf{k})}{2\omega_k} n_\alpha(\omega_k). \tag{222}$$

Ha felhasználjuk a $D(-k) = \alpha D(k)$ egyenletet (ami a spin-statisztika összefüggés következménye), akkor

$$G^{33}(-\tau, \mathbf{k}) = \alpha G^{33}(\tau, -\mathbf{k}). \tag{223}$$

3.5.2 Valós idejű formalizmus

Ebben az esetben kizárólag a $C_{1,2}$ kontúrt tekintjük. A generátorfunkcionál

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A e^{iS_E[A^{(1)}] - iS_E[A^{(2)}] + J^{(1)}A^{(1)} + J^{(2)}A^{(2)}}, \qquad Z[0] = 1. \tag{224}$$

A két hatásnak megfelelően minden tér és minden vertex megduplázódik. Az 1-es típusú vertexhez ig, a 2-eshez $-ig$ járulék tartozik. A vonalakhoz a végein található indexeknek megfelelő propagátort rendeljük.

Előnye, hogy nem kell szummákkal foglalkozni, amit a magasabb rendű diagramok számításánál nehéz elvégezni. Közvetlen fizikai jelentése van a kiszámolt mennyiségeknek, analitikus trükkök segítségével egyszerűbb eljárásokat lehet megvalósítani.

Hátránya, hogy két típusú terünk van, valamint hogy a termodinamikával nincs olyan közvetlen viszonyban (valójában az energia számításával itt is lehet termodinamikát értelmezni).

A legtöbb számítást a következőkben a valós idejű formalizmussal fogjuk végezni.

3.6 Φ^4 elmélet

Tekintsük a következő Lagrange függvényt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi(-\partial^2 - m^2)\Phi - \frac{\lambda}{24}\Phi^4. \tag{225}$$

A szabad rész a Klein-Gordon elmélettel egyezik, ahol $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$, így a propagátorokat mind ismerjük. A Φ^4 tag generálja a kölcsönhatásokat, az ennek megfelelő vertexből négy vonal indul ki, és $\pm i\lambda/24$ érték tartozik hozzá az 1-es illetve 2-es vertexeknek megfelelően.

Először írjuk fel a két- illetve négy-pont korrelációs függvényhez tartozó Feynman diagramokat (l. 2). A külső terekhez és a vertexekhez 1 illetve 2 indexeket kell rendelni.

Láthatóan nagyon sok redundancia van a számolásban. Hogy ezeket kiküszöböljük, az eredeti generátor funkcionál helyett mást kell használnunk. Elősziris több olyan járulékot látunk, amely több nem összefüggő rész-diagramból áll. Ezek járuléka az egyes elemek járulékának szorzata, amelyek egymástól teljesen függetlenül kerülnek kiszámításra. Elég lenne tehát az összefüggő tagokat kiszámítani: ezek generátora legyen $iW[J]$.

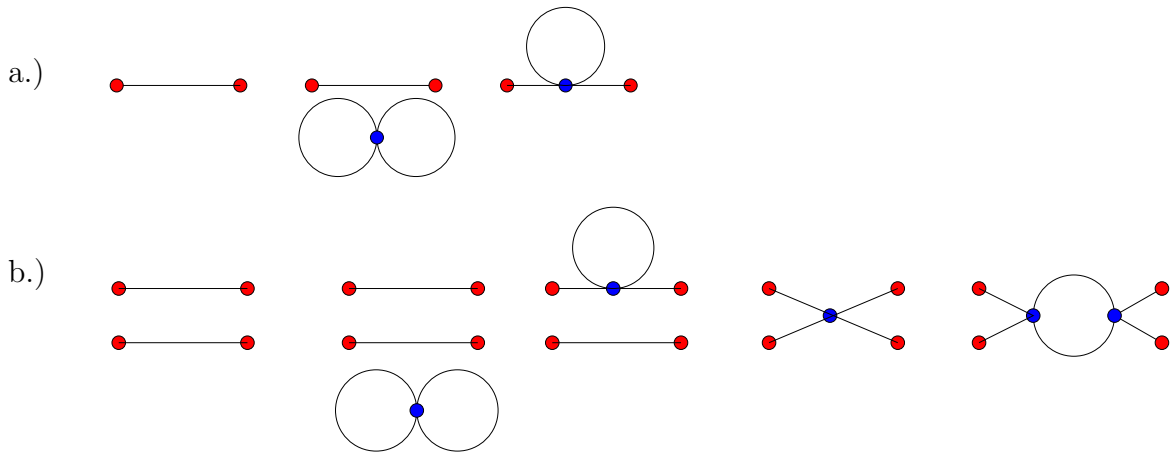

Figure 2: Feynman diagramok a két- és négypont függvényekre

Nézzük meg most a generátor funkcionál kiszámítását véges áramok mellett. Ekkor formálisan $\mathcal{L} \to \mathcal{L} - iJ\Phi$ Lagrange-függvényből kell számolnunk, és itt a 0-pont függvényeket kell felösszegeznünk. A generátor-funkcionál első deriváltjának számításakor 1-pont függvényt kell számolni. Minden egyes diagramnál található olyan rész, amely a külső vonallal összefügg, és olyan, amely attól diszjunkt. A diszjunkt rész azonban tetszőleges 0-pont függvény lehet, vagyis az összefüggő részt rögzítve az összes 0-pont függvény mellette állhat. Ez viszont éppen kiadja az eredeti $Z[J]$-t. Vagyis:

$$\frac{\delta Z}{\delta J} = i\frac{\delta W}{\delta J} Z \quad \Rightarrow \quad Z[J] = e^{iW[J]}. \tag{226}$$

Megjegyzés: az összefüggő vákuum diagramok (0-pont függvények) a négyestérfogattal arányos járulékot adnak, imaginárius idő formalizmusban βV járulékot. Több nem összefüggő rész esetén a megfelelő járulék $\sim V^n$. Ezért Z nem extenzív mennyiség. W azonban csak az összefüggő részt tartalmazza, így arányos V-vel. A szabadenergia tehát extenzív lesz. Az összefüggő részekből számolt Z a statisztikus fizikában kumuláns-kifejtésként ismert.

Egy másik fajta redundanciát is megszüntethetünk, ha észrevesszük, hogy az olyan vonalak, amelyek nem részei hurkoknak, rögzített impulzussal rendelkeznek. Ez következik az energia és impulzus megmaradásból. Ha egy ilyen vonalat elvágunk, akkor a diagram két nem összefüggő részre szakad, ezért az olyan diagramokat, ahol előfordulnak nem hurkok részét képző vonalak, 1-részecske reducibilisnek (1PR), az ilyen vonalat nem tartalmazó diagramot 1-részecske irreducibilisnek (1PI) nevezzük. Az 1PR diagramok számítás nélkül megkaphatók az 1PI diagramok ismeretében, jó lenne erre valami formulát levezetni. Jelöljük az 1PI diagramok generátorát Γ-val, neve effektív hatás.

A megfigyelés az, hogy $W[J]$ számításánál a csupasz vonalon lógó diagram rész pontosan olyan, mintha egy 1-pont függvényt számítanánk ki. A teljes összefüggő generátor tehát úgy kapható, hogy az 1PI generátor lábaira az 1-pont függvényeket tesszük fel. Ha

$$\bar{A}(x) = i\frac{\delta W}{\delta J(x)} \tag{227}$$

jelöli az egy-pont függvényt az áramok jelenlétében, akkor azt várnánk, hogy $W[J] \sim \Gamma[\bar{A}[J]]$. A kombinatorikai faktorok[1] miatt valójában a bal oldal $W - J\frac{\partial W}{\partial J}$, azaz

$$iW[J] = i\Gamma[\bar{A}] + \int J\bar{A}. \tag{228}$$

Ezt egyszer deriválva J szerint

$$\frac{\partial iW}{\partial J} = \frac{\partial i\Gamma}{\partial \bar{A}}\frac{\partial \bar{A}}{\partial J} + \bar{A} + J\frac{\partial \bar{A}}{\partial J} = \bar{A}. \tag{229}$$

[1] Magasabb pont függvények esetén elvárjuk, hogy az n-pont függvények az 1PI diagramok magja körül a teljes propagátoron keresztül érkeznek a külső lábakhoz.

Emiatt a J–$\bar{A}$ inverz reláció

$$J(x) = -i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{A}(x)} \tag{230}$$

Erre felírhatjuk

$$e^{i\Gamma[\bar{A}]} = e^{iW[J]-\int J\bar{A}} = \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]+\int J(A-\bar{A})} = \int \mathcal{D}a\, e^{iS[a+\bar{A}]+\int Ja}. \tag{231}$$

Ebben a formulában J-t mint $\bar{A}$ függvényét kell beírni, és az utolsó lépésben eltoltuk az integrációs állandót, $a = A - \bar{A}$. Emiatt $\langle a\rangle = \langle A\rangle - \bar{A} = 0$.

Ez a formula lehetőséget nyújt a Γ egyszerű kiszámítására:

$$e^{i\Gamma[\bar{A}]} = \int \mathcal{D}a\, e^{iS[a+\bar{A}]}\Big|_{\langle a\rangle=0}. \tag{232}$$

Ez a formula a háttérmező módszer alapegyenlete: vagyis Γ úgy számítható ki, hogy eltoljuk a kvantumtereket valamilyen háttérrel, és az így kapott hatást (ill. kezdeti feltételeket) az $\langle a\rangle = 0$ feltétel mellett értékeljük ki.

Kicsit átalakítva a fenti kifejezést

$$e^{i\Gamma[\bar{A}]} = \int \mathcal{D}A\, \delta(\langle A\rangle - \bar{A})e^{iS[A]}. \tag{233}$$

Ezt a formulát úgy értelmezhetjük, mintha W-t akarnánk kiszámolni $J = 0$-nál, de azzal a megszorítással, hogy csak azokat a konfigurációkat vesszük figyelembe, ahol a konfiguráció várható értéke az előre adott $\bar{A}$-val egyezik meg. Ezért Γ-t lehet megszorított partíciós függvényként értelmezni.

Ha eltekintünk a kvantum és statisztikus fluktuációktól, akkor $\langle a\rangle = 0$ helyett $a = 0$ írható, amely azt adja, hogy

$$e^{i\Gamma[\bar{A}]} = \varrho[\bar{A}]e^{iS[\bar{A}]} + \text{flukt.} \quad \Rightarrow \quad \Gamma = S + \text{kezd.felt.} + \text{flukt.}. \tag{234}$$

Vagyis Γ a fluktuációk nélküli elméletben tehát a klasszikus hatást adja vissza a kezdőfeltételekkel.

Másrészt a fizikai várható értékeket végülis $J = 0$ mellett kell kiszámolnunk (l. (93)). Ez azt jelenti, hogy $\bar{A}$ fizikai értékére felírhatjuk

$$iJ = \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{A}}\Big|_{\bar{A}^{phys}} = 0, \tag{235}$$

ami azt jelenti, hogy a mozgásegyenletet a klasszikus hatás helyett Γ generálja. E két tulajdonság miatt Γ-t effektív hatásként is szokták emlegetni.

Megjegyzés: az áramok illetve háttérmező szerinti kifejtésben

$$W[J] = \sum_n \frac{1}{n!}W^n_{i_1\dots i_n}J_{i_1}\dots J_{i_n}, \qquad \Gamma[\bar{A}] = \sum_n \frac{1}{n!}\Gamma^n_{i_1\dots i_n}\bar{A}_{i_1}\dots\bar{A}_{i_n}. \tag{236}$$

3.6.1 $\hbar$-kifejtés

Hogy lássuk, mi a klasszikus és kvantumos korrekció, írjuk vissza a $\hbar$-t a formulákba. A következő helyettesítéseket kell megtenni

$$H \to \frac{H}{\hbar}, \quad S \to \frac{S}{\hbar}, \qquad W \to \frac{W}{\hbar}, \qquad \Gamma \to \frac{\Gamma}{\hbar}. \tag{237}$$

Vizsgáljuk az összefüggő gráfok generátorát (W), és jelöljük szimbolikusan a kvadratikus tagot a hatásban $A\mathcal{K}A$-val, a kölcsönhatást g_cA^c-nel (az egyszerűség miatt csak egyfajta kölcsönhatást teszünk fel). Ekkor

$$e^{\frac{i}{\hbar}W_{ph}[J,g_c]} = \int \mathcal{D}A e^{\frac{i}{\hbar}(A\mathcal{K}A+g_cA^c)+\frac{1}{\hbar}JA} \sim \int \mathcal{D}A e^{i(A\mathcal{K}A+g_c\hbar^{c/2-1}A^c)+\frac{1}{\sqrt{\hbar}}JA} = e^{iW[J/\sqrt{\hbar},g_c\hbar^{c/2-1}]} \tag{238}$$

ahol a pályaintegrálban végrehajtottuk a $A \to \sqrt{\hbar}\,A$ változóhelyettesítést. Innen a perturbációszámítás szerint:

$$\begin{aligned}\langle A_1\dots A_n\rangle_{conn} &= \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial J_1}\dots\frac{\partial}{\partial J_1}\, iW_{ph}[J,g_c]\Big|_{J=0} = \hbar\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial J_1}\dots\frac{\partial}{\partial J_1}\, W[\frac{J}{\sqrt{\hbar}},g_c\hbar^{c/2-1}]\Big|_{J=0} = \\ &= \hbar^{-n/2+1}\sum_v (g_c\hbar^{c/2-1})^v W^{v,n}_{1\dots n} = \hbar^{-n/2+1}\sum_v g_c^v\hbar^{v(c/2-1)}W^{v,n}_{1\dots n},\end{aligned} \tag{239}$$

ahol v a vertexek száma.

Tekintsünk most egy diagramot, ahol v vertex van, n külső vonal és k belső vonal. Ezekre összefüggés: $cv = n + 2k$, mert a vertexekből kiinduló vonalak (cv) vagy a külső vonalakba futnak, vagy a belsőkbe, azonban a belső vonalak két vertexet kötnek össze. Megvizsgálhatjuk azt is, hogy mennyi integrál marad a diagramban: vertexenként egy energia-impulzus megmaradásunk van, minden belső vonalra egy integrálunk van, és a teljes diagramban kell maradjon egy energia-impulzus megmaradás a külső impulzusokra. Ezért a megmaradó integrálok száma (hurkok száma) $\ell = k - v + 1$. A fentiek miatt:

$$\ell = \left(\frac{c}{2} - 1\right) v - \frac{n}{2} + 1, \tag{240}$$

ami mindig pozitív kell legyen. Vagyis v helyett ℓ-re átírva a szummát

$$\langle A_1 \dots A_n \rangle_{conn} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \hbar^\ell g_c^v W_{1\dots n}^{\ell,n}, \qquad v = \frac{2\ell + n - 2}{c - 2}. \tag{241}$$

Vagyis a hurkok száma szerinti kifejtés megegyezik a $\hbar$ szerinti kifejtéssel.

A 1PI diagramok esetén a fenti gondoltmenet ugyanígy igaz, csakhogy hurok nélküli diagram kizárólag a 2 illetve c-pont függvény esetén lehet 1PI. Ezért, ahogy fentebb is láttuk, S-hez képest minden korrekció kvantum effektus.

3.6.2 1PI diagrammok, sajátenergia

Adjuk meg az 1PI és az összefüggő diagramok közötti kapcsolatot az első néhány esetre:

$$J_i = -i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{A}_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta J_i}{\delta J_k} = \delta_{jk} = -i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{A}_i\delta\bar{A}_j}\frac{\delta\bar{A}_j}{\delta J_k} = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{A}_i\delta\bar{A}_j}\frac{\delta^2 W}{\delta\bar{J}_j\delta\bar{J}_k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{A}\delta\bar{A}}G = 1. \tag{242}$$

Mivel Γ vezető rendje S, ezért mindig írható

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{A}\delta\bar{A}} = \mathcal{K} - \Sigma \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{K} - \Sigma)G = 1, \tag{243}$$

ahol $\mathcal{K}$ a szabad kernel, Σ pedig a kvantumos korrekció. Σ neve sajátenergia. A kétpontfüggvény 1PI felírása ezért (Schwinger-Dyson egyenlet)

$$G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma \quad \Rightarrow \quad G = G_0 + G\Sigma G_0 = G_0 + G_0\Sigma G \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}G = 1 + \Sigma G. \tag{244}$$

Vagyis kétpontfüggvény első kvantumos korrekciója

$$\langle A_i A_j \rangle_{qcorr} = iG_0 \, \langle A_i A_j \rangle_{amp} \, iG_0 = iG_0\Sigma G_0 \quad \Rightarrow \quad \langle A_i A_j \rangle_{amp} = -i\Sigma, \tag{245}$$

ahol $\langle A_i A_j \rangle_{amp}$ az "amputált" kétpontfüggvény (azaz hiányoznak róla a külső vonalak).

Valós idejű formalizmusban Σ egy mátrix lesz; a Keldysh formalizmusban $\mathcal{K}$ diagonális, ezért

$$\mathcal{K}G^{ij} = \delta^{ij} + \Sigma^{ik}G^{kj}. \tag{246}$$

R/A formalizmusban a kernel nem diagonális, hiszen

$$\mathcal{L}_2 = A_1^\dagger \mathcal{K} A_1 - A_2^\dagger \mathcal{K} A_2 = \left(A_r + \frac{A_a}{2}\right)^\dagger \mathcal{K} \left(A_r + \frac{A_a}{2}\right) - \left(A_r - \frac{A_a}{2}\right)^\dagger \mathcal{K} \left(A_r - \frac{A_a}{2}\right) = A_r^\dagger \mathcal{K} A_a + A_r^\dagger \mathcal{K} A_a. \tag{247}$$

Emiatt

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = \mathcal{K}\boldsymbol{P} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}\boldsymbol{G}_{R/A} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{G}. \tag{248}$$

Komponensekben, felhasználva, hogy $G^{aa} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}G^{ra} &= 1 + \Sigma^{ar}G^{ra} \\ \mathcal{K}G^{ar} &= 1 + \Sigma^{ra}G^{ar} \\ \mathcal{K}G^{rr} &= \Sigma^{ar}G^{rr} + \Sigma^{aa}G^{ar} \\ 0 &= \Sigma^{rr}G^{ra} \quad \Rightarrow \quad \Sigma^{rr} = 0. \end{aligned} \tag{249}$$

Vagyis az R/A formalizmiusban a retardált illetve avanzsált propagátorok sajátenergiás egyenlete diagonális.

A Keldysh és R/A sajátenergiák összefüggése

$$\mathcal{K}G^{ra} = \mathcal{K}(G^{11} - G^{12}) = 1 + \Sigma^{11}G^{11} + \Sigma^{12}G^{21} - \Sigma^{11}G^{12} - \Sigma^{12}G^{22} = 1 + (\Sigma^{11} + \Sigma^{12})G^{ra} \quad \Rightarrow \quad \Sigma^{ar} = \Sigma^{11} + \Sigma^{12}. \tag{250}$$

Hasonlóan

$$\Sigma^{ra} = \Sigma^{11} + \Sigma^{21}, \qquad \Sigma^{aa} = \frac{\Sigma^{12} + \Sigma^{21}}{2}, \qquad \Sigma^{rr} = 0 = \Sigma^{11} + \Sigma^{22} + \Sigma^{12} + \Sigma^{21}. \tag{251}$$

Ezen felül, valós időben felírva a G^{ra} egyenletét:

$$\mathcal{K}G^{ra}(t) = \delta(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \Sigma^{ar}(t - t')G^{ra}(t'). \tag{252}$$

Mivel azonban $G^{ra}(t) = \Theta(t)\varrho(t)$, emiatt a sajátenergiára

$$\Sigma^{ar}(t) = \Sigma_0\delta(t) + \Sigma_1(t)\Theta(t). \tag{253}$$

Fourier-térbe visszaírva ez azt jelenti, hogy

$$\Sigma^{ar}(k) = \Sigma_0 + \tilde{\Sigma}(k), \qquad \tilde{\Sigma}(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-\operatorname{Disc}\Sigma_{ar}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega + i\varepsilon}. \tag{254}$$

A retardált sajátenergia tehát vagy valós, vagy kauzális. A kauzális rész kifejezése a Keldysh sajátenergiákkal

$$\operatorname{Disc}\Sigma^{ar} = \Sigma^{ar} - \Sigma^{ra} = \Sigma^{12} - \Sigma^{21}. \tag{255}$$

A KMS reláció is megfogalmazható a sajátenergiákra. Mivel

$$\begin{aligned} iG^{rr} &= \left(\frac{1}{2} + n\right)(iG^{ra} - iG^{ar}) = \left(\frac{1}{2} + n\right)(iG_0^{ra} - iG_0^{ar} + iG_0^{ra}\Sigma^{ar}G^{ra} - iG_0^{ar}\Sigma^{ra}G^{ar}) = \\ &= iG_0^{rr} + \left(\frac{1}{2} + n\right)G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{ra} - \left(\frac{1}{2} + n\right)iG_0^{ar}\Sigma^{ra}G^{ar}. \end{aligned} \tag{256}$$

Ezt összehasonlítva G^{rr} sajátenergiás egyenletével

$$\begin{aligned} iG^{rr} &= iG_0^{rr} + iG_0^{rr}\Sigma^{ra}G^{ar} + G_0^{ra}i\Sigma^{aa}G^{ar} + G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{rr} = \\ &= iG_0^{rr} + \left(\frac{1}{2} + n\right)iG_0^{ra}\Sigma^{ra}G^{ar} - \left(\frac{1}{2} + n\right)iG_0^{ar}\Sigma^{ra}G^{ar} + G_0^{ra}i\Sigma^{aa}G^{ar} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + n\right)G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{ra} - \left(\frac{1}{2} + n\right)G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{ar} = \\ &= iG^{rr} + \left(\frac{1}{2} + n\right)iG_0^{ra}\Sigma^{ra}G^{ar} + G_0^{ra}i\Sigma^{aa}G^{ar} - \left(\frac{1}{2} + n\right)G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{ar}. \end{aligned} \tag{257}$$

Emiatt

$$i\Sigma^{aa} = \left(\frac{1}{2} + n\right)(i\Sigma^{ar} - i\Sigma^{ra}). \tag{258}$$

3.6.3 1PI diagrammok, vertexfüggvények

A hárompontfüggvényre kapjuk, a (242) egyenlet deriválásával:

$$\frac{\delta\Gamma_{ij}}{\delta\bar{A}_k}\frac{\delta A_k}{\delta J_{k'}}G_{jj'} + \Gamma_{ij'}\frac{\delta G_{j'j}}{\delta J_{k'}} = 0 \quad \Rightarrow \quad G_{ijk} = G_{ii'}G_{jj'}G_{kk'}\Gamma_{i'j'k'}, \tag{259}$$

vagyis az "amputált" hárompontfüggvényt kapjuk.

Következő rendben

$$\begin{aligned} G_{ijk\ell} &= G_{ii'}G_{jj'}G_{kk'\ell}\Gamma_{i'j'k'} + \cdots + G_{ii'}G_{jj'}G_{kk'}G_{\ell\ell'}\Gamma_{i'j'k'\ell'} = \\ &= G_{ii'}G_{jj'}\Gamma_{i'j'k'}G_{k'a}\Gamma_{abc}G_{bk}G_{c\ell} + \cdots + G_{ii'}G_{jj'}G_{kk'}G_{\ell\ell'}\Gamma_{i'j'k'\ell'}. \end{aligned} \tag{260}$$

Vagyis "fa gráfokból" rakjuk össze az összefüggő digrammokat, ahol a vertexek helyett most a felöltöztetett "proper" vertexeket kell betenni, ami nem más mint $\Gamma^n(k_1, \ldots k_n)$.

3.7 1PI diagramok Φ^4 elméletben

3.7.1 Tadpole diagram

Konkrétan számítsuk ki a Φ^4 elméletben egy hurok szinten felmerülő 1PI diagramokat véges hőmérsékleten. A kétpontfüggvény esetében egyetlen diagramunk marad, a lokális

$$\left\langle \Phi^{(1)}(x)\Phi^{(1)}(x)\right\rangle_{amp} \quad \Rightarrow \quad \frac{-i\lambda}{24}\langle \Phi\Phi\,\Phi'\Phi'\Phi'\Phi'\rangle = \frac{-i\lambda}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, iG^{(11)}(k) = -i\Sigma^{11}. \tag{261}$$

Ugyanemiatt $\Sigma^{12} = \Sigma^{21} = 0$. Ez azt is jelenti, hogy $\Sigma^{ar} = \Sigma^{ra} = \Sigma^{11} = -\Sigma^{22}$.

Mivel a fenti kifejezés valós időben az $x = 0$ helyen vett értéket jelenti, valamint

$$G^{ra}(x=0) = G^{ar}(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad G^{11}(x=0) = G^{rr}(x=0). \tag{262}$$

Ezt már kiszámoltuk (173) alatt:

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega}(1 + 2n_+(\omega)). \tag{263}$$

Jól láthatóan ez a tag divergens integrált ad. Hogy ki tudjuk számolni az értékét, valamilyen módon regularizálni kell az integrálokat. Fizikai regularizáció, ha az impulzust nem engedjük tetszőlegesen nagyra nőni, $|\mathbf{k}| < \Lambda$ impulzus levágást (cut-off) alkalmazunk, de feltesszük, hogy Λ nagyobb minden fizikai skálánál. Az integrál ekkor

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda}{4\pi^2}\left[\frac{1}{2}\int_0^\Lambda \frac{dk\,k^2}{\omega_k} + \int_0^\infty \frac{dk\,k^2}{\omega_k} n(\omega_k)\right] = \frac{\lambda}{16\pi^2}\left[\Lambda^2 + m^2\ln\frac{m}{2\Lambda}\right] + \frac{\lambda T^2}{4\pi^2}\int_{\beta m}^\infty dx\,\frac{\sqrt{x^2-(\beta m)^2}}{e^x-1}. \tag{264}$$

Láthatóan az első, divergens tag nem függ a hőmérséklettől, a második, hőmérsékletfüggő tag nem függ a levágástól. E második tagot (a $\lambda/2$ nélkül) nevezzük tadpole (ebihal) járuléknak:

$$\Sigma_0 = \Sigma_0^{div} + \frac{\lambda}{2}\mathcal{T} \qquad \mathcal{T} = \frac{T^2}{2\pi^2}\int_{\beta m}^\infty dx\,\frac{\sqrt{x^2-(\beta m)^2}}{e^x-1} = T^2\bar{\mathcal{T}}(\beta m). \tag{265}$$

Ha $\beta m \to 0$, azaz ha $T \gg m$, akkor $\bar{\mathcal{T}}(0) = 1/12$. Ha $\beta m \to \infty$, azaz nulla hőmérsékleten vagy nagyon nagy tömeg esetén $\bar{\mathcal{T}}(\infty) = 0$.

A divergens tag kiszámítására többféle módszert is használhatunk, ezeknek csak egyike az energia-impulzus levágás. Alternatív lehetőség a tér diszkretizálása (l. szilárd test), ez azonban relativisztikusan invariáns rendszerekben a relativisztikus invariancia megsértéséhez vezet. A szimmetriákat legjobban őrző regulrizálási módszer az, ha az integrálokat nem 4, hanem $4-2\varepsilon$ dimenzióban számoljuk ki (dimenziós regularizáció). Ekkor valahány integrál elvégzése után forgásinvariáns integrandusunk lesz, itt a következő formulák alkalmazhatók

$$\begin{aligned}
\int d^dp &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\int dp\,p^{d-1}\\
\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} &= \frac{2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)}\int dp\,p^{d-1}\\
\mu^{2\varepsilon}\int \frac{d^{d-2\varepsilon}p}{(2\pi)^{d-2\varepsilon}} &= \frac{2(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2-\varepsilon)}\int dp\,p^{d-1-2\varepsilon} = \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2-\varepsilon)}\int dz\,z^{d/2-\varepsilon-1},
\end{aligned} \tag{266}$$

ahol az utolsó tagban végeztünk egy $z = p^2$ helyettesítést. Az első integrál bizonyítása:

$$\begin{aligned}
\int d^dp e^{-p^2/2} &= \left(\int_{-\infty}^\infty dp e^{-p^2/2}\right)^d = (2\pi)^{d/2} = K^d\int_0^\infty dp\,p^{d-1}e^{-p^2/2} =\\
&= \left\{\begin{array}{l} x = p^2/2\\ p = (2x)^{1/2}\\ dx = pdp\end{array}\right\} = 2^{d/2-1}K_d\int_0^\infty dx x^{d/2-1}e^{-x} = 2^{d/2-1}K_d\Gamma(d/2).
\end{aligned} \tag{267}$$

Az utolsó kifejezésben megjelenik egy μ mennyiség: ennek oka az, hogy bár $4-2\varepsilon$ dimenzióban számolunk, az integrandus dimenzióját nem változtathatjuk, vagyis valaminek dimenziótlanítania kell a felesleges 2ε dimenziót. Ezért μ tömeg dimenziójú mennyiség, de amúgy tetszőlegesen választható. Ezen dimenziós skála megjelenése elkerülhetetlen következménye a divergenciák jelenlétének (levágás esetén maga a levágás jelenti a skálát).

Az egyik leggyakrabban előforduló integrál:

$$\int_0^\infty dz\, z^{a-1}(M^2+z)^{-b} = (M^2)^{a-b}\,\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(b)} \tag{268}$$

Ezen felül a gamma függvények tulajdonságai:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z) = \int_0^\infty dx\, x^{z-1}\, e^{-x}\\
&\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\\
&\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\\
&\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \varepsilon\left(\frac{\gamma_E^2}{2} + \frac{\pi^2}{12}\right)\\
&\Gamma(-1+\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 - \varepsilon\left(1 - \gamma_E + \frac{\gamma_E^2}{2} + \frac{\pi^2}{12}\right)
\end{aligned} \tag{269}$$

Végül a végén $\varepsilon \to 0$ esetén alkalmazható kifejtés

$$X^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln X} = 1 + \varepsilon \ln X + \frac{\varepsilon^2}{2}(\ln X)^2. \tag{270}$$

A tadpole diagramban a (263) egyenletből kiindulva írhatjuk

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu^{2\varepsilon}}{2}\int \frac{d^{3-2\varepsilon}p}{(2\pi)^{3-2\varepsilon}}\ \left(p^2+m^2\right)^{-1/2} = \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{2(4\pi)^{3/2}\Gamma(3/2-\varepsilon)}\int_0^\infty dz\, z^{1/2-\varepsilon}\,(z+m^2)^{-1/2} =\\
&= \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{2(4\pi)^{3/2}\Gamma(3/2-\varepsilon)}(m^2)^{1-\varepsilon}\frac{\Gamma(-1+\varepsilon)\Gamma(3/2-\varepsilon)}{\Gamma(1/2)} = \frac{m^2}{16\pi^2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon}\Gamma(-1+\varepsilon) =\\
&= \frac{m^2}{16\pi^2}\left(1-\varepsilon\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma_E-1\right) = \frac{m^2}{16\pi^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma_E-1+\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right).
\end{aligned} \tag{271}$$

Emiatt

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma_E-1+\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \frac{\lambda}{2}\mathcal{T}. \tag{272}$$

A divergencia helyett egy pólust kaptunk ε-ban, a Λ-független tagok paraméteresen ugyanazok, de más konstanst kaptunk mellettük. Ez általában igaz a különböző regularizációk esetén: a divergenciák mellett megjelenő konstansok különbözőek lesznek.

A véges hőmérsékletű tagban alacsony és magas hőmérsékletű kifejtést végezhetünk el. Alacsony hőmérséklet esetén $\beta \to \infty$, ekkor a (265) kifejezésben exponenciálisan elnyomott tagok erejéig

$$\mathcal{T} = \frac{T^2}{2\pi^2}\int_{\beta m}^\infty dx\sqrt{x^2-(\beta m)^2}e^{-x} = \frac{mT}{2\pi^2}K_1(\beta m) \to \frac{1}{m}\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta m}. \tag{273}$$

Magas hőmérsékleten $\beta \to 0$, a βm szerinti kifejtés azonban nem egyszerű

$$\mathcal{T} = \frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} - \frac{\gamma_E m^2}{8\pi^2} - \frac{m^2}{16\pi^2}\left(\ln\frac{m^2}{(4\pi T)^2} - 1\right). \tag{274}$$

Bevezetve $\ln c_b = 1 - 2\gamma_E + 2\ln 4\pi$ mennyiséget

$$\mathcal{T} = \frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} + \frac{m^2}{16\pi^2}\ln\frac{c_b T^2}{m^2}. \tag{275}$$

Bizonyításhoz a vezető tag könnyen kiértékelhető

$$\mathcal{T}(\beta \to 0) = \frac{T^2}{2\pi^2}\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{T^2}{12}. \tag{276}$$

Az első tag onnan jön, hogy kis ω-ra $n(\omega) \approx T/\omega$, azaz (bevezetve $(\beta m y)^2 = x^2 - (\beta m)^2$)

$$\frac{T^2}{2\pi^2}\int_0^{\beta\Lambda} dy \frac{y^2}{y^2+1} = \frac{T^2}{2\pi^2}\left[\beta\Lambda - \frac{\pi}{2}\beta m\right] = \frac{\Lambda T}{2\pi^2} - \frac{mT}{4\pi}. \tag{277}$$

A divergens faktor kiesik a sorfejtés továbi tagjainak figyelembe vételénél. Érdekesség: ez a tag olyan, mintha 3D terünk lenne...

A magas hőmérsékletű kifejtést beírva a dimenzós regularizáció egyenleteibe:

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda}{2}\left[-\frac{1}{\varepsilon}\frac{m^2}{16\pi^2} + \frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} - \frac{m^2}{16\pi^2}\left(\ln\frac{4\pi T^2}{\mu^2} - \gamma_E\right)\right]. \tag{278}$$

3.7.2 Bubble (buborék) diagram

Most vizsgáljuk a 4-pont függvényeket. Vezető rendben kapjuk

$$\langle\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)\rangle_{amp} = \frac{-i\lambda}{24}\left\langle\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)\Phi^4\right\rangle_{amp} \quad \Rightarrow \quad -i\lambda(2\pi)^4\delta(k_1 + \ldots k_4). \tag{279}$$

A következő rendben:

$$\langle\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)\rangle_{amp} = \frac{1}{2}\left(\frac{-i\lambda}{24}\right)^2\left\langle\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)\Phi^4\Phi'^4\right\rangle_{amp}. \tag{280}$$

Fourier térben, a külső impulzusokat $k_1, \ldots k_4$-gyel jelölve

$$-\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[iG(k_1+k_2-p)iG(p) + iG(k_1+k_3-p)iG(p) + iG(k_1+k_4-p)iG(p)\right]. \tag{281}$$

Láthatóan érdemes bevezetni

$$i\mathcal{I}(k) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}iG(q)iG(p)\,(2\pi)^2\delta(k-p-q). \tag{282}$$

Valójában $i\mathcal{I}(k)$ a Φ^2 korrelációs függvényével áll kapcsolatban, vagyis az általános korrelációs függvényekre igaz megállapításokat használhatjuk rá. Emiatt bármely kétpontfüggvény (egyensúlyban) kifejezhető a megfelelő spektrális függvénnyel, ami a $\left\langle[\Phi^2(x), \Phi^2(0)]\right\rangle$, kifejezve $iG^{21}_{\Phi^2\phi^2} - iG^{12}_{\Phi^2\Phi^2}$. Amit tehát ki kell számítanunk:

$$\mathrm{Disc}\, i\mathcal{I}(k) = \int_{p,q}\left(iG^{21}(q)iG^{21}(p) - iG^{12}(q)iG^{12}(p)\right)\delta_k(p+q) = \int_{q,p}\varrho(q)\varrho(p)\left[(1+n_{p_0})(1+n_{q_0}) - n_{p_0}n_{q_0}\right]\delta_k(p+q), \tag{283}$$

ahol

$$\int_{p,q} = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \qquad \delta_k(p+q) = (2\pi)^4\delta(k-p-q). \tag{284}$$

Szabad esetben felírva a spektrál függvény alakját:

$$\operatorname{Disc} i\mathcal{I}(k) = \int\limits_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \frac{1}{4\omega_p\omega_q}\Big[[(2\pi)\delta(k_0-\omega_p-\omega_q)-(2\pi)\delta(k_0-\omega_p-\omega_q)]\,[(1+n_p)(1+n_q)-n_pn_q]+$$
$$[(2\pi)\delta(k_0-\omega_p+\omega_q)-(2\pi)\delta(k_0+\omega_p-\omega_q)]\,[(1+n_p)n_q-n_p(1+n_q)]\Big](2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{285}$$

Láthatóan $k_0 \to -k_0$-ra a kifejezés jelet vált, ezért ezek után elegendő $k_0 > 0$ esettel foglalkozni.

Értelmezés: az első tagok azt írják le, hogy egy k_0 energiájú részecske elbomlik két, tömeghéjon levő részecskére, vagy azokból előáll. A statisztikus faktor a bomlásnál $1+n$, a keletkezésnél n (bozonok). Nulla hőmérsékleten nincs jelen részecske, ezért kizárólag a bomlás jöhet szóba. Ez a járulék csak akkor van, ha van elég energia a bomláshoz; mivel $\omega_p = \sqrt{p^2+m^2} > m$, ezért $k_0 > 2m$ legalább kell ehhez (pontosabban l. később). A második tagok egy, a hőfürdőből érkező részecske szórását írják le (Landau csillapodás). Ez a tag nincsen nulla hőmérsékleten.

Ennek kapcsán elgondolkodhatunk arról, hogyan is nézhet ki általánosan egy kétpont korrelációs függvény diszkontinuitása. Mindenképpen úgy kapható, hogy $G^{21} - G^{12}$, ami azt jelenti, hogy az első esetben a bal oldali vertex 1, a jobb oldali 2. A bal oldali vertexhez kapcsolódik egy olyan domain, amely kizárólag 1-es vertexeket tartalmaz, a jobb oldalihoz egy olyan, amely kizárólag 2-es vertexeket tartalmaz. A két domain-en belül minden propagátor G^{11} illetve G^{22}, ezek tömeghéjon kívüli propagálást is megengednek. Ha ezen második domainben minden 1-est 2-esre cserélnénk, akkor a járulék komplex konjugáltját kapnánk.

A két domain közötti propagátorok G^{12}, ezek azonban tartalmaznak egy tömeghéj Dirac-deltát, vagyis valódi (nem virtuális) részecskéket írnak le. A teljes járulék tehát, ha ℓ közbülső vonalunk van, szimbolikusan

$$\int UV^*(iG_1^{21}\dots iG_\ell^{21} - iG_1^{12}\dots iG_\ell^{12}) = \int UV^*\varrho_1\dots\varrho_\ell((1+n_1)\dots(1+n_\ell)-n_1\dots n_\ell). \tag{286}$$

Mivel fel kell írnunk az összes lehetséges U-ra és V-re, végeredményben az összes $1 \to \ell$ átmenetet leíró diagramot figyelembe vesszük, ezt jelöljük $\mathcal{M}_{1,\ell}$-lel. Ezzel a teljes járulék

$$\operatorname{Disc} iG^{ra} = \sum_\ell \int |\mathcal{M}_{1,\ell}|^2\varrho_1\dots\varrho_\ell((1+n_1)\dots(1+n_\ell)-n_1\dots n_\ell). \tag{287}$$

Ez a képlet vágási szabály néven ismert, mert az összefüggő gráfot ketté kell vágni propagátorok elvágásával, és az elvágott vonalakra kell beírni a fenti képlet szerinti járulékokat. Ha nulla hőmérsékleten vagyunk, akkor marad:

$$\operatorname{Disc} iG^{ra}|_{T=0} = \sum_\ell \int_{spatial} |\mathcal{M}_{1,\ell}|^2(2\pi)\delta(k_0-\omega_1-\dots-\omega_\ell) \tag{288}$$

(Cutkosky szabály).

A vágási szabályokat $T = 0$-n könnyen meg lehet érteni a kvantummechanika nyelvén. Legyen S_{pq} a végtelen idejű $|p\rangle \to |q\rangle$ szórás amlitúdója (S-mátrix). Az összes állapot teljes rendszert alkot, ezért

$$\sum_k S^\dagger_{pk}S_{kq} = \delta_{pq}, \tag{289}$$

az S-mátrix unitér. Felírva

$$S = 1 + iM \quad\Rightarrow\quad (1-iM^\dagger)(1+iM) = 1 \quad\Rightarrow\quad 2\operatorname{Im} M = M^\dagger M. \tag{290}$$

Mivel $M^\dagger M$ az átmeneti valószínűségekkel van kapcsolatban, melyet hol szórási amlitúdóként, hol bomlási valószínűségként értelmezhetünk, a fenti egyenlet összekapcsolja a teljes bomlási valószínűséget illetve teljes szórási hatáskeresztmetszetet a megfelelő spektrál függvénnyel (optikai tétel).

Nulla hőmérsékleten a bejövő energiának kell fedeznie a közbülső részecskék energiáját, ami azt jeneti, hogy csak $k_0 > \sum_{i=1}^\ell m_i$ energiákon kezd életbe lépni az ℓ-részecskés járulék. A nulla hőmérsékletű spektrál függvény tehát a legkisebb tömegű közbülső állapot tömegeinek összege alatt nulla, vagyis szélsőséges esetben

(ha tömegtelen közbülső állapotok is lehetnek) a fénykúp alatt lesz nulla. Ez másrészt szoros kapcsolatban van a kauzalitással, hiszen egyszerre mérhető (azaz kommutál) minden olyan operátor, amelyek térszerűen vannak elválasztasztva egymástól. Az újabb és újabb közbülső állapotok a megfelelő tömegű küszöbök felett kezdenek járulékot adni.

Véges hőmérsékleten a hőfürdőből érkező részecskéken való szórás miatt bonyolultabb a helyzet. Ekkor a spektrál függvény nem csak a részecske keltést tartalmazza, hanem a szórásokat is, amelyeknek nincsen küszöbük. Emiatt véges hőmérsékleten (végtelen térfogatban) *minden* energián van értéke a spektrálfüggvénynek! Ez azt is jelenti, hogy minden korrelációs függvény imaginárius része nem nulla tetszőleges energián, azaz nem léteznek stabil részecskék (aszimptotikus állapotok).

Emellett véges hőmérsékleten a feljebb említett homogén 1-es vertex domainekben megjelenhetnek 2-es vertex szigetek (és viszont). Nulla hőmérsékleten az ilyen szigetek megjelenését az energiamegmaradás megtiltja, de véges hőmérsékleten mint spektátor (megfigyelő) folyamatok, melyek függetlenek a fő szórástól, jelen vannak. A vágási szabályok emiatt nulla hőmérsékleten nemcsak a diagram kettévágásából állnak, hanem tetszőlege, egymást nem metsző vagy érintő vonlakkal történő darabolást jelenti.

Visszatérve (285) kiszámításához $k_0 > 0$ esetben: az első két Dirac-deltából csak az egyik marad, a második sor két járuléka ugyanaz, vagyis kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathrm{Disc}\, i\mathcal{I}(k) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{2\pi}{4\omega_p\omega_q}\Big[\delta(k_0-\omega_p-\omega_q)(1+n_p+n_q)+2\delta(k_0-\omega_p+\omega_q)(n_q-n_p)\Big] = \\ &= \frac{1}{8\pi}\int_{-1}^{1}dx\int_0^\infty dp\frac{p^2}{\omega_p\omega_q}\Big[\delta(k_0-\omega_p-\omega_q)(1+n_p+n_q)+2\delta(k_0-\omega_p+\omega_q)(n_q-n_p)\Big]. \qquad (291)\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{p}$. Új változó

$$x\to q,\qquad q^2=k^2+p^2+2kpx \quad\Rightarrow\quad pdx=\frac{q}{k}dq,\qquad |k-p|<q<k+p, \qquad (292)$$

vagyis k,p,q háromszöget alkothat. Emiatt

$$\begin{aligned}\mathrm{Disc}\, i\mathcal{I}(k) &= \frac{1}{8\pi k}\int_0^\infty dqdp\,\Theta_\Delta(k,p,q)\frac{pq}{\omega_p\omega_q}\Big[\delta(k_0-\omega_p-\omega_q)(1+n_p+n_q)+2\delta(k_0-\omega_p+\omega_q)(n_q-n_p)\Big] = \\ &= \frac{1}{8\pi k}\int_0^\infty dp\frac{p}{\omega_p}\int_{\omega_-}^{\omega_+}d\omega_q\Big[\delta(k_0-\omega_p-\omega_q)(1+n_p+n_q)+2\delta(k_0-\omega_p+\omega_q)(n_q-n_p)\Big] = \\ &= \frac{1}{8\pi k}\int_m^\infty d\omega\Big[\Theta(\omega_+>k_0-\omega>\omega_-)(1+n(\omega)+n(k_0-\omega))+ \\ &\qquad +2\Theta(\omega_+>\omega-k_0>\omega_-)(n(\omega-k_0)-n(\omega))\Big] \qquad (293)\end{aligned}$$

ahol $\omega_\pm^2=(k\pm p)^2+m^2$. Mindkét theta-függvény ugyanazt adja

$$\begin{aligned}&\omega_+>|k_0-\omega|>\omega_- \\ &|K^2-2k_0\omega|<2kp \\ &4K^2\omega^2-4K^2k_0\omega+K^4-4k^2m^2<0. \qquad (294)\end{aligned}$$

A nullpontok helye

$$\Omega^\pm=\frac{1}{2}\left(k_0\pm k\sqrt{1-\frac{4m^2}{K^2}}\right). \qquad (295)$$

Ez akkor valós, ha $K^2>4m^2$ vagy $K^2<0$. Az egyenlőtlenség megoldása tehát:

$$\begin{aligned}K^2>4m^2 \quad&\Rightarrow\quad \Omega_+>\omega>\Omega_- \\ K^2<0 \quad&\Rightarrow\quad \Omega_+<\omega \quad\text{vagy}\quad \omega<\Omega_-. \qquad (296)\end{aligned}$$

Miután $\Omega_- < 0$ ha $K^2 < 0$, ezért ez nem ad járulékot az $[m, \infty]$ tartományban. A többi esetben belátható, hogy $K^2 > 4m^2$ esetén $\Omega_- > m$ illetve $K^2 < 0$ esetben $\Omega_+ > m$. Figyelembe véve még azt is, hogy $k_0 - \Omega_+ = \Omega_-$ kapjuk

$$\mathrm{Disc}\, i\mathcal{I}(k) = \frac{1}{8\pi}\Theta(K^2 > 4m^2)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}} + \frac{1}{4\pi k}\left(\Theta(K^2 > 4m^2) + \Theta(K^2 < 0)\right)\int\limits_{|\Omega_-|}^{\Omega_+} d\omega n(\omega). \tag{297}$$

Értelmezés: nulla hőmérsékleten csak az első tag marad, ez megfelel egy küszöbnek (két részecske keltés), és az a fölötti két részecske állapotnak. Véges hőmérsékleten módosul a nulla hőmérsékletű tag együtthatója, valamint megjelenik egy új tag $k_0^2 < \mathbf{k}^2$, vagyis a fénykúp alatt (Landau csillapítás).

Mivel

$$\int d\omega n(\omega) = T\ln(1 - e^{-\beta\omega}) \tag{298}$$

ezért

$$\mathrm{Disc}\, i\mathcal{I}(k) = \frac{1}{8\pi}\Theta(K^2 > 4m^2)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}} + \frac{T}{4\pi k}\left(\Theta(K^2 > 4m^2) + \Theta(K^2 < 0)\right)\ln\frac{1 - e^{-\beta\Omega_+}}{1 - e^{-\beta|\Omega_-|}}. \tag{299}$$

Néhány határeset

- Kis k_0-ra a Landau csillapítás alakja

$$\mathrm{Disc}\, i\mathcal{I}(k_0 \ll k) = \frac{k_0}{4\pi k} n\left(\frac{k}{2}\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}}\right). \tag{300}$$

- Kis k-ra a nulla hőmérsékletű tag korrekciója:

$$\frac{1}{4\pi}\Theta(K^2 > 4m^2)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}}\, n\left(\frac{k_0}{2}\right). \tag{301}$$

- Magas hőmérsékleten ($\beta \to 0$) a második tag

$$\frac{T}{4\pi k}\left(\Theta(K^2 > 4m^2) + \Theta(K^2 < 0)\right)\ln\left|\frac{k_0 + k\gamma}{k_0 - k\gamma}\right|, \qquad \gamma = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}}. \tag{302}$$

  A valós rész arányos az imaginárius résszel, azaz magas hőmérsékleten T-vel. Mivel a végeredmény dimenziótlan, valaminek dimenziótlanítania kell a hőmérsékletet, ez lehet k_0, k vagy m. Nulla tömegű esetben azonban a tömeg nem szerepel, vagyis kis impulzusú tartományban szükségszerűen $1/\{k, k_0\}$ jellegű függést kapunk.

A nulla hőmérsékletű tagból számolva a valós részt divergenciát kapunk, hiszen nagy frekvenciákra

$$\mathrm{Disc}\, i\mathcal{I}(\omega \to \infty) \sim \frac{1}{8\pi} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_{div} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{\mathrm{Disc}\, i\mathcal{I}(\omega, \mathbf{k})\big|_{\omega\to\infty}}{k_0 - \omega + i\varepsilon} = -\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\mu}^{\Lambda}\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{16\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{\mu}. \tag{303}$$

Hogy a nulla hőmérsékletű rész valós részét megkapjuk, levonhatjuk ezt a tagot, és a véges részt numerikusan számolhatjuk. Azonban megkaphatjuk úgy is, hogy közvetlenül a nulla hőmérsékletű integrált számoljuk. Ekkor nyugodtan vehetjük az 11 propagátort, hiszen (98) alapján $G^{11} = G^{ra} + G^{12}$, azonban $T = 0$-n $G^{12}(p_0 > 0) = 0$. Vagyis

$$i\mathcal{I}(K, m) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, iG^{11}(p)\, iG^{11}(k - p) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p^2 - m_p^2 + i\varepsilon)((k - p)^2 - m_q^2 + i\varepsilon)} \tag{304}$$

A szokásos eljárás az, hogy az időbeli integrálást, amely $[-\infty,\infty]$ határok között megy, elforgatjuk a komplex tengelyre (Wick forgatás), valamint k_0-nak is imaginárius értékeket veszünk. Ekkor

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_0\, f(k_0) = \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} dk_0\, f(k_0) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_0^E\, f(ik_0^E). \tag{305}$$

$4-2\varepsilon$ dimenzióban felírva az integrált

$$\mathcal{I}^\varepsilon(K,m) = -\mu^{2\varepsilon}\int \frac{d^{4-2\varepsilon}p}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}}\,\frac{1}{(p^2+m^2)((k-p)^2+m^2)}, \qquad p^2 = p_0^2+\mathbf{p}^2. \tag{306}$$

A nevezők szorzatát átírjuk közös nevezőre az alábbi azonosság segítségével (Feynman paramterizáció):

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta\dots E^\varepsilon} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\dots+\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\dots\Gamma(\varepsilon)}\int\limits_0^1 dx\,dy\dots dz\;\frac{\delta(1-x-y-\dots-z)x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\dots x^{\varepsilon-1}}{(Ax+By+\dots+E\varepsilon)^{\alpha+\beta+\dots+\varepsilon}} \tag{307}$$

Az integrálási változót eltolva $p\to p+kx$ szerint, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^\varepsilon(K,m) &= -\int\limits_0^1 dx\,\mu^{2\varepsilon}\int\frac{d^{4-2\varepsilon}p}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}}\,\frac{1}{(p^2+K^2x(1-x)+m^2}=\\ &= -\int\limits_0^1 dx\,\frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{16\pi^2\Gamma(2-\varepsilon)}\int dz\,z^{1-\varepsilon}\left(z+K^2x(1-x)+m^2\right)^{-2} = \frac{-\Gamma(\varepsilon)}{16\pi^2}\int\limits_0^1 dx\,\left(\frac{K^2x(1-x)+m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon}.\end{aligned} \tag{308}$$

Innen ε szerint kifejtve kapjuk

$$\mathcal{I}^\varepsilon(K,m) = \frac{1}{16\pi^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma_E+\int\limits_0^1 dx\,\ln\left(\frac{-K^2x(1-x)+m^2}{4\pi\mu^2}\right)\right], \tag{309}$$

ahol most már elvégeztük az inverz Wick forgatást. Láthatóan a divergencia itt is a $\ln\Lambda\sim 1/\varepsilon$ megfeleltetés alapján kapható.

Ha $m=0$ vagy $K^2=0$, akkor mindkét esetben $\mathcal{I}^\varepsilon(K,m)\sim\ln m^2,\ln K^2$, vagyis a $K^2,m^2\to 0$ esetben logaritmikus divergenciát kapunk. A véges hőmérsékletű részből még divergensebb $\sim T/k$ faktort kapunk a valós részben.

Az x szerinti integrálás elvégezhető analitikusan. Nézzük meg az integrál diszkontinuitását. Ehhez $x=re^{i\varphi}$ rerezentációban

$$\begin{aligned}&x>0: \qquad x\pm i\varepsilon\to re^{\pm i\varepsilon} \quad\Rightarrow\quad \ln(x+i\varepsilon)-\ln(x-i\varepsilon)=2i\varepsilon\to 0\\ &x<0: \qquad x+i\varepsilon\to re^{i(\pi-\varepsilon)},\ x-i\varepsilon\to re^{-i(\pi-\varepsilon)}, \quad\Rightarrow\quad \ln(x+i\varepsilon)-\ln(x-i\varepsilon)=2i(\pi-\varepsilon)\to 2i\pi.\end{aligned} \tag{310}$$

Emiatt

$$\operatorname*{Disc}_{k_0}\ln x = \Theta(-x)2i\pi \quad\Rightarrow\quad \operatorname*{Disc}_{k_0} i\ln(\omega^2-k_0^2) = 2\pi\,\mathrm{sgn}\,k_0\,\Theta(k_0^2-\omega^2). \tag{311}$$

Vagyis az integrál formája

$$\begin{aligned}\operatorname*{Disc}_{k_0} i\mathcal{I}^\varepsilon(k) &= \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_0^1 dx\,\operatorname*{Disc}_{k_0} i\ln\left(\frac{-K^2x(1-x)+m^2}{4\pi\mu^2}\right) = \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{sgn}\,k_0\int\limits_0^1 dx\,\Theta(x(1-x)K^2-m^2)=\\ &= \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{sgn}\,k_0\int\limits_{x_-}^{x_+} dx = \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{sgn}\,k_0\Theta(K^2>4m^2)\sqrt{1-\frac{4m^2}{K^2}},\end{aligned} \tag{312}$$

ami ugyanaz, mint (297) pozitív k_0-kra.

3.8 Divergenciák a perturbációszámításban

A fentiek alapján felírhatjuk a Φ^4 modell effektív hatását egy hurok rendben:

$$\begin{aligned}\Gamma[\Phi] &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\Phi^*(k)(k^2-m^2-\Sigma_0)\Phi(k) - \\ &-\frac{1}{24}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}(2\pi)^2\delta(k_1+\cdots+k_4)\Phi(k_1)\ldots\phi(k_4)\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{2}(\mathcal{I}(k_1+k_2)+\mathcal{I}(k_1+k_3)+\mathcal{I}(k_1+k_4))\right].\end{aligned} \tag{313}$$

Az effektív hatásból véges kifejezések vezetnek a fizikai megfigyelhető mennyiségekig, vagyis a fenti kifejezésnek minden (reguláris) konfigurációra végesnek kell lennie. Azonban a klasszikus kifejezésen túli radiatív korrekciók nagyon sok szempontból rosszul viselkednek. Alapvetően kétféle problémát kell kezelnünk:

- ultraibolya (UV) divergenciák: a radiatív korrekciókban szereplő integrálok divergensek, vagyis szigorúan véve nem értelmesek a kontinuum limeszben. Ha egy véges rendszert nézünk, pl. egy kristályrácsot, akkor ugyan végesek a radiatív korrekciók, azonban nagy értékeket vehetnek fel. Emiatt a perturbációszámítás érvényessége kérdőjeleződik meg (hiszen a korrekció nagyobb lehet mint a formálisan vezető rend).
- infravörös(IR) divergenciák, illetve IR érzékenység: bizonyos fizikai paraméterek változtatásával is felléphet olyan helyzet, amikor a perturbatív korrekciók nagyok lehetnek. Ezek mindig olyan helyzetet jeleznek, amikor az akár gyengén kölcsönható rendszer egyre több és több módussal kerül kapcsolatba, így a gyenge kölcsönhatások is felerősödhetnek. Néhány prototípus ezek közül:
  - tömeghéjon propagáló részecske propagátora is IR divergens: ezt a sajátenergiás járulékokat felösszegző 1PI formalizmus oldja meg. Fizikailag a tömeghéjon propagáló részecske sokáig él, azaz sok kölcsönhatásra van módja.
  - ha a hőmérséklet nagy, akkor az egy hurok relatív tömeg korrekció $\sim \lambda T^2/m^2$, az egy hurok relatív csatolási állandó korrekció $\sim \lambda T/m$. Ha tehát $T \gg m/\sqrt{\lambda}$, illetve $T \gg m/\lambda$, akkor az egy hurok korrekciók nagyobbak a vezető rendnél. Fizikailag a nagy hőmérséklet sok nagy energiás módust jelent a hőfürdőben, vagyis sok potenciálisan kölcsönható módust.
  - ha nulla tömegű elméletünk van $T = 0$-n, akkor az impulzus nullához tartásával $\sim \ln k$ jellegű divergenciákat kapunk. Ugyanígy ha az impulzus nulla, a tömeg nullához tartásával jelennek meg $\sim \ln m$ jellegű divergenciák. Véges hőmérsékleten még erősebb, $\sim T/k$ jellegű divergenciák léphetnek fel. Fizikailag a nulla tömegű kis impulzusú részecskék nagyon kis energiabefektetéssel kelthetők, így nagyon sok módus van jelen a hőfürdőben.
  - ha nulla tömeggel kölcsönhatásban levő véges tömegű részecskét tekintünk, akkor a tömeghéjon a sajátenergiában is várunk logaritmikus vagy erősebb divergenciát. Ennek oka, hogy a tömeghéjon propagáló részecske sokáig él, vagyis sok nulla tömegű gerjesztéssel léphet kapcsolatba.
  - a Bose-eloszlás kis energián $n(\omega) \sim T/\omega$, azaz divergens. Oka a nulla tömegő bozonok kollektív viselkedése.
  - két részecske közel azonos impulzussal propagálva divergenciához vezethet: ennek oka, hogy sokáig propagálnak egymás mellett, ami sok kölcsönhatásra ad lehetőséget.

4 Lineáris válasz elmélet

Most tárgyaljuk röviden a nemegyensúlyi rendszerek hosszú idejű viselkedését. Ehhez azt a gndolatmenetet fogjuk követni, amit egy valódi kísérletben is tennénk: reggel ($t_0 \to -\infty$) bemegyünk az (egyensúlyi) laborba, és ott előkészítjük a kísérletet. $t = 0$-nál kezdjük a kísérletet, melynek végeztével a labor újra egyensúlyba kerül. Ezt a folyamatot matematikailag úgy írhatjuk le, hogy a rendszer kezdeti időfejlődését, amit mondjuk H Hamilton-operátor jellemez, időfüggő módon megváltoztatjuk $H + H_{ext}$. A módosítást lehet többféle operátor segítségével megtenni, mi most válasszunk egyet, legyen ez F, ennek erősségét szabályozzuk időfüggő módon $\zeta(t)$ szerint. Azaz

$$H \to H + \zeta(t)F, \qquad S = \int d^4x \left[\mathcal{L} - \zeta(x)F\right] \tag{314}$$

Ekkor egy adott lokális $\hat{O}(x)$ operátor várható értéke (224) szerint

$$\langle \hat{O}(x) \rangle = \int \mathcal{D}A\, O_1(x) e^{iS[A_1] - iS[A_2] - i\int d^4x' \zeta(x')(F_1(x') - F_2(x'))}. \tag{315}$$

Innen a perturbációszámítás szabályai szerint dolgozhtajuk ki a gyenge zavar esetére a fenti kifejezés értékét. Feltéve ugyanis, hogy ζ "kicsi", azaz gyenge a hatása, akkor sorba fejthetjük az exponenst:

$$\langle \hat{O}(x) \rangle = \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \int \mathcal{D}A\, O_1(x) e^{iS[A_1] - iS[A_2]} \left(\int d^4x' \zeta(x')(F_1(x') - F_2(x')) \right)^n. \tag{316}$$

Ennek vezető tagja a várható érték egyensúlyban, az első nemtriviális tag a *lineáris válasz*:

$$\langle \hat{O}(x) \rangle - \langle \hat{O}(x) \rangle_{eq} = -i \int d^4x' \left\langle O_1(x)(F_1(x') - F_2(x')) \right\rangle_{eq} \zeta(x'), \tag{317}$$

Ahol az eq indexes mennyiségeket már egyensúlyban kell meghatározni. Operátorosan felírva

$$\left\langle \hat{O}_1(x)(F_1(x') - F_2(x')) \right\rangle = \left\langle \mathrm{T}\hat{O}(x)F(x') - \alpha F(x')\hat{O}(x) \right\rangle = \Theta(t) \left\langle [\hat{O}(x), F(x')] \right\rangle. \tag{318}$$

Emiatt

$$\langle \hat{O}(x) \rangle - \langle \hat{O}(x) \rangle_{eq} = -i \int d^4x' \Theta(t - t') \left\langle [\hat{O}(x), F(x')] \right\rangle_{eq} \zeta(x'), \tag{319}$$

Green-függvényekkel kifejezve:

$$\langle O_1(x)(F_1(x') - F_2(x')) \rangle = iG^{11}_{OF}(x - x') - iG^{12}_{OF}(x - x') = iG^{ra}_{OF}(x - x'). \tag{320}$$

Fourier-térben ekkor igaz a következő egyenlet:

$$\langle \hat{O}(p) \rangle - \langle \hat{O}(p) \rangle_{eq} = G^{ra}_{OF}(p)\zeta(p). \tag{321}$$

Második rendben, kicsit bonyolultabb, de triviális számolás után kapjuk

$$\frac{(-i)^2}{2} \int d^4y_1 d^4y_2 \Theta(t - t_1)\Theta(t - t_2) \Big(\Theta(t_1 - t_2) \langle [[O(x), F(y_1)], F(y_2)] \rangle + \\ + \Theta(t_2 - t_1) \langle [[O(x), F(y_2)], F(y_1)] \rangle \Big) \zeta(y_1)\zeta(y_2). \tag{322}$$

Mivel y_1 és y_2 integrálási változók felcserélhetők, ezért ez a tag úgy írható, mint

$$(-i)^2 \int d^4y_1 d^4y_2 \Theta(t > t_1 > t_2) \langle [[O(x), F(y_1)], F(y_2)] \rangle \zeta(y_1)\zeta(y_2). \tag{323}$$

4.1 Külső erőtér

A lineáris válasz elmélet egyik érdekes alkalmazása, mikor lokális külső erőtereket alkalmazunk a rendszer befolyásolására. Az erőteret $\mathbf{f}$ erősűrűséggel jellemezve klasszikusan a teljesítmény $P = \mathbf{fv}$, ahol $\mathbf{v}$ a sebességeloszlás. Hogy ezt pontosítsuk, meg kell mondanunk, hogy pontosan mire is hat az erőtér, azaz a kölcsönhatást kell jellemezni. Emiatt $\mathbf{f}$-et valamilyen térerősségből származtatjuk; elektrodinamikai analógiával $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$, ahol $\mathbf{E}$ a külsőleg adott térerősség. A töltést áthárítva a sebességre $q\mathbf{v}$-t (megmaradó) $\mathbf{j}$ áramként pontosítjuk. Emiatt tehát

$$P = \partial_t \delta H = -\int d^3\mathbf{x}\mathbf{E}\mathbf{j} = -\int d^3\mathbf{x} E_i j_i \tag{324}$$

Amikor ezt a kvantumos elméletbe akarjuk beilleszteni, akkor $\mathbf{j}$ operátor lesz, de $\mathbf{E}$ külső erőtér egy adott c-szám függvény marad. A fenti kifejezésből

$$\delta H(t) = -\int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3\mathbf{x}\, E_i(t', \mathbf{x}) j_i(t', \mathbf{x}). \tag{325}$$

A negatív előjel onnan jön, hogy a rendszer energiája csökken, ha az áram a külső erőtér irányába áll be (l. mágneses dipól $-\mathbf{mB}$ energiája).

Ha ezt a kifejezést beírjuk a lineáris válasz (319) képletébe, akkor azt kapjuk, hogy

$$\langle \hat{O}(x)\rangle - \langle \hat{O}(x)\rangle_{eq} = i\int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \left\langle [\hat{O}(x), j_i(t'', \mathbf{x}')]\right\rangle_{eq} E_i(t'', \mathbf{x}'). \tag{326}$$

Jelöljük $\left\langle [\hat{O}(x), j_i(t'', \mathbf{x}')]\right\rangle_{eq} = \varrho_{OJ_i}(t - t'', \mathbf{x} - \mathbf{x}')$, ekkor Fourier transzformáció után

$$\begin{aligned}\Delta\langle \hat{O}(k)\rangle &= i\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''\, e^{ik_0 t} \varrho_{OJ_i}(t - t'', \mathbf{k}) E_i(t'', \mathbf{k}) = \\ &= i\int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi}\, \varrho_{OJ_i}(\omega_1, \mathbf{k}) E_i(\omega_2, \mathbf{k}) \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''\, e^{ik_0 t - i\omega_1(t - t'') - i\omega_2 t''}.\end{aligned} \tag{327}$$

Az időintegrálok elvégezhetők, amit kapunk

$$\Delta\langle \hat{O}(k)\rangle = i\int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{i}{k_0 - \omega + i\varepsilon}\right)^2 \varrho_{OJ_i}(\omega, \mathbf{k}) E_i(k). \tag{328}$$

Innen azt tehetjük meg, hogy

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{1}{k_0 - \omega + i\varepsilon}\right)^2 \varrho_{OJ_i}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{\partial}{\partial k_0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{1}{k_0 - \omega + i\varepsilon}\right)^2 \varrho_{OJ_i}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{\partial}{\partial k_0} G^{ra}_{OJ_i}(k), \tag{329}$$

ezzel

$$\Delta\langle \hat{O}(k)\rangle = \frac{\partial G^{ra}_{OJ_i}(k)}{\partial i k_0} E_i(k). \tag{330}$$

Hogy továbbléphessünk, két feltételezésünk lesz. Tegyük fel, hogy magának a J_i operátornak keressük a válaszát. Ha nincs külső szimmetriasértés a rendszerben, akkor a $\varrho_{J_i J_j}(k)$ függvény diagonális lesz. Mivel az áramok hermitikusak, ez a függvény páratlan és valós.

Másrészt feltételezzük, hogy a külső tér jóval lassabban változik, mint a belső dinamika. Ekkor $E(x)$ konstansnak tekinthető, vagyis Fourier térben $\delta(k)$. Vagyis

$$\Delta\langle J_i\rangle = -i\int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{1}{\omega - i\varepsilon}\right)^2 \varrho_{J_i J_i}(\omega, 0) E_i. \tag{331}$$

Mivel a ϱ antiszimmetrikus:

$$-i\int\frac{d\omega}{2\pi}\left(\frac{1}{\omega-i\varepsilon}\right)^2\varrho_{J_iJ_i}(\omega,0)=-\frac{i}{2}\int\frac{d\omega}{2\pi}\left(\left(\frac{1}{\omega-i\varepsilon}\right)^2-\left(\frac{1}{\omega+i\varepsilon}\right)^2\right)\varrho_{J_iJ_i}(\omega,0)=$$
$$=-\frac{i}{2}\int\frac{d\omega}{2\pi}\left(\frac{1}{\omega-i\varepsilon}-\frac{1}{\omega+i\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{\omega-i\varepsilon}+\frac{1}{\omega+i\varepsilon}\right)\varrho_{J_iJ_i}(\omega,0)=-\frac{i}{2}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{2i\varepsilon}{\omega^2+\varepsilon^2}\frac{2\omega}{\omega^2+\varepsilon^2}\varrho_{J_iJ_i}(\omega,0) \tag{332}$$

Az első tag $\varepsilon\to 0$ esetben $2\pi i\delta$-hoz tart, a második tag pedig $2/\omega$-hoz. Tehát az egész eredménye

$$\Delta\langle J_i\rangle=\lim_{\omega\to 0}\frac{\varrho_{J_iJ_i}(\omega,0)}{\omega}E_i. \tag{333}$$

Az áram és a térerősség arányossági tényezője a diffúziós állandó, ami tehát úgy fejezhető ki, mint

$$D=\lim_{\omega\to 0}\frac{\varrho_{J_iJ_i}(\omega,0)}{\omega}=\lim_{\omega\to 0}\frac{\langle[J_i,J_i]\rangle(\omega,0)}{\omega}. \tag{334}$$

Ez a *Kubo-formula*.

Az elektromos vezetőképességre például a $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ összefüggés alapján, felhasználva az irányok egyenrangúságát, kapjuk:

$$\sigma=\lim_{\omega\to 0}\frac{\langle[J_1,J_1]\rangle(\omega,0)}{\omega}=\frac{1}{3}\lim_{\omega\to 0}\frac{\langle[J_i,J_i]\rangle(\omega,0)}{\omega}, \tag{335}$$

ahol az utolsó kifejezésben impliciten összegzést értünk az ismétlődő indexekre.

4.2 Hidrodinamika

A fentiekre speciális példa a hidrodinamikai transzport együtthatók számolása. A hidrodinamika esetében úgy térünk el az egyensúlytól, hogy globális áramlást teszünk fel a rendszerben, és esetleg a hőtartály, amivel kapcsolatba hozzuk a mikrokanonius sokasághoz, hely (és idő) függő hőmérséklettel rendelkezik.

Hogy a fenti kifejezésekkel kapcsolatot teremtsünk, meg kell fogalmazni a Hamilton függvény szintjén, mit is jelent az áramlás sebességének és a hőtartály hőmérsékletének változtatása. Először is a Hamilton operátor a négyes-energia-impulzus operátor része, ezért Lorintz transzformációt szenved. Ugyanakkor az áramlás négyessebessége is Lorentz transzformálódik, ezért az $u_\mu P^\mu$ invariáns. Tekintsük most a kis sebességek esetét, ekkor a referencia rendszer az áramlásmentes, $\bar{u}=(1,0,0,0)$ négyessebességgel leírható nyugalmi rendszer. Jelöljük ezen felül u-val az új rendszer négyessebességét. Ekkor

$$H^{(0)}=\bar{u}^\mu P^{(0)}_\mu=u_\mu P^\mu=\bar{u}^\mu P^\mu+(u-\bar{u})_\mu P^\mu=H+(u-\bar{u})_\mu P^\mu\quad\Rightarrow\quad\delta H=-(u-\bar{u})_\mu P^\mu. \tag{336}$$

A fenti kifejezésben P^μ az energia-impulzus tenzorból jön. Ezzel általánosítva a fenti képletet, kihasználva az energia-impulzus tenzor szimmetriáját, kapjuk:

$$\delta H(t)=-\int d^3\mathbf{x}\,T^{0\mu}(x)(u(x)-\bar{u})_\mu. \tag{337}$$

Ezen felül még hőt is akarunk közölni a rendszerrel, ami legegyszerűbben úgy tehetünk meg, hogy a Hamilton operátort kissé időfüggővé teszzük, azaz bevezetünk még egy extra $\delta\mathcal{H}'(x)=-\delta c(x)\mathcal{H}(x)$ Hamilton-sűrűség korrekciós tagot. Mint általában a transzport esetén, most is azzal a feltevéssel élünk, hogy δc közel konstans. Ekkor az energia várható értékének megváltozása első rendben $\delta E=\delta cE$, vagyis

$$\delta c=-\frac{\delta E}{E}. \tag{338}$$

A fenti arányt termodinamikai mennyiségekkel is kifejezhetjük, pl. a hőmérséklet változásával

$$\delta c=-\frac{\partial\log E}{\partial T}\delta T=-\frac{\delta T}{T}=\frac{\delta\beta}{\beta}, \tag{339}$$

ahol a két utolsó tagnál ekvipartíciót tettünk fel, ami miatt $E\sim T$.

Mindezzel a Hamilton operátor teljes megváltozása, elhagyva a téridő argumentumokat:

$$\delta H = -\int d^3\mathbf{x}\, T^{0\mu}((1+\delta c)u - \bar{u})_\mu. \tag{340}$$

Később használni fogjuk a $U = (1+\delta c)u$ jelölést.

Hogy ezt a fenti teljesítmény alakba tudjuk írni, vegyük az időrediváltját

$$\begin{aligned}\partial_0 \delta H &= -\int d^3\mathbf{x}\, \left[\partial_0 T^{0\mu}(U-\bar{u})_\mu + T^{0\mu}\partial_0 U\right] = -\int d^3\mathbf{x}\, \left[-\partial_i T^{i\mu}(U-\bar{u})_\mu + T^{0\mu}\partial_0 U\right] = \\ &= -\int d^3\mathbf{x}\, T^{\nu\mu}\partial_\nu U_\mu = -\int d^3\mathbf{x}\, T^{\mu\nu}[\partial U]_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{341}$$

ahol az utolsó tagban szimmetrizált formát használtunk, $[\partial U]_{\mu\nu} = (\partial_\mu U_\nu + \partial_\nu U_\mu)/2$.

Ezt az alakot visszaírhatjuk a transzport együtthatók Kubo formulájába:

$$\Delta \left\langle T^{\mu\nu}\right\rangle = \lim_{\omega\to 0} \frac{\left\langle [T^{\mu\nu}, T^{\varrho\sigma}]\right\rangle (\omega, \mathbf{k}=0)}{\omega} [\partial U]_{\varrho\sigma}. \tag{342}$$

A fizikai jelentéshez bontsuk fel a fenti kifejezést az együtt mozgó rendszer tér és idő felbontása szerint. Ehhez

$$\mathbf{1}_{\mu\nu;\varrho\sigma} \equiv g_{\mu\varrho} g_{\nu\sigma} = \Pi^{(1)}_{\mu\nu;\varrho\sigma} + \Pi^{(2)}_{\mu\nu;\varrho\sigma} + \Pi^{(3)}_{\mu\nu;\varrho\sigma} + \Pi^{(4)}_{\mu\nu;\varrho\sigma}, \tag{343}$$

ahol

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}_{\mu\nu;\varrho\sigma} &= u_\mu u_\varrho u_\nu u_\sigma, \\ \Pi^{(2)}_{\mu\nu;\varrho\sigma} &= \frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\varrho\sigma}, \\ \Pi^{(3)}_{\mu\nu;\varrho\sigma} &= \Delta_{\mu\varrho} u_\nu u_\sigma + u_\mu u_\varrho \Delta_{\nu\sigma} \\ \Pi^{(4)}_{\mu\nu;\varrho\sigma} &= \Delta_{\mu\varrho}\Delta_{\nu\sigma} - \frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\varrho\sigma},\end{aligned} \tag{344}$$

itt Δ az u-ra merőleges altérre:

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu. \tag{345}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a Π projektorok ortogonálisok. Bármely tenzort felbonthatunk a megadott projektorokkal, hiszen

$$M_{\mu\nu} = g_{\mu\varrho} g_{\nu\sigma} M^{\varrho\sigma} = \sum_a \Pi^{(a)}_{\mu\nu;\varrho\sigma} M^{\varrho\sigma}. \tag{346}$$

Az energia-impulzus tenzor felbontása:

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu - p\Delta^{\mu\nu} + Q^\mu u^\nu + Q^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu}, \tag{347}$$

ahol

$$\varepsilon = u_\varrho u_\sigma T^{\varrho\sigma}, \quad p = -\frac{1}{3}\Delta_{\varrho\sigma} T^{\varrho\sigma}, \quad Q_\mu = \Delta_{\mu\varrho} u_\sigma T^{\varrho\sigma}, \quad \pi_{\mu\nu} = \Pi^{(4)}_{\mu\nu;\varrho\sigma} T^{\varrho\sigma}. \tag{348}$$

Fizikailag ε az energiasűrűség, p a nyomás, Q a hőáram, π a viszokzitás vagy feszültségtenzor. A δH-ban szereplő $T[\partial U]$ szorzat ezek után úgy írható, hogy

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}[\partial U]_{\mu\nu} = \; & \varepsilon(u^\mu u^\nu \partial_\mu U_\nu) - p(\Delta^{\mu\nu}\partial_\mu U_\nu) + Q^\mu(u^\nu \partial_\nu U_\mu + u^\nu \partial_\mu U_\nu) + \\ & + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\left[\Delta_{\mu\varrho}\Delta_{\nu\sigma}(\partial^\varrho U^\sigma + \partial^\sigma U^\varrho) - \frac{2}{3}\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\varrho\sigma}\partial^\varrho U^\sigma\right].\end{aligned} \tag{349}$$

1. Az első tag kihasználva, hogy $u^2 = 1$:

$$\varepsilon u^\nu u^\mu \partial_\mu U_\nu = \varepsilon u^\nu u^\mu \partial_\mu((1+\delta c)u_\nu) = \varepsilon u^\mu \partial_\mu \delta c + (1+\delta c)\varepsilon u^\nu u^\mu \partial_\mu u_\nu. \tag{350}$$

Kihasználhatjuk, hogy $u^\nu \partial_\mu u_\nu = \frac{1}{2}\partial_\mu u^2 = 0$. Ezen felül vezessük be a $D = u^\mu \partial_\mu$ jelölést. Ekkor

$$\varepsilon u^\nu u^\mu \partial_\mu U_\nu = \varepsilon D \delta c = \beta^{-1} \varepsilon D \beta. \tag{351}$$

Ezt tovább alakíthatjuk, ha észrevesszük, hogy mivel $D\beta$ már elsőrendű, a szorzófaktorban a nyugalmi rendszer adatait kell használnunk. Ennek energia-impulzus tenzora

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \tag{352}$$

és az energia-impulzus megmaradás egyenlete miatt

$$u_\mu \partial_\nu \langle T^{\mu\nu} \rangle = u_\mu \partial_\nu ((\varepsilon+p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}) = u^\nu \partial_\nu (\varepsilon+p) + (\varepsilon+p) \partial_\nu u^\nu - u_\mu \partial^\mu p = u^\nu \partial_\nu \varepsilon + (\varepsilon+p) \partial_\nu u^\nu = 0 \tag{353}$$

(Euler-egyenlet). Itt $w = \varepsilon + p$ az entalpia. Mivel ebben a tárgyalásban nincs kémiai potenciál, ezért $w = Ts$. Ugyanakkor $f = \varepsilon - Ts = -p$, és $df = -sdT - pdV$. Vagyis

$$w = Ts = -T \frac{\partial f}{\partial T} = T \frac{\partial p}{\partial T} = -\beta \frac{\partial p}{\partial \beta}. \tag{354}$$

Az Euler-egyenlet miatt

$$D\varepsilon = D\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} = -w \partial_\nu u^\nu = \beta \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} \partial_\nu u^\nu \quad \Rightarrow \quad \frac{D\beta}{\beta} = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \partial_\nu u^\nu. \tag{355}$$

Végülis az első tag

$$\varepsilon u^\nu u^\mu \partial_\mu U_\nu = \beta^{-1} \varepsilon D \beta = \varepsilon \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \partial_\nu u^\nu. \tag{356}$$

2. A második tag

$$-p \Delta^{\mu\nu} \partial_\mu U_\nu = -p \Delta^{\mu\nu} \partial_\mu (1+c) u_\nu = -p \Delta^{\mu\nu} (1+c) \partial_\mu u_\nu \approx -p \partial_\mu u^\mu, \tag{357}$$

ahol kihasználtuk a linearitást, és u_μ és $\partial_\nu u_\mu$ ortogonalitását. Az első és második tag összevonható:

$$\varepsilon u^\nu u^\mu \partial_\mu U_\nu - p \Delta^{\mu\nu} \partial_\mu U_\nu = -\left(p - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right) \partial_\nu u^\nu = -p' \partial_\nu u^\nu. \tag{358}$$

3. A harmadik tagban

$$Q^\mu (u^\nu \partial_\nu U_\mu + u^\nu \partial_\mu U_\nu) = Q^\mu (u^\nu \partial_\nu u_\mu + u^\nu u_\mu \partial_\nu \delta c + u^\nu \partial_\mu u_\nu + \partial_\mu \delta c) = Q^\mu (D u_\mu + \beta^{-1} \partial_\mu \beta), \tag{359}$$

ahol kihasználtuk, hogy $Q^\mu u_\mu = 0$, és hogy $u^\nu \partial_\mu u_\nu = 0$.

4. A negyedik tagban olyan típusú járulékok szerepelnek, hogy

$$\Delta_{\mu\sigma} \partial^\varrho U^\sigma = \Delta_{\mu\sigma} (\partial^\varrho u^\sigma + u^\sigma \partial^\varrho \delta c) = \Delta_{\mu\sigma} \partial^\varrho u^\sigma, \tag{360}$$

hiszen $\Delta_{\mu\sigma} u^\sigma = 0$. Emiatt ebben a tagban nincs járuléka a hőmérséklet gradiensnek.

Végül tehát oda jutottunk, hogy

$$T^{\mu\nu} [\partial U]_{\mu\nu} = -p' \Delta_{\mu\nu} \partial^\mu u^\nu + Q^\mu (D u_\mu + \beta^{-1} \partial_\mu \beta) + \frac{1}{2} \pi^{\mu\nu} \left[\Delta_{\mu\varrho} \Delta_{\nu\sigma} (\partial^\varrho u^\sigma + \partial^\sigma u^\varrho) - \frac{2}{3} \Delta_{\mu\nu} \Delta_{\varrho\sigma} \partial^\varrho u^\sigma \right]. \tag{361}$$

Első rendben a projektorokban a nyugvó rendszer négyessebességét használhatjuk. Ekkor

$$\bar{u}_\mu = \delta_{0\mu}, \qquad \Delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu = 0 \text{ or } \nu = 0 \\ -\delta_{ij} & \text{if } \mu \neq 0 \text{ and } \nu \neq 0 \end{cases} \tag{362}$$

valamint $Q^0 = 0$ és $Q^i = T^{0i}$. Tehát

$$T^{\mu\nu}[\partial U]_{\mu\nu} = p'\partial_i u_i + T^{0i}(Du_i + \beta^{-1}\partial_i\beta) + \frac{1}{2}\pi^{ij}\left[\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_i u^i\right]. \tag{363}$$

A forgásinvariancia miatt a különböző transzformációs tulajdonságokkal rendelkező operátorok kommutátorának várható értéke nulla. Ezért azt írhatjuk (342) alapján, hogy

$$\begin{aligned}
\delta\left\langle p'(x)\right\rangle &= \lim_{\omega\to 0}\frac{\left\langle [p',p']\right\rangle(\omega,\mathbf{k}=0)}{\omega}\partial_i u_i,\\
\delta\left\langle T^{0i}(x)\right\rangle &= \lim_{\omega\to 0}\frac{\left\langle [T^{0i},T_{0i}]\right\rangle(\omega,\mathbf{k}=0)}{\omega}(Du^i + \beta^{-1}\partial^i\beta),\\
\delta\left\langle \pi^{ij}(x)\right\rangle &= \lim_{\omega\to 0}\frac{\left\langle [\pi^{ij},\pi_{ij}]\right\rangle(\omega,\mathbf{k}=0)}{\omega}\frac{1}{2}\left[\partial^i u^j(x'') + \partial^j u^i(x'') - \frac{2}{3}\delta^{ij}\partial^m u^m(x'')\right].
\end{aligned} \tag{364}$$

Az együtthatókat a fenomenologikus hidrodinamika már elnevezte

$$\delta\left\langle p'\right\rangle = \zeta\partial_i u_i, \quad \delta\left\langle T_{0i}\right\rangle = -\kappa(Du_i + \beta^{-1}\partial_i\beta), \quad \delta\left\langle \pi_{ij}\right\rangle = \frac{\eta}{2}\left[\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_m u_m\right]. \tag{365}$$

Innen leolvashatók a transzport együtthatók értékei. Kihasználva még, hogy a különböző komponensek várható értéke ugyanaz, a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\zeta &= \lim_{\omega\to 0}\frac{\left\langle [p',p']\right\rangle(\omega,\mathbf{k}=0)}{\omega}\\
\kappa &= \lim_{\omega\to 0}\frac{\left\langle [T_{01},T_{01}]\right\rangle(\omega,\mathbf{k}=0)}{\omega} = \frac{1}{3}\lim_{\omega\to 0}\frac{\left\langle [T_{0i},T_{0i}]\right\rangle(\omega,\mathbf{k}=0)}{\omega},\\
\eta &= \lim_{\omega\to 0}\frac{\left\langle [\pi_{12},\pi_{12}]\right\rangle(\omega,\mathbf{k}=0)}{\omega} = \frac{1}{5}\lim_{\omega\to 0}\frac{\left\langle [\pi_{ij},\pi_{ij}]\right\rangle(\omega,\mathbf{k}=0)}{\omega}.
\end{aligned} \tag{366}$$

A fenti tárgyalás kiegészíthető megmaradó részecskeszámhoz tartozó részecskeáramlással is.

5 A perturbációs sor átrendezései: renormálás és felösszegzés

Először foglalkozzunk az UV divergenciákkal. Először állapítsuk meg néhány tulajdonságát a kiszámolt példák alapján

- a tömeghez $\sim \Lambda^2$ valamint $\sim m^2 \ln \Lambda$, a csatolási állandóhoz $\sim \ln \Lambda$ divergenciát kaptunk.
- a divergenciák lokálisak voltak
- a divergenciák nem függtek a hőmérséklettől.

Ezen tények miatt a következő heurisztikusnak tűnő eljárást követhetjük. Az effektív hatásnak végesnek kell lennie, mert ez írja le a fizikát. A klasszikus hatás azonban semmit nem ír le, ez csak egy kiinduló alak a pertrurbációszámításban. Emiatt nincs okunk feltételezni, hogy paraméterei, nevezetesen m^2 és λ, végesek. Valóban, ha megengedünk végtelen értékeket, az effektív hatásban kiküszöbölhetjük a végteleneket.

Hogy ezt lássuk, vezessük be a

$$m_{ren}^2 = m^2 + \lambda \bar{\Sigma}_0^{div}, \qquad \lambda_{ren} = \lambda + \frac{3\lambda^2}{2} \mathcal{I}^{div} \tag{367}$$

renormált mennyiségeket, ahol a "div" indexek a divergens részeket jelentik, és $\bar{\Sigma}_0$ a λ nélküli részt jelenti. Ha ezeket végessé tesszük, ami azt jelenti, hogy m^2 és λ végtelenek, akkor a teljes egy hurok járulék véges lesz $\mathcal{O}(\lambda^2)$ relatív rendig, ami már a két hurok korrekciók világába tartozik. Kérdés persze, hogy mit jelent a "divergens rész". Jelentheti pl. az $1/\varepsilon$-nal arányos részeket, vagyis konkrét esetben:

$$m_{ren}^2 = m^2 - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \lambda_{ren} = \lambda - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}. \tag{368}$$

Az egy hurok rendben még van m^2 és λ, emiatt szigorúan véve nem végesek. Azonban pl. a sajátenergia esetén

$$\begin{aligned} m^2 + \lambda \bar{\Sigma}_0(m^2, T) &= m_{ren}^2 + (\lambda_{ren} - \frac{3\lambda^2}{2} \mathcal{I}^{div}) \left[\bar{\Sigma}_0(m_{ren}^2 - \lambda \bar{\Sigma}_0^{div}, T) - \bar{\Sigma}_0^{div}(m_{ren}^2 - \lambda \bar{\Sigma}_0^{div}) \right] = \\ &= m_{ren}^2 + \lambda_{ren} \left[\bar{\Sigma}_0(m_{ren}^2, T) - \bar{\Sigma}_0^{div}(m_{ren}^2) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \tag{369}$$

Ez azt jelenti, hogy a végtelenek magasabb, jelen esetben $\mathcal{O})(\lambda^2)$ rendre tolódtak.

Ezt az eljárást hívjuk renormálásnak, mikor a Lagrange-fügvényben szereplő paramétereket átértelmezve (végtelen faktorokkal) végeredményben véges eredményhez jutunk.

Formálisan ezt a gondolatot a következőképp lehet végigvinni a perturbációszámításban. A klasszikus Lagrange-függvényt két rész összegeként állítjuk elő: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$, az első már a renormált értékeket tartalmazza, a másodikban a divergens ellentagok (counterterms) találhatók, ezek formálisan a csatolási állandóban magasabb rendűek. Emiatt csak abban a rendben kerülnek felhasználásra, amely megfelel az adott ellentag-rész csatolási állandó hatványának, és ott semlegesíti a divergenciákat. Néhány megjegyzés ezzel kapcsolatban

- A Lagrange-függvényben perturbációnak tekintjük azokat a tagokat, amelyek bár végtelenhez tartanak, de a renormált csatolási állandóban magasabb rendűek. Ezt tekinthetjük az elmélet inkonzisztenciájának, azonban a végeredményben minden fizikai mennyiség véges lesz minden rendben (l. később), vagyis az eredményül kapott sorok már a szokásos értelemben is perturbációs sorok.
- A renormálási gondolat csak akkor működőképes, ha minden divergencia olyan alakú, mint a klasszikus Lagrange-függvény. Ha más korrelációs függvény is divergensnek bizonyul, akkor a Lagrange-függvényt ki kell egészítenünk azzal a taggal, amelyik ezt semlegesíteni tudja, és az egész számolást el kell végeznünk, ezt az új tagot is belevéve. Akkor beszélünk renormálható elméletről, ha ez az eljárás konvergens, azaz a Lagrang-függvény csak véges sok tagot tartalmaz.
- A renormálás során impulzusfüggő tagokhoz is kell ellentagokat felvenni (l. később), például $\sim \Phi \partial^2 \Phi$-hez. Ennek az együtthatója azonban az eredeti, klasszikus Lagrange függvényben 1! Hogy ezt is flexibilissé tegyük, a kvantum tér normálását kell megváltoztatnunk, vagyis $\Phi^2 \to Z\Phi^2$ átskálázást kell végrehajtanunk. Ezt hívjuk hullámfüggvény renormálásnak.

Nézzük meg Φ^4 elmélet esetén hogyan megy a renormálás. Az eredeti, klasszikus Lagrange-függvény alakja

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_0)^2 - \frac{m_0^2}{2}\Phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{24}\Phi_0^4. \tag{370}$$

Az itt szereplő terek korrelációs függvényeit nem lehetne végessé tenni a csatolási állandók hangolásával, szükség van a hullámfüggvény renormálására is: $\Phi_0^2 = Z\Phi^2$, ezzel

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{m_b^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda_b}{24}\Phi^4, \qquad m_b^2 = Zm_0^2, \quad \lambda_b = Z^2\lambda_0. \tag{371}$$

A "b" indexű mennyiségek a bare (csupasz) csatolási állandók. Ha Z, m_b és λ_b faktorokat megfelelően választjuk a levágás illetve ε függvényében, akkor innen már véges elmélethez juthatunk. Perturbációszámításban a fenti alakból renormált részt + ellentagokat csinálunk

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{m_{ren}^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda_{ren}}{24}\Phi^4 \; + \; \frac{\delta Z}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{\delta m^2}{2}\Phi^2 - \frac{\delta\lambda}{24}\Phi^4, \tag{372}$$

ahol $\delta Z = Z - 1$, $\delta m^2 = m_b^2 - m_{ren}^2$, $\delta\lambda = \lambda_b - \lambda_{ren}$, s ezek formálisan magasabb rendűek a csatolási állandó kifejtés szempontjából, mint a vezető rendek, azaz

$$\delta Z = \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell \delta Z_\ell, \qquad \delta m^2 = \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell \delta m_\ell^2, \qquad \delta\lambda = \lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell \delta\lambda_\ell. \tag{373}$$

Hogy az ellentagokat, illetve valamely megfigyelhető mennyiség véges értékét meghatározzuk, a következő stratégiát követjük:

- Először bevezetünk valamilyen *regularizációt* az elméletben, amellyel számolva már véges integrálokat kapunk.
- Ezután rendről rendre felírjuk az összes Feynman gráfot tetszőleges korrelációs függvényhez. Ez függvénye lesz a renormált paramétereknek, valamint az addig a rendig szóba jövő ellentag-részeknek.
- Az ellentagokat úgy választjuk meg, hogy az adott rend véges legyen. Hogy ez megtehető, azt demonstrálni fogjuk a későbbiekben. A legalacsonyabb rendben csak a legelső ismeretlen ellentagok fordulnak elő, így azokat onnan meg tudjuk határozni. Tegyük fel most, hogy valahanyadik rendig meghatároztuk az ellentagokat. Egy adott rendű járulék függ az alacsonyabb rendű ellentagoktól, valamint az adott rend új ellentagjaitól is. Mivel az előbbieket már ismerjük, feltételezésünk szerint, az új ellentagok meghatározhatók.
- Az ellentagok megválasztása nem egyértelmű, hiszen ha pl. $\delta\lambda_1$ eltünteti a divergenciákat az adott rendben, akkor $\delta\lambda_1 + \Delta\lambda_1$ is megteszi ugyanezt, ha $\Delta\lambda_1$ véges. Ez összefüggésben van azzal a bizonytalansággal, ahogyan egy gráf "végtelen részét" definiáljuk. Az ellentagok kijelölésének mikéntje adja meg a *renormálási sémát*; azaz egyik sémából a másikba úgy térhetünk át, ha megadjuk a véges különbségeket minden rendben. Pl. a Φ^4 modell sajátenergiájának meghatározásakor nulla hőmérsékleten írhatjuk (l. (272))

$$\Sigma_0 = m_{ren}^2 + \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln\frac{m_{ren}^2}{4\pi\mu^2}\right) + \delta m_1^2. \tag{374}$$

  Három különböző séma népszerű (de persze bármely más is megtenné).

$$\begin{aligned}
&\text{MS}: && \delta m_1^2 = \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \Sigma_0^{\text{MS}} = m_{ren}^2 + \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2}\left(\gamma_E - 1 + \ln\frac{m_{ren}^2}{4\pi\mu^2}\right) \\
&\overline{\text{MS}}: && \delta m_1^2 = -\frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 - \ln(4\pi)\right] \quad \Rightarrow \quad \Sigma_0^{\overline{\text{MS}}} = m_{ren}^2 + \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2}\ln\frac{m_{ren}^2}{\mu^2} \\
&\text{OM}: && \delta m_1^2 = -\Sigma_0^{1-\text{hurok}} \quad \Rightarrow \quad \Sigma_0^{\text{OM}} = m_{ren}^2.
\end{aligned} \tag{375}$$

Hasonlóképpen a csatolási állandó esetére

$$\Gamma^{(4)} = \lambda + \delta\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\right] + \frac{\lambda^2}{2}\left[\mathcal{I}_{fin}(k_1+k_2) + \mathcal{I}_{fin}(k_1+k_3) + \mathcal{I}_{fin}(k_1+k_3)\right]$$
$$\Rightarrow \quad \delta\lambda^{MS} = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \delta\lambda^{MS} = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi\right]. \tag{376}$$

- A renormált mennyiségek meghatározásának módja a *renormálási előírás* (renormalization prescription). Lehet egyszerűen megadni az értékeket, de lehet bizonyos megfigyelhető mennyiségekből származtatni ezeket. Mondhatjuk pl. azt Φ^4 modellben, hogy

$$G^{-1}(T=0, k^2 \approx M^2) = k^2 - M^2 + \mathcal{O}((k^2-M^2)^2), \qquad \Gamma^4(T=0, k_i=0) = \lambda_0. \tag{377}$$

  Fizikailag ez azt jelenti, hogy a részecske tömege M legyen egységnyi reziduum mellett, az alacsony energiás szórás szórási hatáskeresztmetszete pedig

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda_0^2}{64\pi^2 s}, \qquad \text{ahol} \quad s = (k_1+k_2)^2. \tag{378}$$

  Valójában a hullámfüggvény renormálás fizikai értékétől függetlenek a megfigyelhető mennyiségek. Csupán azt írja le, hogyan reprezentáljuk az elméletet terekkel. Emiatt értékére bármely (véges) számot választhatunk.

- Ezen eljárással minden korrelációs függvény véges értekű lesz (l. később)

A renormálás matemematikailag analitikus elfolytatásnak felel meg. Ha a teljes Lagrange-függvényt tekintjük, abban a $Z(\Lambda)$, $m_b^2(\Lambda)$ illetve $\lambda_b(\Lambda)$ mennyiségek szerepelnek (most Λ a regularizáló paraméter). Ezek kifejthetők a renormált csatolási állandó szerint, ahogyan láttuk (373) képletben. Ennek a sornak a tagjai azonban nagyok lehetnek, hiszen mind tartalmaz divergens (sőt, a magasabb rendek felé haladva egyre divergensebb) részt is. Ezért a Lagrange függvény mint sor konvergenciasugara nagyon kicsi lehet. Ugyanakkor a fizikai mennyiségek sora véges tagokat tartalmaz, vagyis a konvergenciasugár sokkal nagyobb lehet. Ez jól ismert a sorok esetében is. Ha pl. van egy sorunk, amelynek perturbatív kifejtése

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n x^n, \tag{379}$$

akkor ennek konvergenciasugara $|x| < 1/Q$. Egy új változóval azonban, amely kis x-ekre megegyezik x-szel: $y = x/(1-Qx)$ a függvény $f(y) = 1 + Qy$ minden értékre konvergens.

Még pontosabban utánanézve egy általános sémában (pl. MS) számolva a fizikai mennyiségek sora *aszimptotikus*, ami azt jelenti, hogy konvergenciasugara nulla. Gráfokat tekintve ennek az az oka, hogy n-ed rendben megjelennek $n!$-sal növekvő tagok (renormalon). Ez azonban nem jelenti azt, hogy minden sémában ugyanolyan rossz a konvergencia. Erre később, a renormálási sémák viszonyának vizsgálatakor fogunk visszatérni.

5.1 Overall divergenciák

A renormálás stratégiája akkor működik, ha csak olyan mennyiségek divergensek, amelyek a Lagrange-fügvényben szerepelnek, lokálisak, és nem függenek a környezeti paraméterektől, pl. a hőmérséklettől. Ez utóbbi esetben ugyanis nem lenne a környeyettől független mikroszkopikus dinamika. Hogy ezeket a kérdéseket megvizsgáljuk, nézzük meg közelebbről a diagramok UV divergenciáit.

Egy diagram lehet UV divergens úgy, hogy minden propagátor impulzusa végtelenhez tart, vagy úgy, hogy csak egy aldiagram impulzusai tartanak végtelenbe. Az elsőt hívjuk overall divergenciának, a második az aldivergencia esete. Először foglalkozzunk csak az overall divergenciával (ami egy adott diagram esetén nyilvánvalóan a legerősebb divergencia).

Vizsgáljuk meg, hogy milyen diagramok lehetnek overall divergensek egy általános elméletben. Dimenzióanalízist végzünk, a tömeg-dimenziókat számoljuk (a $\hbar = c = 1$ egységrendszerben az impulzus tömeg

dimenziójú, a távolság inverz tömeg dimanziójú, a deriválás megint tömeg dimenziójú). A hatásfunkcionál dimenziótlan, $[S] = 0$. Emiatt d dimenzióban

$$
\begin{aligned}
&S = \int d^d x \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{L}] = d \to 4; \\
&\mathcal{L} \to \Phi(\partial^2 + m^2)\Phi \quad \Rightarrow \quad [\Phi(x)] = \frac{d}{2} - 1 \to 1; \\
&\Phi(k) = \int d^d x e^{ikx} \Phi(x) \quad \Rightarrow \quad [\Phi(k)] = -\frac{d}{2} - 1 \to -3; \\
&\mathcal{L} \to g_c \Phi^c \quad \Rightarrow \quad [g_c] = c + d - \frac{cd}{2} \to 0 \quad \Rightarrow \quad [g_c] = 0: \qquad c = \frac{2d}{d-2} \\
&\mathcal{L} \to m \Psi^\dagger \Psi \quad \Rightarrow \quad [\Psi(c)] = \frac{d-1}{2} \to \frac{3}{2} \\
&\Psi(k) = \int d^d x e^{ikx} \Psi(x) \quad \Rightarrow \quad [\Psi(k)] = -\frac{d+1}{2} \to -\frac{5}{2}; \\
&\mathcal{L} \to g_{bc} (\Psi^\dagger \Psi)^b \Phi^c \quad \Rightarrow \quad [g_c] = b + c + d - \frac{(c+2b)d}{2} \overset{b=c=1}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
\tag{380}
$$

Vizsgáljunk most bozonikus elméleteket. Az effektív hatás dimenziótlan, impulzustérben a Φ^n tag együtthatójának dimenziója tehát

$$
\Gamma \to \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_n}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(\sum k_i) \Gamma_n(k_1, \dots, k_n) \ \Phi(k_1) \dots \Phi(k_n) \quad \Rightarrow \quad dn - d - \frac{d+2}{2} n + [\Gamma_n] = 0,
$$

$$
[\Gamma_n] = d - \frac{d-2}{2} n. \tag{381}
$$

Ezt a dimenziót valami dimenziós paraméternek kell hordoznia. Ez lehet a levágás, és általános esetben meg is jelenik ez a faktor. Ha a csatolási állandó dimenziója $[\lambda]$, akkor ℓ-ed rendben a levágás-függés

$$
\Gamma_n \sim g_c^\ell \Lambda^z \quad \Rightarrow \quad z = d - \frac{d-2}{2} n - \ell [g_c]. \tag{382}
$$

Ennek jelentése:

- ha a csatolási állandó pozitív tömeg dimenziójú, akkor ℓ növekedésével egyre konvergensebb eredményt kapunk, és csak legfeljebb az $n < 2d/(d-2)$-pont függvények lehetnek divergensek. Vagyis ekkor csak véges sok diagram divergens. Ezek a *szuperrenormálható* elméletek. Például $d = 2$ két dimenziós esetben minden kölcsönhatás szuperrenormálható, mert $[g_c] = 2$. Itt $\ell = 1$ divergens csak, ez a tadpole korrekció.

- ha a csatolási állandó dimenziótlan, akkor z független a hurok rendtől. Négy dimenzióban csak a nulla-, két- és négypontfüggvények lehetnek divergensek (ez utóbbiak legfeljebb logaritmikusan), azonban bármely hurok rendben azok lesznek. Itt végtelen sok divergens diagram létezik, de csak véges sok típusú várható értékben. Ezek(lehetnek) a renormálható elméletek.

- ha a csatolási állandó dimenzója negatív, akkor magasabb rendben egyre több pont függvény lesz divergens. Végtelen hurok limeszben bárhány pont függvény divergens lesz, ezek végesítéséhez tehát végtelen sok tag kell a Lagrange-függvényben, vagyis az elmélet nem renormálható. Négy dimenzióban maximum a Φ^4-es kölcsönhatás renormálható, $d = 6$-ban a Φ^3 elmélet. Effektív elméletként azonban mindezek használhatók, ha csak véges hurok rendben akarunk számolni.

Az overall divergenciák esetében, definíció szerint minden propagátor impulzusa végtelenbe tart. A hőmérséklet és a kémiai potenciál azonban exponenciálisan elnyomottak nagy energián, vagyis egy ilyen faktort tartalmazó diagram véges lesz. Emiatt az overall divergenciák *nem függnek a hőmérséklettől és kémiai potenciáltól.* Ez általános elvként is megfogalmazható: az UV fizika érzéketlen az IR részletekre.

Még nem beszéltünk az overall divergenciák impulzusfüggéséről. Belátható, hogy a külső impulzusok szerinti deriválás csökkenti a divergencia fokát. Érvként nézzük meg a propagátor impulzus függését, ha p a belső

impulzus, amely végtelenhez tart, k a külső impulzus. Ekkor alakíthatjuk úgy a belső impulzusokat, hogy valamelyik propagátorra

$$G(p+k) = G(p) + k_\mu \partial_\mu G(p) + \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} = \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{k^2 + 2kp}{(p^2 - m^2)^2} + \dots \tag{383}$$

A második tag nagy impulzusra jobban levág, így az eredmény konvergensebb lesz. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a külső impulzus egy új, dimenziós vertexet vezet be. Emiatt a külső impulzus szerinti deriválás során előbb-utóbb konvergens eredményt kapunk. Tehát az overall divergencia a külső impulzusban polinomiális.

Emiatt az overall divergenciát el lehet tüntetni olyan módon, hogy a Lagrange függvényhez egy megfelelő (polinomiális) lokális tagot adunk hozzá, amely vezető rendben éppen kiejti a divergenciát. Ez a tag ellentagként fog megjelenni a renormált Lagrange-függvény formában. Ilyen módon konstriktív eljárásun van az ellentagok meghatározására.

5.2 Aldivergenciák

Ha egy gráfnak nincsenek overall divergenciái, attól még lehet divergens. Példa a két hurok tadpole, ahol az overall divergencián kívül még egy egy hurok korrekció is magmarad.

Aldivergencia esetében a hurok impulzusok egy része véges értéket vesz fel, míg mások végtelenhez tartanak. Emiatt kijelölhetünk egy olyan részgráfot, amelynek minden vonala végtelenbe tart. Ezt a részgráfot elkülönítve egy n-pont függvény szerepel a nagyobb gráf belsejében, amely divergens. Ehhez azonban tartozik egy olyan ellentag-rész, amely ugyanígy n-pont függvényhez ad járulékot vezető rendben, és amely végesíti a divergens n-pont függvények összegét. Emiatt ha az összes gráfot összeszedjük az adott rendben, akkor a divergens algráfokhoz mindig tartozik egy ellentag-járulék, végül végesítve az aldivergenciákat. Ennek következményeképpen az aldivergenciák a korábbi ellentag-grafokkal együtt *automatikusan* véges eredményt adnak.

Emiatt végülis egy adott rendben felírt diagram a korábbi ellentagokkal együtt már csak overall divergenciákat tartalmaz, így visszajutottunk a korábban tárgyalt esethez.

5.3 Perturbációs sémák viszonya

Szilárdtestfizikai számításoknál elterjedt folklór, hogy van egy kitüntetett regularizáció (a kristályrács), ezzel számolva van egy kitüntetett perturbációszámítás is, ahol a csatolásokat a mikroszkopikus megfigyelhető mennyiségekből származtatjuk. Implicite azonban itt is megtalálható a fenti renormálási gondolatmenet: egyrészt a rács is tartalmaz rácshibákat, különböző beállású domaineket, vagyis a regularizáció itt sem eleve adott, szükség van arra, hogy a mikroszkopikus részletektől független legyen a makroszkopikus fizika. Másrészt különböző mérési utasítással rögzítve a paramétereket valójában itt is különböző renormálási előírásokat használunk. Ha azonban nem rögzített sem a regularizáció, sem a séma (előírás), akkor érdemes megvizsgálni ezek viszonyát.

Valójában a fizikát a teljes Lagrange függvény tartalmazza, vagyis, átskálázott tereket használva (371). Ebben a formában szereplő paraméterek, Z, m_b^2 és λ_b minden regularizálás mellett egyértelmű függvényei három kiválasztott fizikai paraméternek. Legyenek most ezek a paraméterek M, λ_0 és ζ_0, a részecske tömege, dimenziótlanított szórási hatáskeresztmetszete valamely négyesimpulzus mellett, valamint a spektrál függvény normája (ami lehet 1). A levágás legyen Λ (lehetne helyette rácsállandót is gondolni $\Lambda \sim 1/a$). Vagyis

$$Z(M, \lambda_0, \zeta_0; \Lambda), \quad m_b^2(M, \lambda_0, \zeta_0; \Lambda), \quad \lambda_b(M, \lambda_0, \zeta_0; \Lambda). \tag{384}$$

Mivel a világ kontinuum elmélet (?), ezért ha tökéletes Lagrange-függvényt használunk, akkor a levágás értékének végtelenbe vitelekor *minden* megfigyelhető mennyiséget korrektül írunk le, vagyis (legalábbis ebben a limeszben) a renormálási sémától független a bare Lagrange-függvény. Ami azt jelenti, hogy M, λ_0 és ζ_0 helyett választhatnánk más mennyiségeket is a paraméterek rögzítésére. A megfigyelhető mennyiségek értéke ebben a limeszben független a levágástól (hiszen el lehet távolítani azt). A regularizálás maradványa azonban egy extra fizikai skála kialakulása (pl. tiszta QCD-ben a Sommer-skála).

Perutbációszámításban a (384) függvényt sor alakjában írjuk fel. A kifejtési paraméter λ_{ren} lehet közvetlenül valamelyik fizikai megfigyelhető mennyiség (pl. dimenziótlan szórási hatáskeresztmetszet), de lehet valamilyen

ezektől függő absztrakt kifejtési függvény – ezek adják a különböző sémákat. Legyen egy adott sémában a csupasz csatolás kifejtése

$$\lambda_b = \lambda + \lambda^2 \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d_1 \right) + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{385}$$

Ez végesíteni fogja a megfigyelhető mennyiségeket. Az $\mathcal{O}(\lambda^2)$ tag a következő rend eredményét jelenti. Egy másik sémában számolva azonban más eredményt kapunk:

$$\lambda_b = \lambda' + \lambda'^2 \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d_1' \right) + \mathcal{O}(\lambda'^2). \tag{386}$$

Miután a fizika a csupasz csatolási állandóban van, nem a renormált perturbációszámításban, ezért akkor kapjuk ugyanazokat az értékeket a megfigyelhető mennyiségekre, ha λ_b ugyanaz a számolt rendig:

$$\lambda' = \lambda + \lambda^2 (d_1 - d_1') + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{387}$$

Figyeljül meg azonban, hogy az egyezés csak $\mathcal{O}(\lambda^2)$-is igaz. Még látszólag új divergenciák is megjelennek, hiszen beírva a fenti kifejezést λ_b második alakjába:

$$\lambda_b = \lambda + \lambda^2 \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d_1 \right) + 2\lambda^3 (d_1 - d_1') \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d_1' \right) + \lambda^4 (d_1 - d_1')^2 \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d_1' \right). \tag{388}$$

Ezek a magasabb rendű divergenciák a magasabb rendű számításokkal természetesen eltűnnek. Mindenesetre ez azt is jelenti, hogy a magasabb rendű divergenciákban az $1/\varepsilon$-nal arányos rész sémafüggő, és csak az adott perturbatív rendig kapunk sémafüggetlen eredményt.

Általánosan a fenti gondolatmenet azt jelenti, hogy két séma egymással összekapcsolható olyan módon, hogy az egyik renormált paramétereit a másik renormált paramétereinek segítségével kifejezzük:

$$\lambda'(m^2, \lambda, \zeta), \qquad m'^2(m^2, \lambda, \zeta), \qquad \zeta'(m^2, \lambda, \zeta). \tag{389}$$

Végtelen rendben számolva ekkor a csupasz paraméterek ugyanazok lesznek, vagyis minden megfigyelhető mennyiség változatlan marad. A korrelációs függvények a különböző tér-normálások miatt arányosak lesznek

$$\zeta^n G_n(k; \lambda, m^2) = \zeta'^n G_n'(k; \lambda', m'^2). \tag{390}$$

Véges rendig számolva azonban nem várhatunk pontos egyezést. Akár a csupasz paraméterek (ahogyan fent is láttuk), akár valamely fizikai mennyiség értékében különbségek lesznek. Ez utóbbihoz vegyük valamely tetszőleges fizikai megfigyelhető mennyiség kiszámításában az N-ed rendet. Az első sémában

$$\mathcal{M} = \sum_{n=0}^{N} \lambda^n \mathcal{M}_n. \tag{391}$$

Ide beírva a λ' kifejezését, egy olyan sort kapunk, amely még λ'^{N^2} hatványt is tartalmazni fog. Másrészt közvetlenül a vesszős sémából számolva csak az első N hatványt kapjuk meg. Általában igaz, hogy a különböző sémákból számolt mennyiségek csak az adott rendig fognak megegyezni.

A sémaváltás tehát megfelel egy változócserének, azaz a perturtbatív sor átrendezésének (resummation). Ezzel a trükkel elérhetjük, hogy mindig azt a perturbációszámítást használjuk, amelyik a legalkalmasabb az adott mennyiség kiszámítására, és a fizika fixen tartása segítségével a különböző sémákat egymással kapcsolatba hozhatjuk. Ez a legáltalánosabban vett renormálási csoport gondolat, s ilyen módon az összes lehetséges újraösszegzést meg tudjuk valósítani anélkül, hogy az UV divergenciák kezelését elrontanánk.

5.4 Skálaváltás nulla hőmérsékleten

A felösszegzések egyik legismertebb változata, ha a μ skálát olyannak választjuk meg, hogy mindig eltűnjenek a logaritmikus korrekciók. Ez, másként értelmezve azt is jelenti, hogy felösszegezzük a logaritmikus korrekciókat. Mivel a $\log \mu$ jellegű tagok az UV divergenciákból jönnek, és ezek hőmérséklet-függetlenek, a logaritmusok felösszegzése nulla hőmérsékleten is megvalósítható.

Tekintsünk tehát két sémát, melyekben a skálát μ-nek illetve μ'-nek választjuk, de csak ennyiben különbözzenek a véges ellentagok. Mindkét sémában elvégezzük a renormált mennyiségek kiszámítását, és a renormált paramétereket meghatározzuk a renormálási séma alapján. Ha végtelen rendig számolunk, akkor valójában minden megfigyelhető mennyiség ugyanazt az értéket fogja adni a két sémában.

Mivel azonban mások a véges ellentagok, a két sémából más lesz a renormált mennyiségek értéke, azaz a renormált mennyiségek függenek a skálától: $g_{ren}(\mu)$. Hogy ezt a függést meghatározzuk, többféle utat is követhetnénk, a lényeg, hogy azt kell megkövetelnünk, hogy a két elmélet ugyanazt a fizikát írja le.

Például kihasználhatom azt, hogy minden megfigyelhető mennyiség ugyanazt ez eredményt adja, vagyis a korrelációs függvények arányosak. (390) egyenletből írhatjuk (elhagyva a *ren* indexet)

$$\zeta^n(\mu')G^{(n)}(k_1,\ldots,k_n;m^2(\mu'),g(\mu'),\mu') = \zeta^n(\mu)G^{(n)}(k_1,\ldots,k_n;m^2(\mu),g(\mu),\mu). \tag{392}$$

Ezt az egyenletet deriválhatjuk $\ln\mu$ szerint. Mivel a bal oldal nem függ μ-től

$$\left(n\frac{1}{\zeta}\frac{d\zeta}{d\ln\mu} + \frac{dm^2}{d\ln\mu}\frac{\partial}{\partial m^2} + \frac{dg}{d\ln\mu}\frac{\partial}{\partial g} + \frac{\partial}{\partial\ln\mu}\right)G^{(n)} = 0. \tag{393}$$

Három kiszámolt Green-fügvényből meghatározhatjuk a fenti deriváltakat. Szokásos jelölés

$$\beta = \frac{dg}{d\ln\mu}, \qquad \gamma_m = \frac{d\ln m^2}{d\ln\mu}. \tag{394}$$

A Φ^4 modellre egy hurok szinten azt kapjuk, hogy $\zeta = 1$ (mert nincs hullámfüggvény-korrekció ebben a rendben). $T = 0$-n az $\overline{\text{MS}}$ sémában:

$$\Sigma = m^2 - \frac{\lambda m^2}{16\pi^2}\ln\frac{\mu}{m}, \qquad \Gamma^{(4)}(k_i = 0) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\ln\frac{\mu}{m}. \tag{395}$$

Figyelembe véve, hogy $dm^2/d\ln\mu \sim \mathcal{O}(\lambda)$ és $d\lambda/d\ln\mu \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$, a sajátenergiából adódó egyenlet $\mathcal{O}(\lambda)$ rendig:

$$\frac{dm^2}{d\ln\mu}\frac{\partial\Sigma_0}{\partial m^2} + \frac{d\lambda}{d\ln\mu}\frac{\partial\Sigma_0}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Sigma_0}{\partial\ln\mu} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dm^2}{d\ln\mu} = m^2\gamma_m = \frac{\lambda m^2}{16\pi^2} \tag{396}$$

Hasonlóképpen $\mathcal{O}(\lambda^3)$ rendig

$$\frac{dm^2}{d\ln\mu}\frac{\partial\Gamma^{(4)}}{\partial m^2} + \frac{d\lambda}{d\ln\mu}\frac{\partial\Gamma^{(4)}}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Gamma^{(4)}}{\partial\ln\mu} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d\lambda}{d\ln\mu} = \beta = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}. \tag{397}$$

Az egyenleteket meg is lehet oldani

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - \dfrac{3\lambda(\mu_0)}{16\pi^2}\ln\dfrac{\mu}{\mu_0}}, \qquad m^2(\mu) = \frac{m_0^2(\mu)}{\left(1 - \dfrac{3\lambda_0}{16\pi^2}\ln\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/3}} \tag{398}$$

A fenti egyenletet át lehet írni:

$$\lambda(\mu) = \frac{1}{\beta_0\ln\dfrac{\Lambda_0}{\mu}}, \qquad \text{ahol} \qquad \beta_0 = \frac{3}{16\pi^2}, \qquad \Lambda_0 = \mu_0 e^{1/(\beta_0\lambda_0)}. \tag{399}$$

Megjegyzések:

- Ez a formula azt mutatja, hogy valójában a "csatolási állandó" függ a skálától, így nem tekinthető állandónak. Ami valóban állandó, az a Λ_0 mennyiség (ez skálaváltásra invariáns, vagyis renormálási csoport invariáns). Ez azonban már dimenziós mennyiség. Vagyis egy dimenziós csatolási állandó helyett egy dimenziós mennyiségünk keletkezett: az a *dimenziós transzmutáció*.

- A fenti kifejezésnek csak $\mu < \Lambda_0$-ra van értelme, hiszen csak akkor pozitív. $\mu = \Lambda_0$-nál a kifejezés felrobban. Ez a Landau-pólus.

- Ha azt szeretnénk, hogy a kifejezéseink értelmesek legyenek $\mu \to \infty$ esetben is, akkor a fenti kefejezésben $\Lambda_0 \to \infty$ kell, vagyis ekkor minden véges skálán $\lambda(\mu) = 0$. Ez a trivialitás.
- Ha a formuláinkat $\mu = \Lambda_0/n$-ig hisszük el, akkor a maximális csatolási állandó $\lambda_{max} = 16\pi^2/(3\ln n)$.
- A skálát úgy érdemes választani, hogy a logaritmikus divergenciák eltűnjenek. Vagyis ha $m^2 = 0$, akkor $\mu = |K|$ jó választás; ha emellett $k_0 = 0$, akkor $\mu = k$, ami a karakterisztikus távolság inverze. Emiatt valójában távolságfüggő módon kell változtatnunk a csatolási állandót a legjobb konvergencia érdekében:

$$\lambda(r) = \frac{1}{\beta_0 \ln(r\Lambda_0)}. \tag{400}$$

Így értelmezzük a *futó csatolási állandót.*

Mindez azonban csak interpretáció. Valójában a fizikai mennyiségeket kell kiszámítani, azok adják meg a valódi választ. A szórási hatáskeresztetszetre például a logaritmikus korrekciók figyelembe vételével az adódik, hogy

$$\sigma = \frac{\lambda^2(Q)}{64\pi^2 s}, \tag{401}$$

ahol Q az átadott impulzus. Ilyen értelemben a futó csatolási állandó fizikai értelmet nyer.

5.5 Hőmérsékletfüggő tömeg és csatolás

Magas hőmérsékleten a tömeg négyzethez kapunk egy relatív $\sim \lambda T^2/m^2$ véges hőmérsékletű korrekciót, a csatolási állandóhoz egy relatív $\sim \lambda T/m$ korrekciót. Ezek magas hőmérsékleten meghaldhatják 1-et, ami azt jelenti, hogy a perturbatív sor konvergenciája elromlik.

De egy javított perturbációszámítással itt is eredményt érhetünk el. A sajátenergia kifejezésével felírva az effektív hatás kvadratikus részét nulla impulzusnál (cf. (272))

$$\Gamma^{(2)}(0) = m^2 + \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln\frac{m_{ren}^2}{4\pi\mu^2}\right) + \frac{\lambda}{2}\mathcal{T}(T,m) + \delta m_1^2, \tag{402}$$

itt választhatjuk

$$\delta m_1^2 = -\frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln\frac{m_{ren}^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{\lambda}{2}\mathcal{T}(T,m). \tag{403}$$

Hasonlóképpen a renormált $\Gamma^{(4)}$ nulla impulzusnál (cf. (376))

$$\Gamma^{(4)}(0) = \lambda + \delta\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\right] + \frac{3\lambda^2}{2}\mathcal{I}_{fin}(0), \tag{404}$$

ahol választható

$$\delta\lambda = -\frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\right] - \frac{3\lambda^2}{2}\mathcal{I}_{fin}(0). \tag{405}$$

Ez a séma kiválóan alkalmas a T hőmérsékleten való számítások elvégzésére. Meg kell azonban határoznunk a renormált paramétereket, ezt pedig nulla hőmérsékletű számításokkal szokás rögzíteni.

Tegyük fel, hogy nulla hőmérsékleten az $\overline{\text{MS}}$ sémában megbízhatóan ki tudjuk számítani a megfigyelhető mennyiségeket, és ismerjük a Lagrange-függvénybeli paraméterek értékét. A legcélszerűbb tehát a fenti OM sémának ehhez az $\overline{\text{MS}}$ sémához való viszonyát meghatározni. Ebben a sémában

$$\begin{aligned}
\delta m_{\overline{\text{MS}}}^2 &= -\frac{\lambda_{\overline{\text{MS}}} m_{\overline{\text{MS}}}^2}{32\pi^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln\frac{m_{\overline{\text{MS}}}^2}{4\pi\mu^2}\right), \\
\delta\lambda_{\overline{\text{MS}}} &= -\frac{3\lambda_{\overline{\text{MS}}}^2}{32\pi^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\right].
\end{aligned} \tag{406}$$

A két séma paraméterei viszonyának meghatározásához most használjuk azt a feltételt, hogy a csupasz Lagrange függvény ugyanaz legyen (hiszen ez írja le a fizikát, nem a renormált Lagrange-függvény). Azaz

$$m^2 + \delta m^2 = m^2_{\overline{\mathrm{MS}}} + \delta m^2_{\overline{\mathrm{MS}}}, \qquad \lambda + \delta\lambda = \lambda_{\overline{\mathrm{MS}}} + \delta\lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}. \tag{407}$$

Ahogy a korábbi analízisekből láthattuk, ezek az egyenletek csak a megfelelő csatolási állandó rendig elégíthetők ki, a magasabb rendek konzisztenciájáért a magasabb hurkok felelősek. Az első egyenletben ezért az $\mathcal{O}(\lambda^2)$ rendet már elhagyjuk. Mivel $m^2 = m^2_{\overline{\mathrm{MS}}} + \mathcal{O}(\lambda)$, ezért $\lambda m^2 = \lambda_{\overline{\mathrm{MS}}} m^2_{\overline{\mathrm{MS}}} + \mathcal{O}(\lambda^2)$, vagyis ebben a rendben megegyeznek. Emiatt

$$m^2 - \frac{\lambda}{2}\mathcal{T}(T,m) = m^2_{\overline{\mathrm{MS}}}. \tag{408}$$

A csatolási állandó egyenletében ugyenzt mondhatjuk. Ezen felül az utolsó tag együtthatóját írhatjuk $\lambda^2 = \lambda\lambda_{\overline{\mathrm{MS}}} + \mathcal{O}(\lambda^3)$ alakban. Ekkor

$$\lambda - \frac{3}{2}\lambda\lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}\mathcal{I}(T,m) = \lambda_{\overline{\mathrm{MS}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}} = -\frac{3}{2}\mathcal{I}(T,m). \tag{409}$$

Ha a hőmérséklet jóval nagyobb, mint a tömeg, akkor használhatjuk a magas hőmérsékletű kifejtést:

$$\begin{aligned} m^2 &= m^2_{\overline{\mathrm{MS}}} + \frac{\lambda T^2}{24} - \frac{\lambda T m}{8\pi} + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\ln\frac{ec^2T^2}{\mu^2} \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}} &= \frac{3T}{16\pi m} - \frac{3}{32\pi^2}\ln\left(\frac{cT}{\mu}\right)^2, \end{aligned} \tag{410}$$

ahol $c = 4\pi e^{-\gamma_E} \approx 7.06$. A fenti egyenletből látható, hogy érdemes a skálát $\mu_T = cT \approx 7T$-re választani, ekkor a logaritmikus tagok elhagyhatók. Az $\overline{\mathrm{MS}}$ sémában már láttuk, hogyan kell skálát váltani, ezért írhatjuk

$$\begin{aligned} m^2 &= m^2_{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu_T) + \frac{\lambda T^2}{24} - \frac{\lambda T m}{8\pi} \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu_T)} &= \frac{3T}{16\pi m}. \end{aligned} \tag{411}$$

Ha a T/m korrekciókat elhagyjuk, akkor

$$\lambda = \lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu_T), \qquad m^2 = m^2_{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu_T) + \frac{\lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu_T)T^2}{24} \tag{412}$$

kifejezéshez jutunk. Ez a "daisy" (százszorszép) felösszegzés, ami diagrammatikusan az iterált tadpole felösszegzést jelenti. A futás itt a 4 dimenziós, azaz nulla hőmérsékletű futásnak felel meg.

Magas hőmérsékleten, pontosabban ha $T \gg m$, akkor más aszimptotikát kapunk. A csatolási állandó kifejezésében a jobb oldal nagy lesz, vagyis

$$\lambda \approx \frac{16\pi m}{3T}. \tag{413}$$

A tömeg egyenletébe visszaírva, és figyelembe véve, hogy még magasabb hurok rendekben a csatolási állandónak lehet egy fix pontja (λ_*), kapjuk

$$m = \frac{8\pi}{\lambda_* T}\left(m^2_{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu_T) + \frac{\lambda_* T^2}{24}\right). \tag{414}$$

Spontán sértett elméletekben $m^2_{\overline{\mathrm{MS}}} < 0 \equiv -\frac{\lambda_* T_c^2}{24}$. Ezzel azt kapjuk, hogy

$$m \sim (T - T_c). \tag{415}$$

A valódi fizikai tömeg a korrelációs hossz inverze, azaz $\xi \sim 1/m \sim (T-T_c)^{-1} = (T-T_c)^{-\nu}$. A csatolási állandóra pedig $\lambda - \lambda_* \sim T - T_c \sim (T - T_c)^{\kappa}$. A ν és κ kritikus exponensek értéke a jelen számolásból $\nu = \kappa = 1$, ami az $N = \infty$ $O(N)$ modell kritikus exponenseinek felel meg. A daisy közelítésben $\nu = 1/2$, ami az átlagtérelmélet eredménye.

5.6 2PI felösszegzés

Eddig impulzusfüggetlenül végeztük a felösszegzést, amivel nem változtattuk meg a renormált Lagrange függvény funkcionális alakját a csupasz Lagrange függvényhez képest. Ez azonban nem szükségszerű, elképzelhető olyan renormálási séma is, amelyben a funkcionális alak is megváltozik. Ekkor elképzelhető, hogy az ellentagba beolvasztjuk a teljes sajátenergiás korrekciót, vagyis egyáltalán nem lesz sajátenergia. Ekkor a fa gráf szintű propagátor az egzakt propagátor lesz.

Ez a gondolat áll a hátterében a 2-részecske irreducibilis (2PI) felösszegzésnek. Formálisan ezt J. M. Cornwall,R. Jackiw és E. Toumbolis, Phys. Rev. D10, 2428 (1974) vezette be először a részecskefizikában. Új eredményeket l. J. Berges and J. Cox, Phys. Lett. B 517 (2001) 369; A. Arrizabalaga, J. Smit and A. Tranberg, Phys. Rev. D 72 (2005) 025014; G. Aarts and J. Berges, Phys. Rev. D 64 (2001) 105010; J. Berges, Nucl. Phys. A 699 (2002) 847;G. Aarts and J. Berges, Phys. Rev. Lett. 88, 041603 (2002); A. Arrizabalaga, J. Smit and A. Tranberg, JHEP 0410 (2004) 017 cikkekben.

A 2PI formalizmusban a generátor funkcionált nemcsak az áramok, hanem az általánosított kernel szerint is vesszük:

$$Z[j,K] = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS(\varphi)+ij\varphi+\frac{i}{2}\varphi K\varphi}. \tag{416}$$

Az összefüggő diagramok generátora W a szokásos módon képezhető

$$Z[j,K] = e^{iW[j,K]}. \tag{417}$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi_x\rangle|_{j,K} = \frac{\partial W}{\partial j_x} = \Phi_x, \\
&\frac{1}{2}\langle \mathrm{T}\varphi_x\varphi_y\rangle|_{j,K} = \frac{1}{2}\left(\langle\varphi_x\rangle\langle\varphi_y\rangle + \langle \mathrm{T}\varphi_x\varphi_y\rangle_c\right) = \frac{\partial W}{\partial K_{xy}} = \frac{1}{2}\left(\Phi_x\Phi_y + iG_{xy}\right).
\end{aligned} \tag{418}$$

Ezután Legendre transzformációt hajtunk végre, de nemcsak j, hanem K szerint is:

$$\Gamma[\Phi,G] = W - j_x\frac{\partial W}{\partial j_x} - K_{xy}\frac{\partial W}{\partial K_{xy}} = W - j_x\Phi_x - \frac{1}{2}K_{xy}\left(\Phi_x\Phi_y + iG_{xy}\right). \tag{419}$$

Innen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Gamma}{\partial\Phi} &= \frac{\partial W}{\partial\Phi} - \frac{\partial j}{\partial\Phi}\Phi - j - \frac{\partial K}{\partial\Phi}\frac{\partial W}{\partial K} - K\Phi, \\
\frac{\partial\Gamma}{\partial iG} &= \frac{\partial W}{\partial iG} - \frac{\partial j}{\partial iG}\Phi - \frac{\partial K}{\partial iG}\frac{\partial W}{\partial K} - \frac{1}{2}K.
\end{aligned} \tag{420}$$

Mivel

$$dW = \frac{\partial W}{\partial j}\left(\frac{\partial j}{\partial\Phi}d\Phi + \frac{\partial j}{\partial iG}d\,iG\right) + \frac{\partial W}{\partial K}\left(\frac{\partial K}{\partial\Phi}d\Phi + \frac{\partial K}{\partial iG}d\,iG\right), \tag{421}$$

a következő alak marad

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\Phi} = -j - K\Phi, \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial iG} = -\frac{1}{2}K. \tag{422}$$

A fizikai pontban $j = K = 0$, azaz $\Gamma_\Phi = 0$ és Γ_G=0.

Hasonlóan, ahogyan a 1PI diagramok generátoránál láttuk, most is adjunk PI reprezentációt a $\Gamma[\Phi,G]$ generátorra

$$e^{i\Gamma[\Phi,G]} = e^{iW[j]-ij\Phi-\frac{i}{2}K(\Phi\Phi+iG)} = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]+ij(\varphi-\Phi)+\frac{i}{2}\varphi K\varphi-\frac{i}{2}K(\Phi\Phi+iG)}. \tag{423}$$

Az 1-pont függvény alakja

$$e^{i\Gamma}\langle\varphi_x\rangle_{\Phi,G} = e^{-ij\Phi-\frac{i}{2}K(\Phi\Phi+iG)}\int \mathcal{D}\varphi\,\varphi_x\, e^{iS+ij\varphi+\frac{i}{2}\varphi K\varphi} = e^{-ij\Phi-\frac{i}{2}K(\Phi\Phi+iG)}\frac{\partial}{\partial ij_x}e^{iW} \qquad \Rightarrow \qquad \langle\varphi_x\rangle_{\Phi,G} = \Phi_x. \tag{424}$$

Ez azt jelenti, hogy egy vonallal összekötött aldiagram Φ_x-szel helyettesítendő, vagyis csak 1PI diagramok maradnak. Hasonlóan

$$e^{i\Gamma}\left(\langle\varphi_x\varphi_y\rangle - \langle\varphi_x\rangle\langle\varphi_y\rangle\right) = e^{-ij\Phi-\frac{i}{2}K(\Phi\Phi+iG)}\int\mathcal{D}\varphi\,\varphi_x\varphi_y\,e^{iS+ij\varphi+\frac{i}{2}\varphi K\varphi} - \Phi_x\Phi_y e^{i\Gamma} =$$
$$= -2ie^{-ij\Phi-\frac{i}{2}K(\Phi\Phi+iG)}\frac{\partial}{\partial K_{xy}}e^{iW} - \Phi_x\Phi_y e^{i\Gamma} \qquad \Rightarrow \qquad \langle\varphi_x\varphi_y\rangle_{conn,\Phi,G} = iG_{xy}, \tag{425}$$

azaz 2 vonallal bekötött aldiagramot G-vel kell helyettesíteni. Emiatt a G-vel kifejezett elméletben nem lehetnek olyan aldiagramok, amelyek két vonallal vannak a maradékhoz kötve. Más szóval ha két vonalat elvágunk, akkor még mindig összefüggő diagramhoz jutunk. Ezeket a diagramokat nevezzük 2PI diagramoknak. A két vonallal a maradék részhez kötött diagramok más szóval a (Φ háttértől függő) sajátenergiás korrekciók. Emiatt a 2PI diagramok azok, ahol nincsenek sajátenergiás diagramok – hiszen pontosan ezeket összegeztük fel akkor, amikor az egzakt propagátort használjuk.

Az 1PI generátort úgy kapjuk meg a 2PI generátorból, hogy inverz Legendre transzformációt csinálunk a K kernel szerint

$$\Gamma[\Phi,G] = \Gamma[\Phi,K] - \frac{1}{2}K_{xy}\left(\Phi_x\Phi_y + iG_{xy}\right), \qquad \frac{\partial\Gamma[\Phi,G]}{\partial G} = -\frac{i}{2}K. \tag{426}$$

Az 1PI generátort $K=0$-nál kapjuk:

$$\Gamma[\Phi] = \Gamma[\Phi,G]|_{\frac{\partial\Gamma}{\partial G}=0}. \tag{427}$$

Perturbációszámításban kiemelhetjük explicite az első néhány tagot. Bozonikus esetben:

$$\Gamma[\Phi,G] = S[\Phi] - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln G + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}G_0^{-1}G + \Gamma_{int}[\Phi,G], \tag{428}$$

itt G_0 a szabad propagátor, valamint $\Gamma_{int}[\Phi,G]$ a $\Gamma[\Phi,G]$ azon része, amely legalább egy vertexet tartalmaz. A fenti kifejezésben a $\partial\Gamma/\partial G = 0$ egyenlet megoldását kell behelyettesíteni G-re. A fenti egyenlet igazolásához a kölcsönhatásmentes esetet nézzük, ahol $G^{-1} = G_0^{-1}$ és $\Gamma[\Phi] = S[\Phi] - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln G_0$. A fenti alakból

$$\Gamma_0[\Phi,G] = S[\Phi] - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln G + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}G_0^{-1}G \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\Gamma_0[\Phi,G]}{\partial G_{ij}} = -\frac{1}{2}G^{-1}_{ji} + \frac{1}{2}G^{-1}_{0ji} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \Gamma_0[\Phi] = \Gamma_0[\Phi,G]|_{\frac{\partial\Gamma}{\partial G}=0} = S[\Phi] - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln G_0 + \text{const.}. \tag{429}$$

A kölcsönhatások Γ_{int}-ben vannak. A propagátor egyenlete kölcsönható esetben:

$$G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma[G], \qquad \text{ahol} \qquad \frac{\partial\Gamma_{int}[\Phi,G]}{\partial G_{ji}} = -\frac{1}{2}\Sigma[G]_{ij}. \tag{430}$$

Vagyis perturbatíve úgy kell eljárni, hogy vesszük a sajátenergia propagátorokkal felírt kifejezését, és azt általános propagátorokkal értelmezve megoldjuk a fenti egyenletet.

A fenti egyenletekből a formális számítások világosak, azonban nem világos az, hogy ezzel az átalakítással renormálható elméletet kapunk. Az irodalomban számos technika létezik a renormálás elvégzésére, most egy, a renormálási csoportra alapuló technikát mutatok be.

Ennek lényege az a megfigyelés, hogy a 2PI diagramoknál nincsen sajátenergiás korrekció. Az inverz propagátor kifejtésénél

$$\Gamma_2(k) = k^2 - m^2 - \delta m^2 - \Sigma_{diagram}(k) \tag{431}$$

már láttuk, hogyan lehet a radiatív korekciókat tömeghéjon eltüntetni az ellentag véges részének megfelelő választásával: $\delta m^2 = -\Sigma_{diagram}(k_0 = m, \mathbf{k} = 0)$. Ekkor $\Gamma_2(k^2 = m^2) = 0$, vagyis a fent szereplő m az egzakt tömeg.

Ezt a gondolatot tovább folytatva megpróbálhatjuk az ellentagot *impulzusfüggő* módon megválasztani, és ezzel elérni azt, hogy egyáltalán ne legyen radiatív korrekció. Vagyis formálisan $\delta m^2(k) = -\Sigma_{diagram}(k)$. Hogy ezt konzisztensen csináljuk több problémát is meg kell oldanunk

- az állandó fizika, vagyis a csupasz Lagrange függvény konstansnak tartása

- a diagramok divergens részének vizsgálata
- a szabad paraméterek rögzítése.

A fentiek megoldását korábban pontosan a renormálási séma választása jelentette. Most általánosítsuk tehát a renormálási sémát impulzusfüggő véges tagok esetére. Ehhez induljunk ki ismét a Φ^4 elmélet csupasz Lagrange függvényéből.

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{2}(\partial\Phi)^2 - \frac{m_0^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda_0}{24}\Phi^4. \tag{432}$$

Most a renormált-ellentag szétválasztást impulzusfüggő módon végezzük el:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi\, K(i\partial)\Phi - \frac{\lambda}{24}\Phi^4 + \frac{1}{2}\Phi\, \delta K(i\partial)\Phi - \frac{\delta\lambda}{24}\Phi^4, \tag{433}$$

ami a fenti (432) egyenlettel konzisztens, ha

$$Zk^2 - m_0^2 = K(k) + \delta K(k), \qquad \lambda_0 = \lambda_R + \delta\lambda. \tag{434}$$

Láthatóan csak a kernel és az ellentag összege fixált, vagyis pl. szabadon megválaszthatom az ellentagot, ekkor a kernelt a fenti egyenletből kell számolnom. Ebben az egyenletben azonban még Z és m_0^2 sem rögzített, azt a számítás folyamán kell meghatározni.

A fenti Lagrange függvényben a szabad illetve kölcsönható tag szétválasztása

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\Phi\, K\Phi, \qquad \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda_R}{24}\Phi^4 + \frac{1}{2}\Phi\, \delta K\Phi - \frac{\delta\lambda}{24}\Phi^4 \tag{435}$$

módon történik, a perturbációszámításban $\int \mathcal{L}_I$ szrinti kifejtést végzünk, mint eddig is. Ebből Feynman diagramokat fogunk számolni, ahol a propagátorokat a K kernelből származtatjuk az álatalános esetnek megfelelően. Az ellentag végtelen részét úgy kell megválasztani, hogy a Feynman digramok végesek legyenek – vagyis δK-ban divergenciák kell, hogy fellépjenek. Ez csak akkor konzisztens (434) egyenlettel, ha a divergenciák k-ban polinomiálisak, vagyis ugyanolyan alakúak, mint a szabad elméletben.

Hogy egy általános propagátor esetén is ugyanazok a divergenciák lépnek fel a Feynman diagramokban, az a (383) egyenletből látszik. Minden olyan propagátor, amelyre $G(p+k)$, $p \to \infty$ esetén polinomiális k-ban, teljesíti azt a feltételt, hogy a külső impulzus szerinti deriválás csökkenti a diagram divergencia fokát, ami oda vezetett, hogy a diagram divergenciái polinomiálisak k-ban.

Hasonlóképpen az ellentagokkal eltüntetendő divergenciák mind overall divergenciák, s ebben, még általános propagátor esetén is, a hőmérsékletfüggő tagok nem adnak járulékot. Általános propagátornál a KMS reláció biztosítja, hogy a hőmérsékletfüggés a Bose-Einstein illetve Fermi-Dirac eloszlás formájában jelentkezzék.

Ilyen általános kernel választással felírhatjuk az effektív hatást is. Ennek kvadratikus része

$$\Gamma_2(k) = K(k) - \Sigma_{diagram}(G,k) + \delta K(k), \tag{436}$$

ahol most expliciten jeleztük, hogy a diagramok kiszámításánál a G propagátort kell használni, amely a K kernelből következik. A sajátenergia divergenciái, ahogy láttuk, még általános kernel, illetve propagátor választása mellett is $\Sigma_{2div}k^2 + \Sigma_{0div}$ alakú. Hogy a fenti alak véges legyen,

$$\delta K(k) = \Sigma_{2div}k^2 + \Sigma_{0div} + \delta K_{fin}(k) \tag{437}$$

módon kell választani az ellentagot, ahol a véges rész tetszőleges, de ki kell elégítenie az állandó fizika (434) feltételét:

$$Zk^2 - m_0^2 = K(k) + \delta K_{fin}(k) + \Sigma_{2div}k^2 + \Sigma_{0div} \quad \Rightarrow \quad Z = 1 + \Sigma_{2div}, \quad m_0^2 = m^2 - \Sigma_{0div}, \tag{438}$$

ahol m^2 már véges érték. Emiatt a véges részekre érvényes egyenlet

$$k^2 - m^2 = K(k) + \delta K_{fin}(k), \tag{439}$$

és az effektív hatás kvadratikus része is véges

$$\Gamma_2(k) = K(k) - \Sigma^{fin}_{diagram}(G,k) + \delta K_{fin}(k). \tag{440}$$

Ezek után a 2PI felösszegzéshez szükséges választást konzisztensen meg tudjuk tenni:

$$\delta K_{fin}(k) = \Sigma^{fin}_{diagram}(G,k), \tag{441}$$

ekkor

$$\Gamma_2(k) = K(k), \qquad K(k) = k^2 - m^2 - \Sigma^{fin}_{diagram}(G,k). \tag{442}$$

Ez utóbbi egyenlet pontosan megfelel (430) egyenletnek, csak most renormált formában. A perturbációszámításban is jól érthető, hogy minden sajátenergiás diagram mellett megjelenik δK ellentag is, amely pontosan kiöli azt, vagyis végeredményben a sajátenergiás betétet tartalmazó gráfok eltűnnek a rendszerből. Maradnak a 2PI diagramok, ahogyan azt korábban is láttuk.

Mindez azt jelenti, hogy a 2PI felösszegzés is egy speciális sámának tekinthető. A séma teljes rögzítéséhez használhatunk itt is renormálási feltételeket, ezek fogják m^2 illetve a véges λ értékét megadni egy adott fizikai helyzetben.

5.7 2PI egyenletek nemegyensúlyi esetben

A fenti gondolatmenetet alkalmazhatjuk nemegyensúly helyzetben is, hiszen a levezetés során sehol nem használtuk ki azt, hogy egyensúlyban lennénk. A sajátenergiás egyenletet ekkor érdemes a (244) alakban írni, ahol most minden mennyiség véges (renormált), és a sajátenergia a propagátortól függ.

Nemegyensúlyi helyzetben azonban nincsen téridő-eltolási szimmetria, ezért minden propagátor két impulzustól függ. Az R/A formalizmusban a következő egyenleteket lehet felírni:

$$\begin{aligned} G_{ab}(x,y) &= G^{(0)}_{ab}(x-z) + G^{(0)}_{ac}(x-z)\Sigma_{cd}(z,w)G_{db}(w,y), \\ G_{ab}(x,y) &= G^{(0)}_{ab}(x-z) + G_{ac}(x,z)\Sigma_{cd}(z,w)G^{(0)}_{db}(w-y), \end{aligned} \tag{443}$$

ahol a,b,c,d indexek r vagy a lehetnek, és az ismétlődő indexek/koordináták összegzést jelentenek. A szabad propagátor inverzével:

$$K_0(i\partial_x)G^{(0)}_{ab}(x) = \varepsilon_{ab}\delta(x), \tag{444}$$

ahol a Φ^4 elméletben $K_0(k) = k^2 - m^2$ és $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{aa} = 0$, valamint $\varepsilon_{ar} = \varepsilon_{ra} = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} K_0(i\partial_x)G_{ab}(x,y) &= \varepsilon_{ab}\delta(x-y) + \varepsilon_{ac}\Sigma_{cd}(x,z)G_{db}(z,y), \\ K_0(i\partial_y)G_{ab}(x,y) &= \varepsilon_{ab}\delta(x-y) + G_{ac}(x,z)\Sigma_{cd}(z,y)\varepsilon_{db}. \end{aligned} \tag{445}$$

Először nézzük meg stacionárius, téreltolás-invariáns állapotokra a megoldást. Ekkor az (x,y)-függésből $(x-y)$ függés lesz. Bozonoknál $G_{rr}(x) = G_{rr}(-x)$, így a bal oldalak ugyanazok lesznek. Az rr propagátorra felírva a fenti képleteket, Fourier transzformáció után kapjuk:

$$\Sigma_{aa}(k)G_{ar}(k) + \Sigma_{ar}(k)G_{rr}(k) = G_{ra}(k)\Sigma_{aa}(k) + G_{rr}(k)\Sigma_{ra}(k). \tag{446}$$

azaz

$$\left(\Sigma_{ar}(k) - \Sigma_{ra}(k)\right)G_{rr}(k) = \Sigma_{aa}(k)\left(G_{ra}(k) - G_{ar}(k)\right). \tag{447}$$

Mivel $iG_{ra} - iG_{ar} = \varrho$, azt kapjuk, hogy

$$iG_{rr}(k) = \frac{\Sigma_{aa}(k)}{\operatorname{Disc}\Sigma_R(k)}\varrho(k), \tag{448}$$

vagyis az rr propagátor a spektrál függvénnyel arányos, az arányossági konstanst jelölhetjük $1/2 + n(k_0)$-vel.

Most nézzük (445) egyenleteket teljesen nemegyensúlyi körülmények között. Írjuk fel az rr komponens egyenletét ismét:

$$\begin{aligned} K_0(i\partial_x)G_{rr}(x,y) &= \Sigma_{ar}(x,z)G_{rr}(z,y) + \Sigma_{aa}(x,z)G_{ar}(z,y), \\ K_0(i\partial_y)G_{rr}(x,y) &= G_{rr}(x,z)\Sigma_{ra}(z,y) + G_{ra}(x,z)\Sigma_{aa}(z,y). \end{aligned} \tag{449}$$

Kivonva a két egyenletet egymásból, felhasználva, hogy $K_0(i\partial) = -((i\partial)^2 + m^2)$, kapjuk

$$(-\partial_x^2 + \partial_y^2)G_{rr}(x,y) = \mathrm{St}(x,y), \tag{450}$$

ahol

$$\mathrm{St}(x,y) = \int d^4z \Big[\Sigma_{ar}(x,z)G_{rr}(z,y) + \Sigma_{aa}(x,z)G_{ar}(z,y) - G_{rr}(x,z)\Sigma_{ra}(z,y) - G_{ra}(x,z)\Sigma_{aa}(z,y)\Big], \quad (451)$$

ahol St az ütközési (Stoß) integral.

Végezzük el a következő traszformációt (Wigner-transzformáció):

$$\bar{f}(u,X) = f(X+\frac{u}{2}, X-\frac{u}{2}), \qquad f(x,y) = \bar{f}(x-y, \frac{x+y}{2}). \quad (452)$$

u szerint Fourier-transzformálva

$$\bar{f}(p,X) = \int d^4u e^{ipu}\bar{f}(u,X) = \int d^4u e^{ipu} f(X+\frac{u}{2}, X-\frac{u}{2}), \qquad \bar{f}(u,X) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ipx}\bar{f}(p,X). \quad (453)$$

Emiatt

$$\begin{aligned}
\partial_x \bar{f} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}\right)\bar{f} \quad \Rightarrow \quad \left(-ip + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}\right)\bar{f}(p,X) \\
\partial_y \bar{f} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} = \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}\right)\bar{f} \quad \Rightarrow \quad \left(ip + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}\right)\bar{f}(p,X).
\end{aligned} \quad (454)$$

Vagyis

$$-\partial_x^2 + \partial_y^2 \to -\left(-ip + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}\right)^2 + \left(ip + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}\right)^2 = 2ip\partial_X. \quad (455)$$

Vagyis a 2PI egyenletek

$$2ip\partial_X \bar{G}_{rr}(p,X) = \overline{\mathrm{St}}(p,X) \quad (456)$$

alakba írhatók. A jobb oldal kölcsönhatás nélküli esetben nulla, ekkor a szabad Boltzmann-egyenletet kapjuk vissza! Vagyis a 2PI egyenletek kölcsönhatás nélküli esetben megegyeznek a Boltzmann egyenletekkel.

Kölcsönható esetben a sajátenergia nem nulla, vagyis $\overline{\mathrm{St}} \neq 0$. Az ütközési integrál szerkezete

$$(f\cdot g)(x,y) = \int d^4z\, f(x,z)g(z,y) \quad \Rightarrow \quad \overline{(f\cdot g)}(u,X) = \int d^4z\, f(X+\frac{u}{2},z)g(z,X-\frac{u}{2}). \quad (457)$$

A Wigner transzformált alakokat beírva

$$\begin{aligned}
\overline{(f\cdot g)}(u,X) &= \int d^4z\, \bar{f}(X+\frac{u}{2}-z, \frac{1}{2}(X+\frac{u}{2}+z))\, \bar{g}(z-X+\frac{u}{2}, \frac{1}{2}(z+X-\frac{u}{2})) = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} s = X+\frac{u}{2}-z, & z = X+\frac{u}{2}-s \\ \frac{1}{2}(X+\frac{u}{2}+z) = X+\frac{u}{2}-\frac{s}{2} & \\ z-X+\frac{u}{2} = u-s & \\ \frac{1}{2}(z+X-\frac{u}{2}) = X-\frac{s}{2} & \end{array}\right\} = \\
&= \int d^4s\, \bar{f}(s, X+\frac{u}{2}-\frac{s}{2})\, \bar{g}(u-s, X-\frac{s}{2}).
\end{aligned} \quad (458)$$

A szokásos közelítés szerint az s illetve u változási tartománya jóval kisebb, mint amelyen belül a $\bar{g}(u,X)$ az átlag-koordinátákban változik. Ekkor a második argumentum szerint sorba fejthetjük a fenti kifejezést (gradiens kifejtés)

$$\overline{(f\cdot g)}(u,X) \approx \int d^4s\, \bar{f}(s,X)\, \bar{g}(u-s,X) = (f*g)(u,X), \quad (459)$$

vagyis konvolúciót kapunk. Fourier-térben tehát

$$\overline{(f\cdot g)}(p,X) \approx \bar{f}(p,X)\bar{g}(p,X). \quad (460)$$

Emiatt a gradiens kifejtés vezető rendjében, i-vel szorozva

$$2ip\partial_X i\bar{G}_{rr} = (\bar{\Sigma}_{ar} - \bar{\Sigma}_{ra})i\bar{G}_{rr} + \bar{\Sigma}_{aa}(i\bar{G}_{ar} - i\bar{G}_{ra}), \quad (461)$$

ahol minden argumentum (p, X). Átírva az 12 Keldysh komponensekre (251) és (98) alapján, azaz

$$\Sigma_{ar} = \Sigma_{11} + \Sigma_{12}, \qquad \Sigma_{ra} = \Sigma_{11} + \Sigma_{21}, \qquad \Sigma_{aa} = \frac{\Sigma_{21} + \Sigma_{12}}{2},$$
$$G_{rr} = \frac{G_{12} + G_{21}}{2}, \qquad iG_{ra} - iG_{ar} = \varrho = iG_{21} - iG_{12}.$$

Ezzel

$$2ip\partial_X i\bar{G}_{rr} = (\bar{\Sigma}_{12} - \bar{\Sigma}_{21})\frac{i\bar{G}_{12} + i\bar{G}_{21}}{2} + \frac{\bar{\Sigma}_{12} + \bar{\Sigma}_{21}}{2}(i\bar{G}_{12} - i\bar{G}_{21}),$$

vagyis

$$2ip\partial_X i\bar{G}_{rr} = \bar{\Sigma}_{12} i\bar{G}_{12} - \bar{\Sigma}_{21} i\bar{G}_{21}. \tag{462}$$

A jobb oldalon, a Boltzmann-egyenletek statisztikus értelmezésének megfelelően (és figyelembe véve a Σ definícióját), a második tagot p impulzusú állapotba való beszórás, az elsőt az onnan való kiszórás valószínűségének értelmezhetjük.

Elvileg van egy másik egyenletrendszer is, amely a G_{ra} propagátorokat határozza meg, ekkor a fenti egyenletekkel konzisztens, megoldható rendszert alkotnának. Itt azonban közelítéseket szoktak alkalmazni. Elsősorban feltesszük, hogy a spektrál függvény már beállt az egyensúlyi értékére, vagyis $\varrho(p, X) \to \varrho(p)$ helyfüggetlen. Ezen felül feltesszük azt is, hogy a G^{12} propagátor (és így G^{21} is) arányos a ϱ-val, ez definiálja a nemegyensúlyi eloszlásfüggvényt:

$$G^{12}(p, X) = n(p, X)\varrho(p). \tag{463}$$

Ezek után a sajátenergiára alkalmazhatjuk azt a gondolatmenetet, amit korábban a (287) levezetésénél használtunk. Σ^{12} kiszámításánál a bal oldali vertex 1, a jobb oldali 2, és, a 2PI séma következtében csak 2PI diagramokat kell figyelembe venni. Ekkor van egy 2PI domain, amely a bal oldali vertexhez csatolódik, és minden külső vertexe 1, és egy olyan, amely a jobb oldali vertexhez kapcsolódik, és minden külső vertexe 2. Ezeket G^{12} propagátorok kötik össze. A két járulék, ha minden diagramot összeszedünk, egymás komplex konjugáltja. A sajátnergia definíciója miatt még egy extra negatív előjel is jön. Vagyis, szimbolikusan

$$\Sigma^{12}(p, X) = -i\sum_\ell \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4p_\ell}{(2\pi)^4} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p - \sum_\ell p_\ell)\, \varrho(p_1)\dots\varrho(p_\ell)\, n(p_1)\dots n(p_\ell)\, |\Gamma^{11\dots1}_{\ell+1}(p, p_1, \dots, p_\ell)|^2. \tag{464}$$

Hasonló kifejezést kapunk Σ^{21}-re is. Ezzel a Boltzmann egyenlet alakja

$$2p\varrho(p)\partial_X n(p, X) = \sum_\ell \int_{p_1\dots p_\ell} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p - \sum p_\ell)\, |\Gamma^{11\dots1}_{\ell+1}|^2\, \varrho\varrho_1\dots\varrho_\ell \Big((1 \pm n)(1 \pm n_1)\dots(1 \pm n_\ell) - nn_1\dots n_\ell\Big). \tag{465}$$

További közelítésként fel szokták tenni, hogy a spektrál függvény a szabad spektrál függvénnyel egyezik

$$\varrho(p) \to \varrho_0(p) = \frac{2\pi}{2E_p}\left[\delta(p_0 - E_p) - \delta(p_0 + E_p)\right], \tag{466}$$

valamint hogy az $1 \pm n(-p_0) = \mp n(p_0)$ igaz. Az eloszlásfüggvények ekkor már csak $\mathbf{p}$ függvényei, és így megkapjuk a (kvantumos) Boltzmann egyenlet szokásos alakját

$$\partial_t n - \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla} n = \frac{1}{2E_p}\sum_\ell \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_\ell}{(2\pi)^3 E_\ell} (2\pi)^4\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \sum \mathbf{p}_i) \sum_{\alpha_1}\dots\sum_{\alpha_\ell}\Bigg[|\Gamma^{11\dots1}_{\ell+1}|^2\, \delta(E_p - \sum \alpha_i E_i)\Big((1 \pm n)n_{\alpha_1,1}\dots n_{\alpha_\ell,\ell} - nn_{-\alpha_1,1}\dots n_{-\alpha_\ell,\ell}\Big)\Bigg], \tag{467}$$

ahol $\alpha_i = \pm 1$ és $n_+ = 1 \pm n$, $n_- = n$ jelölést használtuk. Ez az alak még mindig több tagot tartalmaz, mint a klasszikus Boltzmann egyenlet, mert a részecske keltés és eltüntetés folyamatai is benne vannak.

5.8 Új szabadsági fokok

Előfordulhat, hogy a Lagrange-függvény alakját annyira megváltoztathatjuk, hogy más terek is megjelenhetnek benne. Ha tudjuk valahonnan, hogy az eredeti csupasz $\mathcal{L}(A_i, G_u, \Lambda)$ Lagrange-függvény által leírt fizika ugyanaz, mint egy másik $\mathcal{L}'(a_i, g_v, \Lambda')$ csupasz Lagrange-függvény által leírt fizika, amely azonban más tereket, más típusú csatolásokat és más levágást tartalmaz, akkor a $\mathcal{L}'$ paramétereit meghatározhatom annyi fizikai mennyiségből, amennyi a paraméterek száma. Ezen mennyiségeket pedig $\mathcal{L}$ eredeti Lagrange-függvényből számolhatjuk ki. Ezt az eljárást hívjuk *matching*-nek, mivel a két Lagrange-függvény által leírt fizikát illesztjük össze.

Ennek legegyszerűbb esete, mikor $T = 0$-n a levágás értékét csökkentem le. Ebben az esetben a terek számát csökkentem, hiszen a Λ' levágással rendelkező elméletben azok a módusok, amelyek impulzusa $\Lambda > |k| > \Lambda'$, hiányoznak. Ha azonban a levágás nagyon nagy, akkor mégis képesek leszünk leírni ugyanazt a fizikát.

Nézzük ezt az esetet a Φ^4 elméleteben. Az új elmélet terei Λ' alatt a régiével azonosak, normálás erejéig $\Phi \to \zeta\Phi$. Az azonos fizika feltétele, hogy az új elméletben (a fenti normálás erejéig) ugyanazok legyenek a korrelációs függvények. Ez most azt jelenti, hogy

$$G^{(n)}(p_1, \dots p_n; \lambda, m^2; \Lambda) = \zeta^n(\Lambda') G^{(n)}(p_1, \dots p_n; \lambda', m'^2; \Lambda'). \tag{468}$$

Ez formálisan ugyanolyan egyenlet, mint a (390) egyenletek, amelyeket a skálaváltásnál alkalmaztunk. Mint ott, most is lederiválhatunk Λ' szerint, amivel a következő egyenletet kapjuk ($\Lambda' \to \Lambda$ átnevezéssel):

$$\left(n \frac{d \ln \zeta}{d \ln \Lambda} + \frac{d\lambda}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{dm^2}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial m^2} + \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \right) G^{(n)}(p_1, \dots p_n; \lambda, m^2; \Lambda) = 0. \tag{469}$$

Három egyenletet ezek közül felhasználhatunk a $\zeta(\Lambda)$, $\lambda(\Lambda)$ és $m^2(\lambda)$ összefüggések meghatározására. Azonban a munkát megtakaríthatjuk, ha észrevesszük, hogy megfelelő (pl. MS) sémát használva a csupasz mennyiségek a renormált csatolásokkal úgy fejezhetők ki, hogy

$$g_b(\Lambda) = g_{ren}(\mu) + \delta g(\ln \frac{\Lambda}{\mu}). \tag{470}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{dg_b}{d \ln \Lambda} = \frac{d\delta g}{d \ln \Lambda} = \frac{d\delta g}{d \ln \Lambda/\mu} = -\frac{d\delta g}{d \ln \mu} = \frac{dg}{d \ln \mu}. \tag{471}$$

Ez vezető rendben azt jelenti Φ^4 elméletben, hogy

$$\frac{d\lambda_b}{\partial \ln \Lambda} = \frac{3\lambda_b^2}{16\pi^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_b(\Lambda) = \frac{\lambda_b(\Lambda_0)}{1 - \frac{3\lambda_b(\Lambda_0)}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda_0}}. \tag{472}$$

Ha csökkentem a levágást, akkor a fenti egyenlet szerint gyengébben kölcsönható elmélethez jutok. Ha egy olyan elméletből indulok, amelynek nagyon nagy a levágása ($\Lambda_0 \to \infty$), és ott megadom a csatolási állandót ($\lambda(\Lambda_0) = \lambda_0$ véges), akkor véges levágások mellett $\lambda(\Lambda) \to 0$ csatolási állandót kell használnom ugyanahhoz a fizikához. Ez a trivialitás ezen a nyelven.

A szabadsági fokok csökkentése azonban nem adhatja egzaktul ugyanazt az elméletet. Ha egy olyan szórást tekintünk, amely eredménye olyan részecske, amely az eredeti elméletben szerepel, a csökkentett levágású elméletben pedig nem, akkor ezt a szórást $\mathcal{L}'$ nem képes leírni. Így azt várjuk, hogy a $\mathcal{L}'$ elméletben az állapotok nem alkotnak teljes rendszert, az S-mátrix nem lesz unitér.

Hogy ezt lássuk, írjuk fel expliciten az eredeti teret, mint $\Phi(k) = \Theta(k < \Lambda')\phi(k) + \Theta(\Lambda' < k < \Lambda)\chi(k)$. A generátor funkcionál

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi] + J\Phi} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\chi e^{iS[\phi+\chi] + J(\phi+\chi)}. \tag{473}$$

Legyen az áram alacsony frekvenciás, azaz $J(k > \Lambda') = 0$. Ekkor $J\chi = 0$, vagyis

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{J\phi} \int \mathcal{D}\chi e^{iS[\phi+\chi]} = \int \mathcal{D} e^{iS'[\phi] + J\phi}, \tag{474}$$

azaz

$$e^{iS'[\phi]} = \int \mathcal{D}\chi e^{iS[\phi+\chi]} \quad \Rightarrow \quad S'[\phi] = S[\phi] + \chi\text{−korrekc..} \tag{475}$$

A Φ^4 modellben:

$$\Phi^4 \to (\phi+\chi)^4 = \phi^4 + 4\phi^3\chi + 6\phi^2\chi^2 + 4\phi\chi^3 + \chi^4. \tag{476}$$

A χ integrálásakor a ϕ csupán a vertex része, de formálisan olyan, mintha ott egy χ vonal indulna, amit amputálunk, és ϕ-vel helyettesítjük azt. Emiatt S'-höz ϕ-ben kvadratikus rendben jövő korrekciói éppen a χ sajátenergiái lesznek (amputált propagátor), azaz

$$S'[\phi] = S[\phi] - \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\phi_i(-k)\Sigma_\chi^{ij}(k)\phi_j(k), \qquad i,j = r,a \tag{477}$$

Mivel a χ módusok nagy energiásak, ezért a $\Sigma(k)$-ban a skála nagy, vagyis a kis impulzusú sorfejtés alkalmazható. Ezért mindig csak a k-ban vezető rendet tartjuk meg.

Az S' hatásnak két furcsasága is van

- Σ_{ra}-nak van imaginárius része, emiatt a hatás nem hermitikus
- kapunk $\phi_a\phi_a$ tagot Σ^{aa} együtthatóval, ami miatt $G^{aa} \neq 0$, ellentétben a mikroszkopikus elméletekre mindig igaz (98) egyenletekkel.

Mindkét pont arra utal, hogy a csökkentett levágással rendelkező elmélet nem mikroszkopikus elmélet.

A fenti problémák kezelésére a következőket lehet csinálni: a Σ^{aa} Fourier-térben teljesen imaginárius, a nulla impulzusú limeszben tehát jelölhetjük

$$i\Sigma^{aa}(k=0) = D. \tag{478}$$

Ekkor a generátor funkcionálban kapott alak

$$e^{iS} \to e^{-\frac{D}{2}\phi_a^2} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{1}{2D}\xi^2 + i\phi_a\xi}. \tag{479}$$

Ezt úgy értelmezzük, hogy a Σ^{aa} tag helyett $S' - S \to \xi\phi_a$ tag szerepel, és ξ értékeit Gauss eloszlás szerint, a különböző pontokban egymástól függetlenül választjuk. Vagyis ξ *fehér zaj*, melynek korrelációja $\langle \xi^2 \rangle = D$.

A másik problematikus tagnál szintén az alacsony impulzusú limeszt tartjuk meg. Mivel $\operatorname{Im}\Sigma^{ar}(k_0)$ páratlan, és pozitív frekvenciákra negatív, ezért $\operatorname{Im}\Sigma^{ar}(k_0) = -\gamma k_0 + \dots$. A hatás megfelelő tagja Fourier térben

$$\int 4k\phi_a(-k)(-i\gamma k_0)\phi_r(k) = \int d^4x \phi_a \gamma \partial_t \phi_r. \tag{480}$$

Ez a tag tehát csillapodást ír le, amely az elveszett szabadsági fokokba való szóródásnak felel meg.

Van tehát két tagunk, amely a kiintegrált szabadsági fokokat különböző módon veszi figyelembe. Az egyik a hiányzó állapotokba való szóródás miatti csillapítást adja, a másik a hiányzó szabadsági fokok dinamikáját reprezentálja zaj formájában. Egyensúlyban e kettő hatás relációba hozható, hiszen (258) alapján

$$D = \lim_{k\to 0} i\Sigma^{aa}(k) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{2} + n(k_0)\right)(-2\operatorname{Im}\Sigma^{ar}(k)) = 2T\gamma \quad \Rightarrow \quad D = 2T\gamma, \tag{481}$$

ez a *fluktuáció-disszpáció tétel.*

6 Ward identities and Schwinger-Dyson equations: basic formula

Consider a path integral formula

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]+J\Phi}, \tag{482}$$

where Φ and J denotes multiple fields and field currents, and multiplication is understood as spacetime-integral. Perform a local transformation on the field integral variable, assuming that the corresponding Jacobian is unity:

$$\Phi_i' = \Phi_i + \varepsilon_i \Delta\Phi_i, \qquad \ln \text{Jacobi} = \ln\det\left(\mathbf{1} + \varepsilon\frac{\delta\Delta\Phi}{\delta\Phi}\right) = \varepsilon\,\mathrm{Tr}\,\frac{\delta\Delta\Phi}{\delta\Phi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \stackrel{!}{=} 0. \tag{483}$$

The change in the path integral

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\Phi' e^{iS[\Phi']+J\Phi'} = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi+\varepsilon\Delta\Phi]+J(\Phi+\varepsilon\Delta\Phi)} = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]+J\Phi}\left(1 + i\varepsilon\frac{\delta S}{\delta\varepsilon} + \varepsilon J\Delta\Phi\right) = \\ &= Z[J]\left(1 + i\varepsilon\left\langle\frac{\delta S}{\delta\varepsilon} - iJ\Delta\Phi\right\rangle\right). \end{aligned} \tag{484}$$

Therefore:

$$\left\langle\frac{\delta S}{\delta\varepsilon_i} - iJ_i\Delta\Phi_i\right\rangle = 0. \tag{485}$$

This is true for any transformation.

We can determine this formula for the generating functionals $Z[J] = e^{iW[J]}$. Then we should take into account that $\Phi \to \frac{\delta}{\delta J}$, and so

$$\langle f(\Phi)\rangle = \frac{1}{Z[J]} f\left(\frac{\delta}{\delta J}\right) Z[J] = e^{-iW} f\left(\frac{\delta}{\delta J}\right) e^{iW} = f\left(\frac{\delta}{\delta J} + i\frac{\delta W}{\delta J}\right). \tag{486}$$

With the effective action

$$i\Gamma[\Phi] = (iW[J] - J\Phi)\Big|_{\Phi = i\frac{\delta W}{\delta J}}, \qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi} = iJ, \qquad \frac{\delta}{\delta J} = \frac{\delta\Phi}{\delta J}\frac{\delta}{\delta\Phi} = \frac{\delta^2 iW}{\delta J^2}\frac{\delta}{\delta\Phi} = iG\frac{\delta}{\delta\Phi}. \tag{487}$$

we find, this time writing out the indexes explicitly:

$$\langle f(\Phi)\rangle = f\left(\Phi_i + iG_{ij}\frac{\delta}{\delta\Phi_j}\right). \tag{488}$$

Therefore

$$\frac{\delta S}{\delta\varepsilon_i}\left(\Phi + iG\frac{\delta}{\delta\Phi}\right) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi_i}\Delta\Phi_i\left(\Phi + iG\frac{\delta}{\delta\Phi}\right). \tag{489}$$

We can also stay in the original formalism and take n-th derivative with respect to $J_{a_1}, \dots J_{a_n}$:

$$\left\langle\left(\frac{\delta S}{\delta\varepsilon_i} - iJ_i\Delta\Phi_i\right)\Phi_{a1}\dots\Phi_{a_n} - i\sum_{k=1}^{n}\delta_{ia_k}\Phi_{a1}\dots\Phi_{a_{k-1}}\Delta\Phi_{a_k}\Phi_{a_{k+1}}\dots\Phi_{a_n}\right\rangle = 0. \tag{490}$$

In the physical vacuum $J = 0$, and we find

$$\left\langle\frac{\delta S}{\delta\varepsilon_i}\Phi_{a1}\dots\Phi_{a_n}\right\rangle = i\sum_{k=1}^{n}\delta_{ia_k}\left\langle\Phi_{a1}\dots\Phi_{a_{k-1}}\Delta\Phi_{a_k}\Phi_{a_{k+1}}\dots\Phi_{a_n}\right\rangle. \tag{491}$$

7 Applications

We should emphasize that (485) and (489) are true for *any* transformation ε!. Specifying the form of the transformation leads to different applications.

8 Equation of motion

The most simple application is when the transformation is a simple shift of the field value, that is $\Phi'_j(x) = \Phi_j(x) + \varepsilon(x)\delta_{ij}$. Then $\Delta\Phi_i = \delta_{ij}$ and the derivative with respect to ε is the same as the derivative with respect to Φ_i. This leads to

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \Phi_i} - iJ_i \right\rangle = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{\delta S}{\delta \Phi_i}\left(\Phi + iG\frac{\delta}{\delta\Phi}\right) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi}. \tag{492}$$

These are the generating forms of the Schwinger-Dyson equations. In particular for the physical vacuum $J = 0$ and so

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \Phi_i} \right\rangle\Bigg|_{phys} = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{\delta S}{\delta \Phi_i}\left(\Phi + iG\frac{\delta}{\delta\Phi}\right)\Bigg|_{phys} = 0. \tag{493}$$

Taking its derivative with respect to $J_{a_1}, \dots J_{a_n}$ we find in the physical vacuum $J = 0$ (cf. (491))

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \Phi_i}\Phi_{a1}\dots\Phi_{a_n} \right\rangle = i\sum_{k=1}^{n}\delta_{ia_k}\left\langle \Phi_{a1}\dots\Phi_{a_{k-1}}\Phi_{a_{k+1}}\dots\Phi_{a_n}\right\rangle. \tag{494}$$

8.1 Φ^4 model

The Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi\mathcal{K}\Phi - \frac{\lambda}{24}\Phi^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = \mathcal{K}\Phi - \frac{\lambda}{6}\Phi^3. \tag{495}$$

First consider the 1-point function (at $J = 0$)

$$\mathcal{K}_x\Phi_x - \frac{\lambda}{6}\left\langle \Phi_x^3 \right\rangle = 0. \tag{496}$$

First let us write it in connected form:

$$\left(\mathcal{K}_x - \frac{\lambda}{6}\Phi_x^2 - \frac{\lambda}{2}iG_{xx}\right)\Phi_x - \frac{\lambda}{6}iG^{(3)}_{xxx} = 0. \tag{497}$$

The 2-point function reads:

$$\mathcal{K}_x\left\langle \Phi_x\Phi_y \right\rangle - \frac{\lambda}{6}\left\langle \Phi_x^3\Phi_y \right\rangle = i\delta_{xy}. \tag{498}$$

First let us write it in connected form:

$$\left(\mathcal{K}_x - \frac{\lambda}{2}iG_{xx} - \frac{\lambda}{6}\Phi_x^2\right)\Phi_x\Phi_y + \left(\mathcal{K}_x - \frac{\lambda}{2}iG_{xx} - \frac{\lambda}{2}\Phi_x^2\right)iG_{xy} - \frac{\lambda}{2}\Phi_x iG^{(3)}_{xxy} - \frac{\lambda}{6}\Phi_y iG^{(3)}_{xxx} - \frac{\lambda}{6}iG^{(4)}_{xxxy} = i\delta_{xy}. \tag{499}$$

From the 1-point function we can write

$$\left(\mathcal{K}_x - \frac{\lambda}{2}iG_{xx} - \frac{\lambda}{2}\Phi_x^2\right)iG_{xy} - \frac{\lambda}{2}\Phi_x iG^{(3)}_{xxy} - \frac{\lambda}{3}\Phi_y iG^{(3)}_{xxx} - \frac{\lambda}{6}iG^{(4)}_{xxxy} = i\delta_{xy}. \tag{500}$$

Although this is the general form (which is valid for non-equiliubrium case, too), but let us restrict ourselves to equilibrium, where space-time translation invariance holds. Then $\Phi_x = \Phi$ position independent and $G_{xx} = G_0$. We also denote the non-derivative part of $\mathcal{K} \to -M^2$

$$\left(\mathcal{K}_x - \frac{\lambda}{2}iG_0 - \frac{\lambda}{2}\Phi^2\right)iG_{xy} = i\delta_{xy} + \frac{\lambda}{2}\Phi_x iG^{(3)}_{xxy} + \frac{\lambda}{3}\Phi_y iG^{(3)}_{xxx} + \frac{\lambda}{6}iG^{(4)}_{xxxy}. \tag{501}$$

Now write it as a function of proper vertices

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{K}_x - \frac{\lambda}{2}iG_0 - \frac{\lambda}{2}\Phi^2\right)iG_{xy} &= i\delta_{xy} + \frac{\lambda}{2}\Phi i\Gamma^{(3)}_{x'y'z'}iG_{xx'}iG_{xy'}iG_{zy'} + \frac{\lambda}{3}\Phi i\Gamma^{(3)}_{x'y'z'}iG_{xx'}iG_{xy'}iG_{xz'} + \\ &+ \frac{\lambda}{6}\left[i\Gamma^{(4)}_{x'y'z'w'}iG_{x'x}iG_{y'x}iG_{z'x}iG_{w'y} + 3iG_{xx'}iG_{xy'}i\Gamma^{(3)}_{x'y'w}iG_{ww'}i\Gamma^{(3)}_{w'z'u'}iG_{xz'}iG_{uy}\right]\end{aligned} \tag{502}$$

In this formula all the Γ n-point functions also depend on the field Φ. Because of the $\Phi \to -\Phi$ symmetry, at $\Gamma^{(2n+1)}|_{\Phi=0} = 0$. This means that $i\Gamma^{(3)} = U\Phi$, so we can write

$$\left(\mathcal{K}_x - \frac{\lambda}{2} iG_0 - \frac{\lambda}{2}\Phi^2\right) iG_{xy} = i\delta_{xy} + \frac{\lambda\Phi^2}{2} U_{x'y'z'} iG_{xx'} iG_{xy'} iG_{zy'} + \frac{\lambda\Phi^2}{3} U_{x'y'z'} iG_{xx'} iG_{xy'} iG_{xz'} + \frac{\lambda\Phi^2}{2} iG_{xx'} iG_{xy'}\, U_{x'y'w} iG_{ww'}\, U_{w'z'u'} iG_{xz'} iG_{u'y} + \frac{\lambda}{6}\, i\Gamma^{(4)}_{x'y'z'w'} iG_{x'x} iG_{y'x} iG_{z'x} iG_{w'y} \tag{503}$$

For $\Phi = 0$ symmetric case it reduces to

$$\left(\mathcal{K}_x - \frac{\lambda}{2} iG_0\right) iG_{xy} = i\delta_{xy} + \frac{\lambda}{6}\, i\Gamma^{(4)}_{x'y'z'w'} iG_{x'x} iG_{y'x} iG_{z'x} iG_{w'y}. \tag{504}$$

8.2 QED equations of motion

The Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}((i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m)\Psi. \tag{505}$$

The $\bar{\Psi}$ equation of motion

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\Psi}(x)} = ((i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m)\Psi. \tag{506}$$

So the equation of the 1-point function is trivially zero, for the 2-point function we obtain

$$(i\partial\!\!\!/ - m) \left\langle \Psi(x)\bar{\Psi}(y) \right\rangle - e\gamma^\mu \left\langle A_\mu(x)\Psi(x)\bar{\Psi}(y) \right\rangle = i\delta(x-y). \tag{507}$$

To write it as a function of proper vertices we shall take into account that, because of perturbation theory:

$$\left\langle A_\mu(x)\hat{O}[\bar{\Psi},\Psi] \right\rangle = iG_{\mu\nu}(x-u) \left\langle (-ie)\bar{\Psi}(x)\gamma^\nu\Psi(x)\, \hat{O}[\bar{\Psi},\Psi] \right\rangle = iG_{\mu\nu}(x-u)\, i \left\langle j^\nu(x)\, \hat{O}[\bar{\Psi},\Psi] \right\rangle. \tag{508}$$

We have now $\hat{O} = \Psi(x)\bar{\Psi}(y)$; at tree level a similar expression is evaluated as

$$\left\langle \Psi(y)\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\bar{\Psi}(y) \right\rangle = i\mathcal{G}(y-x)\, \gamma^\mu\, i\mathcal{G}(x-z). \tag{509}$$

motivated by this form we write for the general case

$$\left\langle j^\mu(x)\Psi(y)\bar{\Psi}(z) \right\rangle = -e\, i\mathcal{G}(y-u)\, \Gamma^\mu(x;u,v)\, i\mathcal{G}(v-z). \tag{510}$$

Therefore we can write

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\, \mathcal{G}(x-y) = \delta(x-y) + ie^2\gamma^\mu G_{\mu\nu}(x-z)\, \mathcal{G}(x-u)\, \Gamma^\nu(z;u,v)\, \mathcal{G}(v-y). \tag{511}$$

This expression yields correctly the one-loop result with the substitution $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_0$ on the right hand side.

We can also write it as an expression for the self-energy:

$$\Sigma(x,y) = -ie^2\gamma^\mu G_{\mu\nu}(x-z)\, \mathcal{G}(x-u)\, \Gamma^\nu(z;u,y). \tag{512}$$

8.3 Keldysh formalism

We can consider first Φ^4 model in the Keldysh formalism, where we write for the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\Phi_1] - \mathcal{L}[\Phi_2]. \tag{513}$$

This description fits in the generic framework, since

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} = \alpha_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\bigg|_{\Phi=\Phi_i}, \qquad \text{where} \quad \alpha_i = (-1)^{i-1}. \tag{514}$$

Therefore

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\bigg|_{\Phi=\Phi_i} \Phi_{a1}\dots\Phi_{a_n} \right\rangle = i\alpha_i \sum_{k=1}^{n} \delta_{ia_k} \left\langle \Phi_{a1}\dots\Phi_{a_{k-1}}\Phi_{a_{k+1}}\dots\Phi_{a_n} \right\rangle. \tag{515}$$

In particular for the 2-point function:

$$K\left\langle \Phi_i(x)\Phi_j(y)\right\rangle - \frac{\lambda}{6}\left\langle \Phi_i^3(x)\Phi_j(y)\right\rangle = i\alpha_i\delta(x-y). \tag{516}$$

In the symmetric phase this is equivalent to

$$\left(\mathcal{K}_x - \frac{\lambda}{2} iG_{ii}(0)\right) G_{ij}(x-y) = \alpha_i\delta(x-y) + \frac{\lambda}{6} G_{ii'}(x-x')G_{ij'}(x-y')G_{ik'}(x-z')\,\Gamma^{(4)}_{i'j'k'\ell'}(x',y',z',w')\,G_{\ell' j}(w'-y). \tag{517}$$

With the definition of the self-energy we have to take care, since it is defined as

$$G_{ij} = G^{(0)}_{ij} + G^{(0)}_{ik}\Sigma_{k\ell}G_{\ell j}, \tag{518}$$

and so we find

$$\Sigma_{ij}(x-y) = \frac{\alpha_i\lambda}{2}\, iG_{ii}(0)\delta_{ij} + \frac{\alpha_i\lambda}{6} G_{ii'}(x-x')G_{ij'}(x-y')G_{ik'}(x-z')\,\Gamma^{(4)}_{i'j'k'j}(x',y',z',y) \tag{519}$$

In a similar way, for the QED in Keldysh formalism we obtain

$$\Sigma_{ab}(x,y) = -i\alpha_i e^2\gamma^\mu G_{\mu\nu,aa'}(x-z)\,\mathcal{G}_{bb'}(x-u)\,\Gamma^\nu_{a'b'b}(z;u,y). \tag{520}$$

9 Ward identities from a global symmetry

If the transformation $\Phi' = \Phi + \varepsilon\Delta\Phi$ corresponds to a global symmetry of the system, then the derivative is

$$\frac{\delta S}{\delta\varepsilon_i} = \partial_\mu j^\mu_i. \tag{521}$$

We remark here that j^μ is the conserved current while J is the current assigned to the field. In this way we obtain

$$\langle \partial_\mu j^\mu_i - iJ_i\Delta\Phi_i\rangle = 0 \qquad \text{or} \qquad \partial_\mu j^\mu\left(\Phi + iG\frac{\delta}{\delta\Phi}\right) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi}\Delta\Phi\left(\Phi + iG\frac{\delta}{\delta\Phi}\right). \tag{522}$$

For the n-point function we find from (491)

$$\partial_\mu\left\langle j^\mu_i\Phi_{a1}\dots\Phi_{a_n}\right\rangle = i\sum_{k=1}^{n}\delta_{ia_k}\left\langle \Phi_{a1}\dots\Phi_{a_{k-1}}\Delta\Phi_i\Phi_{a_{k+1}}\dots\Phi_{a_n}\right\rangle. \tag{523}$$

From here we can proceed by integrating out the i variable and obtain

$$0 = \sum_{k=1}^{n}\left\langle \Phi_{a1}\dots\Phi_{a_{k-1}}\Delta\Phi_{a_k}\Phi_{a_{k+1}}\dots\Phi_{a_n}\right\rangle. \tag{524}$$

The right hand side is the total change in the expectation value

$$0 = \Delta\left\langle \Phi_{a_1}\dots\Phi_{a_n}\right\rangle. \tag{525}$$

In case of linear transformations $\Delta\Phi_i = T_{ij}\Phi_j$, and we can write from the effective action form

$$0 = \sum_{ij}\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi_i}T_{ij}\Phi_j. \tag{526}$$

For the effective potential it reads

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi_i} T_{ij}\Phi_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_k \partial \Phi_i} T_{ij}\Phi_j + \frac{\partial V}{\partial \Phi_i} T_{ik} = 0. \tag{527}$$

This means that at $J = 0$ where the constant part of the field satisfies $\partial V/\partial \Phi_i = 0$, we find for the second derivative

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_k \partial \Phi_i} T_{ij}\Phi_j = 0, \tag{528}$$

therefore (if $\Phi \neq 0$) for all generators of the symmetry there exists a null-vector of the mass matrix (Goldstone theorem).

Now let us write up the original formula for two fields

$$\partial_x^\mu \langle j_\mu(x)\varphi_i(y)\varphi_j(z)\rangle = i\delta(x-y)T_{ik}\langle \varphi_k(y)\varphi_j(z)\rangle + i\delta(x-z)T_{jk}\langle \varphi_i(y)\varphi_k(z)\rangle \tag{529}$$

which implies, using the proper (1PI) vertex representation of the left hand side:

$$iG_{ii'}(y-y')\, iG_{jj'}(z-z')\, \partial_{x,\mu}\Gamma^\mu_{i'j'}(x,y',z') = i\delta(x-y)T_{ik}\, iG_{jk}(z-y) + i\delta(x-z)T_{jk}\, iG_{ik}(y-z). \tag{530}$$

In Fourier-space

$$G_{ii'}(p)G_{jj'}(q)(-ik_\mu)\Gamma^\mu_{i'j'}(k,p,q) = T_{ik}G_{jk}(q) + T_{jk}G_{ik}(p), \qquad \text{and} \qquad k+p+q=0. \tag{531}$$

Multiplying with the inverse propagators

$$(-ik_\mu)\Gamma^\mu_{ij}(k,p,q) = G^{-1}_{ik}(p)T_{kj} + G^{-1}_{jk}(q)T_{ki}. \tag{532}$$

A special case is when the propagation is diagonal and $T_{ij} = -T_{ji}$, then

$$(-ik_\mu)\Gamma^\mu_{ij}(k,p,q) = T_{ij}\left(G^{-1}_i(p) - G^{-1}_j(q)\right). \tag{533}$$

9.1 QED current conservation

In QED the Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}((i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m)\Psi. \tag{534}$$

The phase transformation

$$\Psi' = e^{-ie\alpha}\Psi, \qquad \bar{\Psi}' = e^{ie\alpha}\bar{\Psi}, \quad \Rightarrow \quad \Delta\Psi = -ie\Psi, \qquad \Delta\bar{\Psi} = ie\bar{\Psi}. \tag{535}$$

The corresponding electric current

$$\delta\mathcal{L} = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\,\partial_\mu\alpha \quad \Rightarrow \quad j^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \tag{536}$$

Take the expectation value

$$\partial_\mu\left\langle j^\mu(x)\Psi(y)\bar{\Psi}(z)\right\rangle = i\left(\delta(x-y)(-ie)\left\langle\Psi(y)\bar{\Psi}(z)\right\rangle + \delta(x-z)(ie)\left\langle\Psi(y)\bar{\Psi}(z)\right\rangle\right). \tag{537}$$

The expectation vale at left hand side at tree level reads

$$-e\left\langle\Psi(y)\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\bar{\Psi}(y)\right\rangle = -e\, i\mathcal{G}(y-x)\,\gamma^\mu\, i\mathcal{G}(x-z). \tag{538}$$

motivated by this form we write for the general case

$$\left\langle j^\mu(x)\Psi(y)\bar{\Psi}(z)\right\rangle = -e\, i\mathcal{G}(y-u)\,\Gamma^\mu(x;u,v)\, i\mathcal{G}(v-z). \tag{539}$$

So we find

$$\mathcal{G}(y-u)\, i\partial_{x\mu}\Gamma^\mu(x;u,v)\,\mathcal{G}(v-z) = \delta(x-z)\,\mathcal{G}(y-z) - \delta(x-y)\,\mathcal{G}(y-z). \tag{540}$$

For Fourier transformation we use a negative momentum for $\bar{\Psi}$, and we obtain

$$\mathcal{G}(p)\, k_\mu \Gamma^\mu(k;p,q)\, \mathcal{G}(q) = (2\pi)^4 \delta(k+p-q)\, (\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(q))\,. \tag{541}$$

If the Dirac-delta part is taken into account implicitly, then we can write

$$k_\mu \Gamma^\mu(k;p,q) = \mathcal{G}^{-1}(q) - \mathcal{G}^{-1}(p). \tag{542}$$

With self energy expressions $\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G}_0^{-1} - \Sigma$, and with the tree level propagator $\mathcal{G}_0^{-1}(p) = \not{p} - m$, we find

$$\mathcal{G}_0^{-1}(q) - \mathcal{G}_0^{-1}(p) = \not{q} - \not{p} = \not{k}, \tag{543}$$

and so

$$k_\mu \Gamma^\mu(k;p,q) = k_\mu \gamma^\mu + \Sigma(p) - \Sigma(q). \tag{544}$$

We remark that if there are several fields (like in the Keldysh-formalism), then additional Dirac-delta components appear:

$$\partial_\mu \left\langle j_a^\mu(x) \Psi_b(y) \bar{\Psi}_c(z) \right\rangle = i \left(\delta(x-y) \delta_{ab} (-ie) \left\langle \Psi_b(y) \bar{\Psi}_c(z) \right\rangle + \delta(x-z) \delta_{ac} (ie) \left\langle \Psi_b(y) \bar{\Psi}_c(z) \right\rangle \right). \tag{545}$$

Therefore

$$\mathcal{G}_{bb'}(y-u)\, i\partial_{x\mu} \Gamma^\mu_{ab'c'}(x;u,v)\, \mathcal{G}_{c'c}(v-z) = \delta(x-z)\delta_{ac}\, \mathcal{G}_{bc}(y-z) - \delta(x-y)\delta_{ab}\, \mathcal{G}_{bc}(y-z). \tag{546}$$

For Fourier transformation we use a negative momentum for $\bar{\Psi}$, and we obtain

$$\mathcal{G}_{bb'}(p)\, k_\mu \Gamma^\mu_{ab'c'}(k;p,q)\, \mathcal{G}_{c'c}(q) = \delta_{ac} \mathcal{G}_{bc}(p) - \delta_{ab} \mathcal{G}_{bc}(q). \tag{547}$$

Then we find finally

$$k_\mu \Gamma^\mu_{abc}(k;p,q) = \delta_{ab} \mathcal{G}^{-1}_{bc}(q) - \delta_{ac} \mathcal{G}^{-1}_{bc}(p). \tag{548}$$

With self-energy, using the definition $\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G}_0^{-1} - \Sigma$, and $\mathcal{G}^{-1}_{ab}(p) = \alpha_a \delta_{ab} (\not{p} - m)$, we find

$$k_\mu \Gamma^\mu_{abc}(k;p,q) = \delta_{abc} \alpha_a k_\mu \gamma^\mu + \delta_{ac} \Sigma_{bc}(p) - \delta_{ab} \Sigma_{bc}(q). \tag{549}$$

Appendix

A Relations of 1PI, connected and disconnected correlation functions

The relation of the n-point functions of the connected and 1PI case:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi_i} = i J_i, \\
&\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi_i \delta \Phi_k} \frac{\delta^2 W}{\delta J_k \delta J_\ell} = \delta_{i\ell}, \qquad \text{or} \qquad \Gamma^{(2)}_{ik} G_{k\ell} = \delta_{i\ell} \\
&i\Gamma^{(3)}_{ijk}\, iG_{ii'}\, iG_{jj'}\, iG_{kk'} = iG^{(3)}_{i'j'k'} \\
&i\Gamma^{(4)}_{ijk\ell}\, iG_{ii'}\, iG_{jj'}\, iG_{kk'}\, iG_{\ell\ell'} + iG_{jj'}\, iG_{kk'}\, i\Gamma^{(3)}_{ijk}\, iG_{ia}\, i\Gamma^{(3)}_{abc}\, iG_{bi'}\, iG_{c\ell'} + \cdots = iG^{(4)}_{i'j'k'\ell'}.
\end{aligned} \tag{550}$$

We also remark that the connection between the connected and disconnected diagrams:

$$\begin{aligned}
&Z = e^{iW} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Z} Z^{(1)}_i = \Phi_i, \qquad \frac{1}{Z} Z^{(2)}_{ij} = \Phi_i \Phi_j + iG_{ij} \\
&\frac{1}{Z} Z^{(3)}_{ijk} = \Phi_i \Phi_j \Phi_k + (\Phi_i iG_{jk} + \dots) + iG^{(3)}_{ijk} \\
&\frac{1}{Z} Z^{(4)}_{ijk\ell} = \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_\ell + (\Phi_i \Phi_j iG_{k\ell} + \dots) + (iG_{ij} iG_{k\ell} + iG_{ik} iG_{j\ell} + iG_{i\ell} iG_{k\ell}) + (\Phi_i iG^3_{jk\ell} + \dots) + iG^{(3)}_{ijk\ell}
\end{aligned} \tag{551}$$